数理解析研究所講究録
356巻 1979年 1-21



# $C^*$-algebras の regular $\sigma$-completions について

東北大 理　斎藤和之

$C^*$-algebra が $W^*$-algebra として忠実に表現できるための本質的条件は何か？という問題から出発した Rickart-Kaplansky の program は G.K. Pedersen の次の結果により決着がつけられた。

Theorem ([11]) $AW^*$-algebra が $W^*$-algebra として忠実に表現できるための必要十分条件はそれが c.a. states を十分沢山もつことである。(*)

$AW^*$-algebra は $W^*$-algebra (von Neumann algebra) の理論のその作用する Hilbert space に関係のない部分の抽象化 ($W^*$-algebra の essense) として Kaplansky により導入された。それは任意の subset の (left or right) annihilator が projection により生成される単項イデアルであるような $C^*$-algebra であり projections に対する束論, type-classification, 極分解等が成立することが知られている ([3])。それらは S.K. Berberian の本にまとめられた。([3])

Operator algebra の研究者に $AW^*$-algebra が注目されなかった大きな理由の1つは non $W^*$, $AW^*$-algebra の例が研究の対象となる

((*) もちろん Kadison, S. Sakai による別方向の特徴づけがある事も忘れてはならない。)

ほど多くなかったことであろう。1970年，Takenouchi, Dyer 等によりnon $W^*$, $AW^*$ factorが構成されたのに刺激され，J. D. M. Wrightは，任意に与えられた(separable) $C^*$-algebra (<u>unital</u>) $A$ の regular-$\sigma$-completion をつくりその completion algebra $\hat{A}$ が $A$ が simple の場合 non $W^*$, type III $AW^*$-factor になることを示した。[16, 17] この事については，数理研講究録 320 p119 を参照されたい。

これはかってに与えられた separable <u>unital</u> $C^*$-algebra $A$ から簡単な関数解析的方法で，non $W^*$, $AW^*$ algebra (monotone closed) $\hat{A}$ が構成できるという点で注目すべきであり次に問題になるのは，"$A$ の性質と $\hat{A}$ の性質とがどのように影響しあうか？" ということである。J. D. M. Wright の理論は $C^*$-algebra に <u>unit</u> を仮定したため構造論を展開する場合必要なイデアル（ほとんど unit をもっていない）の regular $\sigma$-completion を考える場合（もちろんその他にも unit のない重要な $C^*$-algebras が沢山ある）に障害になるので我にはこゝでまず <u>non unital</u> な $C^*$-algebra $A$ の "adjunction of a unit $C^*$-algebra $A_1$ の regular $\sigma$-completion について調べ $\hat{A_1}$ の構造が $A$ の構造とどのように影響しあうか，今後の理論の展開に必要と思われる "Introductory" な部分について展開してみる。個々の algebra（特に simple な $C^*$-algebra）についての議論は今後の研究に待たねばならない。

議論に入る前に unital $C^*$-algebra の regular $\sigma$-completion について

復習しておく。まずDixmierの例（[4]）から始めよう。$C[0,1]$を閉区間$[0,1]$上の複素数値連続関数全体のつくる$C^*$-algebra（加法，スカラー乗法，積は"pointwise"に入れnormはuniform topology）とし，$\mathcal{B}[0,1]$を$[0,1]$上の有界Baire関数全体のつくる$C^*$-algebra（定義は$C[0,1]$と同じ）とし，$\mathcal{J}$を$\mathcal{B}[0,1]$の元でその台が$[0,1]$のmeager subsetに入るもの全体のつくる<u>$\sigma$-ideal</u>とすると$D[0,1]=\mathcal{B}[0,1]/\mathcal{J}$は，non $W^*$, abelian $AW^*$ algebraであった。J.D.M.Wrightの理論はこの"non-commutative analogue"を考えることである。$B$を<u>unital</u> $C^*$-algebraとしたとき，$B$を非可換関数空間と考える場合その state space $X_B$上の"continuous affine function"sとして表現することはKadisonによりすでに行われていることでそれを踏襲しよう。その時，"non commutative" Baire affine function"に相当する$B$のBaire*-envelope $\mathcal{B}_B$はPedersen（Kadison）[10, 12]に従うことにする。

次にmeagerな台をもつBaire functionsのつくる$\sigma$-idealに相当する$\mathcal{J}_B$を定義するがこの場合$B_R$, $B''_R$（$B$のhermitian part，$B''$（$B$のsecond dual（[5]）のhermitian part）はそれぞれ$B$のstate space $X_B$（$\sigma(B^*,B)$-compact）上のそれぞれcontinuous，boundedなaffine functionsと見直しておくことにすれば，$M(B)\overset{\text{def}}{=}\{m\in B''$; $\{x; x\in\partial X_B; m(x)\neq 0\}$が$\partial X_B$の$\sigma(B^*,B)$-meager subsetに入る$\}$（但し$\partial X_B$は$B$のpure statesのthe spaceで，$\partial X_B\big|\sigma(B^*,B)$はBaire space）と定義することにより$M(B)$は$B''$の$\sigma$-idealである。$\mathcal{J}_B=M(B)\cap\mathcal{B}_B$

