

定数係数偏微分方程式の解
の波束について

京大数理解析研 西和田公正

§1. 序

$n+1$ 変数 $(z, \xi) = (z, \xi_1, \dots, \xi_n)$ の多項式 $P(z, \xi)$ z 次 l 形のものを考える。

$$(1) \quad P(z, \xi) = z^l + \sum_{j=1}^l a_j(\xi) z^{l-j},$$

$l = 2, \dots, l \geq 1$ とする。 $(D_t, D_x) = -i \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ と書くことにし、偏微分作用素 $P(D_t, D_x)$ が与えられる。

今各次方程式

$$(2) \quad P(D_t, D_x) \psi(x, x) = 0$$

を考えることにする。(2) が有限伝播性を表わす、自明

でない解 ψ をもつば、 P のある既約因子は弱双曲型 (主部が双曲型であるという意味で) でなければならぬ、ということが古典的結果としてよく知られている。正確に述べると、次の定理がなりたつ。(John [2], Hörmander [1, Th. 5.7.1])

定理 1 $\Omega = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} ; a < t < b, x \in \mathbb{R}^n \}$ とある。方程式 (2) が、自明でない $\text{supp } \psi$ が Ω の中で有界となる C^∞ 解 $\psi(t, x)$ をもつ為の必要十分条件は $P(\tau, \xi)$ のある非定数因子が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に弱双曲型となることである。

本研究の出発点は、この定理と Schrödinger 作用素 $L = D_t - \Delta$ を含むぐさのままで拡張できるのかと考えたことにある。この場合、もちろん $\text{supp } \psi$ 云々という部分は変更する必要がある。次の例を考えてみよう。

Gauss 分布を初期値とする自由空間での Schrödinger 方程式の解を $u(t, x)$ とおく。RPS.

$$Lu = 0, \quad u(0, x) = \exp\left(-\sum \frac{x_j^2}{2a_j}\right), \quad a_j > 0$$

$u \in C^\infty(\mathbb{R}_t; \mathcal{S}'_x)$ という条件を課せば、Fourier 変換を用いる計算により、

$$u(t, x) = \prod_1^n \left(\frac{a_j}{a_j + 2ti} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left(- \sum \frac{x_j^2}{2(a_j + 2ti)} \right)$$

となる。従って、

$$(3) \quad |u(t, x)| \leq \exp \left(- \sum \frac{1}{2} \left(\frac{x_j}{\Delta_j} \right)^2 \right),$$

$$\Delta_j = \Delta_j(a_j, t) = \left(a_j + \frac{4t^2}{a_j} \right)^{1/2},$$

という評価が得られる。(3) は (t, a_j) に依存した波束の挙動を表わしている。特に興味深いのは、 $t \neq 0$ を固定し、 $a_j \rightarrow 0$ としたとき $\Delta_j \rightarrow \infty$ となることである、i.e. 初期値の波束の広がり小さいほど、尤も後の波束が広がる。このような現象は熱方程式の場合には起こらない。また双曲型方程式の場合にも起こらない。

(但し、この場合、波束の広がりとは別の広がりでおまかえる。)

さて、 L の Cauchy 問題の基本解を $E(t, x)$ とおくと $u = E *_{x_2} \exp \left(- \sum \frac{x_j^2}{2a_j} \right)$ とかける。(3) を E の性質と考え、次のような問題をたててみる：方程式(2)が自明でない C^∞ 解 $\psi(t, x)$ をもつ。更に $|\psi * \exp \left(- \sum \frac{x_j^2}{2a_j} \right)|$ が (3) と似た不等式を満足するとせよ。 P はどのような

代数的条件をみたすか?

この問題に対する結果を記すためには若干の準備を要する。

まず (1) の型をみたす P に対し、有理数 p を

$$(24) \quad p = \max_j (\deg a_j(\xi) / j)$$

により定める。多項式 $a_j(\xi)$ の pj 次の各項部分を $a_j^0(\xi)$ と書き、 P の (2 方向に重みをかけた) 主部を

$$(5) \quad P^0(z, \xi) = z^l + \sum_1^l a_j^0(\xi) z^{l-j}$$

により定義する。

定義 $\alpha > 0$ とする。 P が次の 2 条件の 1) だけか
をみたす時、 $P \in \text{weak } \alpha\text{-evolution polynomial}$ と
よぶ。

$$(i) \quad \alpha > p$$

$$(ii) \quad \alpha = p \text{ かつ 方程式 } P^0(z, \xi) = 0 \text{ は任意の } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ に対して実根のみをもつ。}$$

注意 P が $\text{weak } p\text{-evolution polynomial}$ となるのは
 p が整数のとすのみであることが容易に示される。