が求める $\mathfrak{B}_B$ の σ-ideal である。$\partial X_B$ が Baire space より $\mathcal{D}_B \cap B = \{0\}$
従って，$q_B$ を $\mathfrak{B}_B$ onto $\mathfrak{B}_B/\mathcal{D}_B$ の canonical map とすれば，E. Christensen（[19]）により $\hat{B} = \mathfrak{B}_B/\mathcal{D}_B$ は monotone σ-complete (unital) $C^*$-algebra で，$q_B$ は σ-homomorphism で，$q_B|B$ は injection である。

<u>Theorem</u>（[16, 17]）．($\hat{B}$, $q_B$) は B の regular σ-completion である。
i.e. 次の (1) (2) を満足する。(**)

(1) $\hat{B}$ は $q_B(B)$ を <u>σ-generate</u> する i.e. $q_B(B_h)$ を含む $\hat{B}_h$ の最小の σ-subspace が $\hat{B}_h$ である，

(2) $q_B(B_h)$ は $\hat{B}_h$ で <u>order dense</u> である i.e. $\forall x \in \hat{B}_h$ に対して，
$x = \text{l.u.b.}\{q_B(a)\,;\ q_B(a) \leq x\}$ in $\hat{B}_h$。

彼はさらに ($\hat{B}$, $q_B$) は B に対して次の意味で unique であることを示した。($C$, $\gamma$) を (1), (2) を満す別の σ-completion of B とすれば

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} \hat{B} \arrow[rr, "\exists \beta", "*\text{-isomorphism}"'] & & C \\ & B \arrow[ul, "q_B"] \arrow[ur, "\gamma"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & \end{tikzcd}$$

証明の key point は $\mathfrak{B}_B$ を $X_B$ 上の Baire function と考え Choquet-Bishop-deLeeuw-Alfsen の理論を使うものであった。

$\hat{B}$ の構造を調べる重要な道具となる性質は次の事柄である。

<u>命題</u>（[16]）．J を $\hat{B}$ の proper closed two-sided ideal とすれば，$J \cap B$ も B の proper closed two-sided ideal である。

単位元(unit)を有たない $C^*$-algebra A の場合事情が異なる。i.e.

(**) さらに B が separable なら $\hat{B}$ は σ-finite monotone complete $AW^*$-algebra である。

$A$ をその state space $X_A$ 上に表現するのではなく Quasi-state space $Q_A$ ($=\{\phi\in A^*;\ \|\phi\|\leqq 1,\ \phi\geqq 0\}$ 但し $A^*$ は $A$ の Banach space dual) 上の continuous affine functions <u>vanishing at 0</u> として表現するのが適切と思われる ($X_A$ は $\sigma(A^*,A)$-compact ではない)。$A$ の universal Hilbert space $H_A$ 上の identity operator $1_{H_A}$ は一般に $X_A$ 上 continuous だが $Q_A$ 上 lower semi-continuous (従って Borel) だが continuous ではない。しかし $A$ が separable なら countable increasing approximate identity があるので $1_{H_A}$ は $Q_A$ 上 Baire function である。今 $A$ と $1_{H_A}$ とで生成された C*-algebra を $\hat{A}$ としたとき、$\mathcal{B}_A$ と、"$\hat{A}$ を含む $\mathcal{B}(H_A)$ の最小の monotone $\sigma$-closed subalgebra $A_0^\infty$" とは一般に区別しなければならない。$Q_A$ の extreme points 全体 $\partial Q_A=\partial X_A\cup\{0\}$ に注意すると次の事が成立する。

<u>Lemma 1.</u> $A$ を non-unital な C*-algebra とすると $\{0\}$ が $\partial Q_A$ の $\sigma(A^*,A)|\partial Q_A$-topology に関して rare set となり $\partial X_A$ はこの topology に関して <u>Baire space</u> である。

$\dot{\mathfrak{M}}_A=\{m\in A'';\ \{\phi;\ \phi\in\partial X_A;\ m(\phi)\neq 0\}$ が $\partial X_A$ の $\sigma(A^*,A)$-meager set になる$\}$ とし、$\mathcal{D}_A=\mathfrak{M}_A\cap\mathcal{B}_A$, $\mathcal{J}_A=\mathfrak{M}_A\cap A_0^\infty$ とすれば、$\mathcal{D}_A$, $\mathcal{J}_A$ はそれぞれ $\mathcal{D}_A\cap A=\{0\}$, $\mathcal{J}_A\cap\hat{A}=\{0\}$ を満す $\mathcal{B}_A$, $A_0^\infty$ の $\sigma$-ideal である事がわかる。そして、E. Christensen によれば、$A_0^\infty/\mathcal{J}_A$ は monotone $\sigma$-complete C*-algebra (unital) でその canonical quotient map $\hat{q}_A$ は $\sigma$-homomorphism である。我々の最初の目的は

$A$ に抽象的に $1$ を adjoin した C*-algebra $A_1$ の J.D.M. Wright の意味の regular $\sigma$-completion $(\hat{A}_1, g_{A_1})$ が $(A_0^\infty/g_A, \widehat{g}_A)$ と同値であることを示すことにある。もちろん $\widehat{g}_A(\hat{A})$ が $A_0^\infty/g_A$ の中で上述の(1),(2)を満すことを示せばよいのだが $\sigma(A^*, A)$-compact でない $X_A$ での Choquet-Bishop-de-Leeuw の理論 ( Alfsen : compact convex sets and boundary integrals, Springer, 1971) の議論が微妙になるので Lemma 1 を使い, $\mathcal{B}_{A_1}/\mathcal{O}_{A_1}$ と $A_0^\infty/g_A$ とが上の同値性 (*) を満すような対応を直接構成することにする。

<u>Theorem 1</u> $A$ を <u>non unital</u> C* algebra とし, $(\hat{A}_1, i)$ を $A_1$ の regular $\sigma$-completion とすれば, 次の diagram が可換になるような $\hat{A}_1$ onto $A_0^\infty/g_A$ の $*$-isomorphism $\hat{\varphi}$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} \hat{A}_1 \arrow[r, "\hat{\varphi}"] & A_0^\infty/g_A \\ A_1 \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\phi"] & \hat{A} \arrow[u, "\widehat{g}_A"'] \end{tikzcd}$$

但しここに $\phi$ は $A_1$ onto $\hat{A}$ の canonical $*$-isomorphism とする。

証明の概略は次のようである。$A_1$ の regular $\sigma$-completion は $(\mathcal{B}_{A_1}/\mathcal{O}_{A_1}, g_{A_1})$ としてよい (by (*))。今 $H_1$ を $A_1$ の universal Hilbert space $\pi_1$ を $A_1$ の universal representation とすれば, $H_1 = \sum_{\tilde{\varphi}\in X_{A_1}} H_{\tilde{\varphi}}$, $\pi_1 = \sum_{\tilde{\varphi}\in X_{A_1}} \pi_{\tilde{\varphi}}$ 但し $\{\pi_{\tilde{\varphi}}, H_{\tilde{\varphi}}, \eta_{\tilde{\varphi}}\}$ を $A_1$ の $\tilde{\varphi}\in X_{A_1}$ による GNS-construction とする。$X_{A_1}$ = convex hull of $\{\tilde{\varphi}, \phi_0, \phi\in X_A\}$ 但し $\tilde{\varphi}(a+\lambda 1) = \phi(a)+\lambda$, $\phi_0(a+\lambda 1) = \lambda$ ($\forall a\in A$, $\lambda$ : complex numbers) に注意して, $\partial X_{A_1} =$

$\{\tilde{\phi}, \phi \in \partial X_A\} \cup \{\phi_0\}$ であるから $A$ の universal Hilbert space $H$ は、$H_1$ の closed subspace $\tilde{H} = \sum_{\phi \in X_A} H_{\tilde{\phi}}$ と $V\eta_{\tilde{\phi}}(a) = \eta_\phi(a)$ $(\forall a \in A, \forall \phi \in X_A)$ により定義された onto isometry $V$ を仲介として isometrically isomorphic である。$\Phi(x) = V^* P_{\tilde{H}} V$ $(\forall x \in A_1'')$ (但し $P_{\tilde{H}}$ は $\tilde{H}$ 上の orthogonal projection) により定義された map $\Phi$ は、$\Phi(\pi_1(a+\lambda 1)) = a + \lambda 1_{H_A}$ $\forall a \in A$, $\lambda$: complex numbers を満す $A_1''$ into $A''$ の $\sigma$-weakly continuous $*$-homomorphism であり この map はさらに $x(\tilde{\phi}) = \Phi(x)(\phi)$ $\forall x \in A_1''$, $\phi \in X_A$ を満す。従って Pedersen の議論から $\Phi(\mathcal{B}_{A_1}) = A_0^\infty$ である。さらに Lemma 1 に注意すると $\Phi(\mathcal{D}_{A_1}) = \mathcal{G}_A$ 且つ $(\Phi|\mathcal{B}_{A_1})^{-1}(\mathcal{G}_A) = \mathcal{D}_{A_1}$ も満している。今 $\hat{\Phi}(a + \mathcal{D}_{A_1}) = \Phi(a) + \mathcal{G}_A$ とすればこの map $\hat{\Phi}$ は定理 1 の要求をすべて満すことが確められる。

今後記号を簡単にするために、$(A_0^\infty/\mathcal{G}_A, \hat{\imath}_A)$ を $(\hat{A}, \imath)$ と表わすことにする。もし $A$ が unital ならば、この記号は Wright の記号と一致することは $A_0^\infty = \mathcal{B}_A$, $\mathcal{G}_A = \mathcal{D}_A$ より明らかであろう。