また, weak ϕ -1-evolution poly. は 弱双曲型方程式に
他ならない。

次に、先程の問題の中で '(3) に似た' と不正確に
述べた部分は、以下のように捉えることも可能である。

(6)
$$\psi(x, x) \in C^\infty(\Omega) \cap C^{l-1}((a, b); \mathcal{D}'_x).$$

ある定数 $A_j > 0$, $c_j > 0$, $0 < \varepsilon \leq 1$, $m \geq 0$ が存在し
不等式

$$\begin{aligned} & |D_x^\alpha D_t^k \psi(x, x) *_{x'} \exp\left(-\sum_1^n \frac{x_j^2}{2a_j}\right)| \\ & \leq M_2 \prod_{j=1}^n \delta_j^m \exp\left(\sum_1^n \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j}{\delta_j}\right)^2 + c_j \left|\frac{x_j}{\delta_j}\right|^{2-\varepsilon}\right)\right), \\ & \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall a_j > 0, \quad (j=1, \dots, n), \quad t = t_1, t_2, \\ & k = 0, \dots, l-1, \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $A_j = A_j(a_j, A_j) = \left(a_j + \frac{4A_j^2}{a_j}\right)^{\frac{1}{2}}$ 。
 t_1, t_2 は $a < t_1 < t_2 < b$ ε に対して固定された
2点。

但し、前の E (L の基本解) に対し $E = \psi$ とおくと
き、(6) は成立しなくなる。一つの理由として $\psi \in C^\infty$

であるが E は C^∞ でないことがあげられる。もし
 $\psi = E *_{\mathbf{x}} \exp(-\sum |x_j|^{2-\epsilon})$ ($\epsilon > 0$) とおけば (6) が
 成り立つ。すなわち (6) は Gauss 分布を初期データと
 する Cauchy 問題ではなく、若干修正したデータ
 (e.g. Gauss 分布 * $\exp(-\sum |x_j|^{2-\epsilon})$) に対応する
 解の挙動と解釈することも可能である。もちろんこの
 修正により波束の形はあまり変化しない。

定理 2 方程式 (2) が不等式 (6) を満たす、自明で
 ない解 ψ をもつための必要十分条件は $P(z, \xi)$ の
 ある非定数因子 $Q(z, \xi)$ が存在し、各 $Q(z, \theta_1 \xi_1, \dots, \theta_n \xi_n)$,
 $\theta_j^4 = 1$ が weak 2-evolution polynomial となること
 である。

注意 双曲型方程式のクラスは、つねに $p \leq 1$ である。
 すなわち、定理 2 の代数的条件を満足する。しかし $p < 2$
 より、(6) における定数 $A_j > 0$ は $1 < s$ より小さく
 とることができた。すなわち見かけ上 ' $A_j \rightarrow \infty$ when
 $a_j \rightarrow 0$ ' とするが、実際には ψ の波束は広がら
 ない。

今までは方程式 (2) を、時間 t に関して有界な領域 Ω で考えてきた。次に全空間 \mathbb{R}^{n+1} での波束の運動と P の関係を調べてみる。($d=1$ の場合の結果しか得られていない。)

ある '伝播錐' の外側で指數的に 2 次の order で減衰している解 ψ を考える。正確に述べると、

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \psi(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}), \text{ ある正定数 } a, A, c, \\ 1 \leq \rho < 2 \text{ が存在し、不等式} \\ |D_x^\alpha D_t^\beta \psi(t, x)| \leq M_\alpha \exp(-L_\alpha(|x| - A|t|) + c|t|^\rho), \\ \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \text{が任意の } \alpha \text{ と } \beta = 0, \dots, \ell-1 \text{ に対して成り立つ。} \\ \text{ここで } L_\alpha(\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \Delta^2, & \Delta \geq 0, \\ 0, & \Delta < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

定理 3 方程式 (2) が (7) にあつた自明でない解 ψ をもつたものの必要十分条件は P のある非定数因子が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に弱双曲型と存在することである。

注意 もし P のある因子が d -hyperbolic (Larsson [] の意味で) ならば、(7) において $\rho = 2d/(2d-1)$

となるような自明でない解 ψ が存在することがわかる。たがしこの逆も成り立つのであろうが、今のところは未解決である。

なお、定理 1.2.3 は外観こそ大分異なるが、本質的には同一の類型に属している。このことは、次節で述べるように、Fourier 変換してみることによりわかる。

§2 証明の方針

まず定理 2 から始めよう。 $\psi(x, y)$ を x 変数に関して Fourier 変換したものを $u(x, \zeta)$ と書くことにする。評価 (6) は次のようにいい換えられる： $D_x^k u(x, \zeta)$ ， $k=0, 1, \dots, \ell-1$ は ζ に関する整関数となり、不等式

$$|D_x^k u(x, \zeta)| \leq M'_N (1+|\zeta|)^{-N} \prod (a_j^{-\frac{1}{2}} \rho_j^{2+m}) \times \\ \exp\left(\sum\left(\frac{a_j}{2}(\zeta_j^2 - \eta_j^2) + \frac{1}{2}|\rho_j \eta_j|^2 + c_j' |\eta_j|^{2-\varepsilon}\right)\right), \\ N=0, 1, \dots,$$