さらに一般に $A$ が strictly positive element をもつ (特に $A$ が separable) ならば前に注意したことから $A_0^\infty = \mathcal{B}_A$, $\mathcal{G}_A = \mathcal{D}_A$ で、$(\hat{A}_1, \imath)$ は $(\mathcal{B}_A/\mathcal{G}_A, \imath_A)$ と同値である。以下 $\hat{A}$ を $A$ の regular $\sigma$-completion algebra と呼ぶことにする。

次の命題は構造論をやる上で重要な道具になる ideal の regular $\sigma$-completion を考える上で有効である。

Proposition 1. $A$ を unital な $C^*$-algebra か又は non unital separable

な $C^*$-algebra とする。$I$ を $A$ の <u>separable</u> closed two-sided ideal とし、$p$ を $\mathcal{B}_A$ に於ける $I$ の open supporting central projection とする。その時、$I$ の regular $\sigma$-completion algebra $\hat{I}$ は $\hat{A}$ の direct summand $\hat{A}_z$（但し $z = \rho_A(p)$（$p$ の $\rho_A$ による canonical image で、$\hat{A}$ の central projection である））と次の意味で $*$-isomorphic である。

$$\begin{tikzcd} \hat{I} \arrow[r, "\exists \tilde{\phi}"] & \hat{A}_z \\ \tilde{I} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\phi"] & C^*(\rho_A(I), z) \ (\equiv \tilde{\tilde{I}}) \arrow[u, "\cup\!| \tilde{\tilde{I}}"'] \end{tikzcd}$$

但し $\phi$ は $\tilde{I}$ onto $\tilde{\tilde{I}}$ の canonical $*$-isomorphism で $C^*(\rho_A(I), z)$ は、$\rho_A(I)$ と $z$ とにより generate された $C^*$-algebra である。

これを証明するためには $\rho_A(C^*(I,p)_h)$ が $(\hat{A}_z)_h$ で <u>order dense</u> である事及び $\hat{A}_z$ が $\rho_A(C^*(I,p))$ を <u>$\sigma$-generate</u> することを示せばよいがこれらは次の Lemma 2 からでてくる結果である。

<u>Lemma 2</u>. 上の記号を使うことによって

$$(C^*(A, 1_H)p)_h \subset (((C^*(I, p)_h)_\sigma$$

但し $Np = \{xp \ ; x \in N\}$ $\forall N \subset \mathcal{B}(H)$, $M_\sigma = \{x ; x_n \uparrow x$ strongly in $\mathcal{B}(H)$ for some increasing sequence $\{x_n\}$ in $M_h\}$ $\forall M \subset \mathcal{B}(H)_h$ である。

Proof. $(C^*(A, 1_H)p)_h = (A_h)p + \mathbb{R}p$ 但し $\mathbb{R}$ は real numbers field とする。$\{u_n\}$ を $I$ の countable increasing approximate unit for $I$ とすれば $u_n \uparrow p$ strongly in $\mathcal{B}(H)$ に注意すれば、$\forall a \in A_h$ に対して

$$b_n = (\|a\|1_H + a)^{1/2} u_n (\|a\|1_H + a)^{1/2} - \|a\|p$$

$\in C^*(I, p)_R$ 且つ

$$b_n \uparrow (\|a\|1_H + a)^{1/2} p (\|a\|1_H + a)^{1/2} - \|a\|p = ap$$

strongly in $\mathfrak{B}(H)$ となり Lemma 2 が従がう。

上の命題を使用することにより，次の Theorem 2 が成り立つ。

<u>Theorem 2</u>. $A$ を <u>non unital</u> separable $C^*$-algebra とし，$M(A)$ を $A$ の multiplier algebra とする。その時，$M(A)$ の <u>regular $\sigma$-completion algebra</u> $\widehat{M(A)}$ は <u>monotone complete</u> $\sigma$-finite $AW^*$-algebra であり $\hat{A}$ onto $\widehat{M(A)}$ の $*$-isomorphism $\psi$ が次の diagram を可換にする如く存在する。

$$\begin{tikzcd}
\hat{A} \arrow[r, "i"] & \hat{A} \arrow[r, "\psi"] & \widehat{M(A)} \\
\mathfrak{M}(A) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i"] & \varrho_A(M(A)) \arrow[u] \arrow[r, "(\varrho_A|M(A))^{-1}", "*\text{-isomorphism}"'] & M(A) \arrow[u, "\varrho_{M(A)}"'] \\
\tilde{A} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i"] & \tilde{A} \arrow[u] \arrow[r, "i"] & \tilde{A} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

但しここに $\mathfrak{M}(A)$ は $\{x \in \hat{A}\ ;\ xa \in A,\ ax \in A\ \ \forall a \in A\}$ i.e. $\mathfrak{M}(A)$ は $A$ の $\hat{A}$ に於ける <u>idealizer</u> である。

証明の概略は次のようである。一般論より $M(A)$ は $\mathfrak{B}(H_A)$ の $A$ と $1_{H_A}$ とを含む (i.e. $\tilde{A}$ を含む) $C^*$-algebra となっており，$A$ を次のような意味で <u>essential</u> (に含む ideal) ($C^*$-algebra) である。 i.e. $M(A)$ の non-zero closed two-sided ideal $J$ で $J \cap A = \{0\}$ となるものはない。今 $P$

をAの$\mathcal{B}_{M(A)}$(Aはseparableに注意)に於けるsupporting open central projectionとするとAがessentialである事から$z_{M(A)}(p)=z=1$が示される。従って上のprojectionにより$\hat{A}$と$\widehat{M(A)}$の間に*-isomorphismがあって命題のdiagramを可換にする。又Akemann, Pedersen, Tomiyama [1]の理論を借用することにより$z_A(M(A))$がAの$\hat{A}$に於けるidealizerである事がわかる。

次にa separable C*-algebra Aのregular σ-completion algebra $\hat{A}$のcenterの構造を調べてみよう。その為に次のような命題が必要である。

Proposition 2　Aをseparable C*-algebraとすればAのBaire*-envelope $\mathcal{B}_A$はMisonou [9]の意味でweakly centralである。

このpropositionの証明はF.B. Wrightが[15]でAW*-algebraに対して用いたtechniqueのmodificationである。その"key point"は$\mathcal{B}_A$がcountably generatedである事に注意してprojectionsに関する"comparability theorem"，equivalenceに関するcountable additivity，elementsのpolar decomposition等が$\mathcal{B}_A$の中で成立することでありこれらはDavies, Kehletの論文に詳しい。

この事と，J. Vesterstrøm [18]の定理を使用することにより次の結果が成り立つ。

Theorem 3　Aをseparable C*-algebraとし，$\hat{A}$をそのregular σ-completion algebraとすれば$\hat{A}$のcenterは$\mathcal{B}_A$のcenter C

の $\mathfrak{B}_A$ onto $\hat{A}$ の canonical map $g_A\ (\equiv i)$ による canonical image である。

<u>Theorem 4</u> $A$ を Hausdorff primitive ideal space $\mathrm{Prim}\,A$ をもつ separable GCR-$C^*$-algebra とし、$A$ の ideal center (i.e. $M(A)$ の center) を $Z(M(A))$ で表わすことにすると、$\hat{A}$ の center $\hat{A}^{\natural}$ ($\cong \widehat{M(A)}$ の center) $\hat{A}^{\natural}\ (= \widehat{M(A)}^{\natural})$ は $\mathrm{Prim}\,A$ 上の bounded complex-valued Baire functions 全体のつくる pointwise definition with uniform norm による algebra modulo meager sets の $C^*$-algebra ($AW^*$) $D(\mathrm{Prim}\,A)$ と $*$-isomorphic である $\widehat{Z(M(A))}$ (ideal center の regular $\sigma$-completion) と次の意味で $*$-isomorphic である。

$$\begin{tikzcd}
\widehat{M(A)}^{\natural} \arrow[r, "\exists \hat{\phi}", "*\text{-isomorphism}"'] & D(\mathrm{Prim}\,A) \arrow[r, "\exists \psi", "*\text{-isomorphism}"'] & \widehat{Z(M(A))} \\
Z(M(A)) \arrow[u, "g_{M(A)}"'] \arrow[r, "\phi"] & C_b(\mathrm{Prim}\,A) \arrow[u, "g\ (\text{canonical map})"'] \arrow[r, "\phi^{-1}"] & Z(M(A)) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

但し $\phi$ は $Z(M(A))$ から $\mathrm{Prim}\,A$ 上の bounded continuous functions (complex-valued) 全体のつくる $C^*$-algebra 上への Dauns-Hofmann の意味の $*$-isomorphism である。

証明の概略は次のとおりである。$C$ を $\mathfrak{B}_A$ の center とすると各 $z \in C$ と $\phi \in \partial X_A$ に対して operator $\pi_\phi(z)$ は scalar $f_z(\phi)$ multiple of identity $1_{H_\phi}$ である。もし $\phi, \phi' \in \partial X_A$ が $\pi_\phi \sim \pi_{\phi'}$ (unitarily) を満せば $f_z(\phi) = f_z(\phi')$ であるから $A$ が GCR algebra であれば $\exists_1$ $\mathrm{Prim}\,A$ 上の complex-valued function $h_z$ : $h_z(\mu(\phi)) = f_z(\phi)$

$\forall \phi \in \partial X_A$ 但し $\mu$ は $\partial X_A$ onto Prim A の $\mu(\phi) = \pi_\phi^{-1}(0)$ による canonical continuous open mapping である。$z \longmapsto h_z$ なる対応は $\mathcal{C}$ から Prim A 上の complex-valued functions の the algebra の中への injection より "$z \longmapsto h_z$" により Prim A 上に topological Borel structure より大きいが Mackey の Borel structure より小さい Borel structure が入る。A は GCR であり separable であるから 2nd countable locally compact Hausdorff space Prim A 上で上の3つの Borel structures は一致するから "$z \longmapsto h_z$" は $\mathcal{C}$ onto $\mathcal{B}$(Prim A) ( Prim A 上の bounded complex-valued Baire functions のつくる the algebra ) の $*$-isomorphism で (記号で $\phi$ で表わす) その $Z(M(A))$ への restriction $\phi | Z(M(A))$ は $Z(M(A))$ onto $C_b$(Prim A) の Dauns-Hofmann の意味の $*$-isomorphism である。Prim A の any meager subset N に対して $\mu^{-1}(N)$ が $\partial X_A$ の meager subset である事に注意すれば定理の証明は abelian (classical) case の結果から示すことができる。