を求めず、左辺は $a_j > 0$ に依存しないゆえ $a_j = 2A_j \left(\frac{1+\zeta_j^2}{1+\eta_j^2}\right)^{1/2}$ とおくことにする。 N は十分大きくとり、固定すると

$$(8) \quad |D_t^k u(t, \zeta)| \leq M \exp(\bar{\Phi}(\zeta)),$$

$$\bar{\Phi}(\zeta) = \sum_1^n 2A_j |\zeta_j| |\eta_j| + o(|\zeta|^2),$$

となる。今 $\bar{\Phi}$ の主部を $\phi(\zeta) = \sum 2A_j |\zeta_j| |\eta_j|$ とおくと、 $\phi(\theta_1 \zeta_1, \dots, \theta_n \zeta_n) = 0$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$, $\theta_j^2 = 1$ が成立する。ことに注意する。また u は t に関する常微分方程式

$$(9) \quad P(D_t, \zeta) u(t, \zeta) = 0, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

の解である。

補題として 2 次の定理が必要となる。

定理 4 $\alpha > 0$ と P に関する次の 2 条件は同値である。

(a) 方程式 (9) の自明でない解 $u(t, \zeta)$ に対して以下の性質をみたすものが存在する。

$D_t^k u(t, \zeta)$, $0 \leq k < \ell$, は ζ の整関数となり

$$(10) \quad |D_t^k u(t, \zeta)| \leq M \exp(\bar{\Phi}_\alpha(\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad 0 \leq k < \ell$$

をある2点 $t = t_1, t_2$ ($a < t_1 < t_2 < b$) で与える。
 ここで \mathfrak{E}_α ((8)とは無関係に) は ζ の連続関数
 ≥ 0 であり、ある α 次の正非斉次連続関数 ϕ_α が
 与わたり条件

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_\alpha(\zeta) - \phi_\alpha(\zeta) &= o(|\zeta|^\alpha), \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \\ \phi_\alpha(0, \zeta) &= 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad \arg \theta = \frac{k}{\alpha} \pi, \quad k=0, 1, \dots \end{aligned}$$

を与える。

(6) P のある非定数因子は weak α -evolution
 polynomial となる。

この定理を (8) に適用することにより求める結論
 が得られる。また $\alpha=1$ とかくことにより定理1の証明
 にも使える。定理4の証明は基本的には John [2] と
 同様に行なえる。

定理3についても、同様に ψ の Fourier 変換ととり
 方程式 (9) の考察に帰着させる。この場合に、定理4
 にあたるのは下記の命題である。

定理5 $\alpha > 0$, P に関する下記の2条件は同値
 となる。

(a) 方程式 (9) の自明でない解 $u(t, \zeta)$ で以下の性質をみたすものが存在がする。

$D_t^k u(t, \zeta)$, $0 \leq k < l$, は ζ の整関数となり、不等式

$$|D_t^k u(t, \zeta)| \leq M \exp(c|\zeta|^{2\beta} + h(t) + |t| \Phi_\alpha(\zeta)),$$

$$(t, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \quad j = 0, \dots, l-1.$$

ここで $c, M, \beta > 0$, $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Z}$, h, Φ_α は連続, ≥ 0 , であり,

$$h(t) = o(t^2), \quad |t| \rightarrow \infty$$

$$\Phi_\alpha(\zeta) - \phi_\alpha(\zeta) = o(|\zeta|^\alpha), \quad |\zeta| \rightarrow \infty$$

をみたす。ここで ϕ_α はある α 次正斉次連続関数であり,

$$\phi_\alpha(0\zeta) = 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad \arg 0 = \frac{k}{\beta} \pi, \quad k = 0, 1, \dots,$$

をみたす。

(b) P のある非定数因子は weak α -evolution poly. となる。

以上の諸定理の証明の詳細、またこの話題に関連した他の結果については [4], [5] にあずかることにする。

References

1. Hörmander, L.: Linear Partial Differential Operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.
2. John, F.: Non-admissible data for differential equations with constant coefficients. Comm. Pure Appl. Math. 10, 391-398(1957).
3. Larsson, E.: Generalized hyperbolicity. Ark. Mat. 7, 11-32(1967).
4. Nishiwada, K.: On weak evolution operators with constant coefficients and spreading of wave packets. Proc. Japan Acad. 55A, 41-44(1979).
5. Nishiwada, K.: Characterization of Partial Differential Operators with Constant Coefficients in Terms of the Wave Packet Spreading for Solutions. (to appear)