さらに次の事に注意しよう。

<u>Proposition 3</u> A を separable $C^*$-algebra とすると A が <u>Primitive</u> であるための必要十分条件は $\hat{A}$ が factor であることである。

これは Wright の ideal に関する結果及び $C^*$-algebra に関する Classical result ( Dixmier の教科書 ) から証明できる。

次にGCR-algebras, NGCR-algebrasのregular σ-completion algebraについて考察しよう。

まず次の例を述べる。Aをseparable infinite dimensional Hilbert space K上にactするUHF-algebraとし、B= A+C(K) (但しC(K)はK上のcompact operatorsのつくるC*-algebra)とすれば、Bはseparable C*-algebraで、$B/C(K) \cong A$である。何故ならば、$A \cap C(K) = \{0\}$だから。従って一般論により (B(K), i)がC(K)の、従ってBのregular σ-completionであるから我々は$\hat{B}$= B(K)を得る。しかしBはnot GCRである。何故ならばAがNGCR algebraだからである。しかしながら我々は次の事を示すことができる。

<u>Theorem 5.</u> Aをseparable C*-algebraとすればAが<u>GCR</u>である為の必要十分条件はAの<u>every</u> ideal quotient A/Iのregular σ-completionであるAW*-algebra $\widehat{A/I}$がtype 1であることである。

"If" partはPedersenのGCR-algebraに関するBaire *-envelopeの構造論による。逆に$\hat{A}$が<u>type 1</u> AW*-algebraとするとき、Iaを$\hat{A}$のabelian projections全体から生成されたC*-algebraとするとIaはHalpern [7]の結果より$\hat{A}$の<u>CCR-ideal</u>である。又$C^*(A, 1_H)_{\mathfrak{h}} = \hat{A}_{\mathfrak{h}}$は$\hat{A}_{\mathfrak{h}}$でorder denseより<u>$Ia \cap A \neq \{0\}$</u>。この事からAはnon-zero CCR-idealを含む。i.e. 我々はAのevery non-zero ideal quotient Aがnon-zero CCR-idealをもつことがわかりAは

GCR-algebraである。

<u>Theorem 6</u> Aを<u>separable</u> C*-algebraとするとAがNGCR-C*-algebraであるための必要十分条件はAW*-algebra $\hat{A}$ がtype 1 direct summandをもたないことである。従って，もしAがseparable NGCRならば $\hat{A}$ は如何なる<u>W*-direct summand</u>をもたないし又如何なるnon-trivial separable representationももたない。

実際もしAが如何なるtype 1 direct summandをもたないとし，Aがnon-zero GCR ideal Iをもてばtype 1 AW*-algebra $\hat{I}$ はTheorem 2から $\hat{A}$ のdirect summandとなり矛盾する。

もしもAがNGCRで $\hat{A}$ がW*-direct summand $\hat{A}z$ をもてば，$\hat{A}z$ はtype 1である。何故ならば $\hat{A}z$ のpure statesのthe spaceが<u>separable</u>だからである。しかしこの事は上の事実と矛盾する。従ってAがNGCRならば，$\hat{A}$ はW*-direct summandをもたない。

注意(1). Aがseparable C*-algebraとするとAがGCRである為の必要十分条件は $\widehat{A/J}$ がtype 1 W*-factor $\forall J \in \mathrm{Prim}A$ である。"if"の部分を証明するためにはGlimmによるNGCR-algebrasに対する"quasi matrix systems"の構成が必要である。

(2) AがseparableでNGCRならば(1)から $\exists J \in \mathrm{Prim}A$ : $\widehat{A/J}$ が<u>non W*</u>, <u>σ-finite</u> <u>monotone complete AW*-factor of type III</u> である。我々はさらに<u>separable</u> primitive NGCR-C*-algebra Aで $\forall J \in \mathrm{Prim}A - \{0\}$ に対して $\widehat{A/J}$ がtype 1 W*-factorであるが $\hat{A}$ 自身

は non $W^*$- monotone complete $\sigma$-finite type III $AW^*$-factor になるような例をあげることができる。[H. Behnke, F. Krauss, H. Leptin の論文にその例が implicit に述べてある [2]]

(3) すべての simple NGCR $C^*$-algebra <u>without unit</u> A に対して $\hat{A}$ は non $W^*$, monotone complete, $\sigma$-finite $AW^*$-factor of type III になることがわかる。実際もし $\hat{A}$ が semi-finite ならば $\hat{A}$ が faithful state をもつ事に注意して それは type I $W^*$-algebra となるはずであるが しかし この事は Theorem 6 から A が NGCR である事に反する。

次に dual $C^*$-algebra の Regular $\sigma$-completion algebra について述べよう。主な定理は次のようである。

<u>Theorem 7</u> A を separable $C^*$-algebra とすると次の3つの条件は同値である。

(i) A は dual $C^*$ algebra である,

(ii) $\widehat{M(A)} = M(A)$ $(\cong \hat{A})$,

(iii) $M(A)$ が "$C^*$-algebra として" $AW^*$-algebra である。

この定理の証明の為には次の technical lemma が必要である。

<u>Lemma 3</u> A が separable $C^*$-algebra とするとその multiplier algebra $M(A)$ の pure states の the space $\partial X_{M(A)}$ は $\sigma(M(A)^*, M(A))$-separable である。

次の Lemma は Theorem 7 の "Commutative version" である(結果、

は classical であると思われるが一応ここで述べておく)。

Lemma 4. $X$ を 2nd countable locally compact Hausdorff space とし, $C \equiv C_0(X)$ を $X$ 上の vanishing at infinity である complex-valued continuous functions 全体のつくる $C^*$-algebra とする。もしも $C$ の multiplier algebra $M(C)$ (それは $X$ の Stone-Čech の compactification $\beta X$ 上の $C(\beta X)$ と $*$-同型であるが) が $AW^*$-algebra (i.e. $\beta X$ が Stonean space) ならば, $X$ は countable discrete space である。

Theorem 7 の証明の概略は次のとおりである。(i) → (ii) → (iii) は比較的容易である。(iii) → (i) を検討しよう。$M(A)$ が $AW^*$-algebra とすれば $M(A) = M(A)e_1 + M(A)e_2 + M(A)e_3$ ($e_i \in Z(M(A))$ $i=1,2,3$), $M(A)e_1$ は finite type I, $M(A)e_2 = \{0\}$ or type $\mathrm{II}_1$ $M(A)e_3$ は properly infinite の形に分解できる。今 $M(A)e_i \equiv M_i$, $Ae_i = A_i$ ($i=1,2,3$) としよう。$e_2 \neq 0$ とすれば $M_2$ は type $\mathrm{II}_1$ $AW^*$-algebra で, non-zero essential, separable two-sided ideal $A_2$ をもつ。$\mathfrak{m}$ を $M_2$ のかってな maximal two-sided ideal とすれば $M_2/\mathfrak{m}$ は $AW^*$-factor of type $\mathrm{II}_1$ である(一般論は Berberian の Baer$*$-ring の本にでている) $M_2/\mathfrak{m}$ は not separable 且つ simple より $A_2 \subset \mathfrak{m}$. $M_2$ の "strong semi-simplicity" (F. B. Wright [15]) によれば $A_2 = \{0\}$ しかし $A_2$ が $M_2$ で strongly dense であるから これは矛盾であり $e_2 = 0$ である。さて $M_3$ の場合, もし $e_3 \neq 0$ ならば, $M_3$ は properly infinite である。$\{\pi, H_\pi\}$ を $M_3$ のかってな irreducible representation

とすれば $H_\pi$ は separable である（∵ $\pi(C^*(A_3, e_3))$ は <u>strongly dense</u> in $\pi(M_3)$）従って，$\pi$ は <u>properly infinite</u> <u>$\sigma$-finite</u>（by Lemma 3）AW*-algebra $M_3$ から $\sigma$-finite W*-algebra $\mathcal{B}(H_\pi)$ の中への *-homomorphism であるから Feldman，Fell の結果によれば（[6]）$\pi$ は $M_3$ の projections 上 <u>completely</u> <u>additive</u> である。$\pi$ はかってであったから $M_3$ が十分沢山の c.a. states をもつことになり従って $M_3$ は W*-algebra である（[11]）。Lemma 3 より $M_3$ は type I atomic W*-algebra である。$M_1$ に関しては％の構造論から Lemma 4 により $M_1$ の center が <u>atomic</u> となる。

従って以上をまとめて $\exists \{H_m\}$ : sequence of separable Hilbert spaces : $M(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}(H_m)$ である。A は separable two-sided ideal of $M(A)$ より故には $A \subset \sum_{m=1}^{\infty}{}' C(H_m)$（$\{C(H_m)\}$ の restricted direct sum）"as a C*-subalgebra" となり A は dual である。

注意．$M(A)$ が W*-algebra なら A が dual になることは [1] で証明された。

次に C*-algebra の "regular $\sigma$-completion closure" が今までの "universal weak closure" とか "weak closure" と大いに異なった点について若干述べて終りとしたい。

(1) C*-algebras（一応 separable は仮定する）A と B との間の surjective homomorphism は $\hat{A}$ onto $\hat{B}$ の surjective homomorphism に extend できるか？　答は一般に "no!" である。

前にも述べたが $A$ を separable な infinite dimensional Hilbert space $K$ 上に act する UHF-algebra とし, $B = A + C(K)$ とする。$\varrho$ を $B$ onto $B/C(K)$ ($\cong A$ via a $*$-isomorphism $\phi$) の canonical map とし, $\pi = \phi \circ \varrho$ とすれば, $\pi$ は $B$ onto $A$ の surjective homomorphism である。その regular $\sigma$-completion algebra $\hat{B} = \mathcal{B}(K)$ で, $\hat{A}$ は non $W^*$, type III $AW^*$-factor である。我々は $\hat{B}$ onto $\hat{A}$ の如何なる $*$-homomorphism ももたないことがわかる。もしもそのような $\Phi$ があったとすれば, $\hat{B}$ は $\sigma$-finite properly infinite 且つ $\hat{A}$ は $\sigma$-finite であるから Feldman and Fell によれば, $\Phi$ は completely additive on projections of $\mathcal{B}(K)$ $(=\hat{B})$ で, $\Phi^{-1}(0)$ が closed two-sided ideal of $\mathcal{B}(K)$ に注意すると $\Phi^{-1}(0) = \{0\}$ or $\pi^{-1}(0) = C(K)$ である。もしも $\Phi^{-1}(0) = C(K)$ ならば $\Phi^{-1}(0)$ はすべての finite rank の projections を含み $\Phi$ が completely additive であり従って $1_K \in C(K)$ i.e. $K$ が infinite dimensional に矛盾する。もし $\Phi^{-1}(0) = \{0\}$ ならやはり $\mathcal{B}(K)$ と $\hat{A}$ の性質に矛盾する。

(2) $A, B$ any $C^*$-algebras で $A \subset B$ (as a $C^*$-subalgebra) とするとき, $\hat{A}$ は $\hat{B}$ の中に $C^*$-subalgebra として embed する事ができるか?

一般にはやはりできない。上の例を考えてみよう。$\hat{A}$ は $\sigma$-finite, non $W^*$, type III $AW^*$-factor で, $\hat{B} \cong \mathcal{B}(K)$ with separable Hilbert space $K$ である。もし $\hat{A}$ が $\mathcal{B}(K)$ $(=\hat{B})$ に $C^*$-subalgebra として

embedできたとすると，$\hat{A}$がnon-trivial separable representationをもつことになる。しかし$\hat{A}$は"very big" i.e. 如何なるnon-trivial separable representationをもたないので矛盾する。従って$\hat{A}$は$\hat{B}$にC*-subalgebraとしてはembedできない。

文献表

[1] C. A. Akemann, G. K. Pedersen and J. Tomiyama, Multipliers of C*-algebras, J. Functional Anal., 13(1973), 277-301.

[2] H. Behnke, F. Krauss and H. Leptin, C*-algebren mit geordneten Ideal Folgen, J. Functional Anal., 10(1972), 204-211.

[3] S. K. Berberian, Baer*-rings, Grundl. Math. Wiss., 195(1972), Springer, Berlin.

[4] J. Dixmier, Sur certains espaces considérès par M. H. Stone, Summa Brasil. Math., 11(1951), 151-182.

[5] ――――――, Les C*-algebres et leurs representations, Paris Gauthier-Villars, 1964.

[6] J. Feldman and J. M. G. Fell, separable representations of rings of operators, Ann. of Math., 65(1957), 241-249.

[7] H. Halpern, The maximal GCR-ideal in an AW*-algebra, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966), 906-914.

[8] I. Kaplansky, Projections in Banach algebras, Ann. of Math., 53(1951), 235-249.

[9] Y. Misonou, On a weakly central operator algebras, Tôhoku Math. J., 4 (1952), 194–202.

[10] G. K. Pedersen, On weak and monotone closures of $C^*$-algebras, Comm. Math. Phys., 11 (1969), 221–226.

[11] ______________, Operator algebras with weakly closed abelian subalgebras, Bull. London Math. Soc., 4 (1972), 171–175.

[12] ________________, Applications of weak *- semi-continuity in $C^*$-algebra theory, Duke Math. J., 39 (1972), 431–450.

[13] K. Saitô, A non-commutative theory of integration for a semi-finite $AW^*$-algebra and a problem of Feldman, Tôhoku Math. J., 22 (1970), 420–461.

[14] ___________, $AW^*$ algebras with monotone convergence property and examples by Takenouchi and Dyer, Tôhoku Math. J., 31 (1979), 31–40.

[15] F. B. Wright, A Reduction for algebras of finite type, Ann. of Math., 60 (1954), 560–570.

[16] J. D. M. Wright, Regular $\sigma$-completions of $C^*$-algebras, J. London Math. Soc., 12 (1976), 299–309.

[17] ________________, Wild $AW^*$-factors and Kaplansky-Rickart algebras, J. London Math. Soc., 13 (1976), 83–89.

[18] J. Vesterstrøm, On the homomorphic image of the center

of a C*-algebra, Math. Scand., 29 (1971), 134-136.

[19] E. Christensen, Non-commutative integration for monotone sequentially closed C*-algebras, Math. Scand., 31 (1972), 171-190.

[20] E. T. Kehlet, On the monotone sequential closure of a C*-algebra, Math. Scand., 25 (1969), 59-70.

以上