数理解析研究所講究録
357巻 1979年 86-96

弱双曲系の基本解について

大阪府大．総科　新開謙三
谷口和夫

序．

最近重複度の変る双曲型作用素の基本解並びにparametrixが多くの研究者によって構成されている．この報告では，初期面 $t=0$ で特性根が重なる一階双曲系

$$L = D_t - t^{\ell}\mathcal{D}^0(t) + F^0(t) \tag{1}$$

の基本解をフーリエ積分作用素を用いて構成する．ここで $D_t = -i\partial/\partial t$，$\ell$ は自然数であり，$\mathcal{D}^0(t)$ は次の形をしている作用素である．

$$\mathcal{D}^0(t) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,0}(t,x,D_x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{m,0}(t,x,D_x) \end{pmatrix} \tag{2}$$

$\lambda_{j,0}(t,x,\xi) \in \mathcal{B}_t(S^1)$, real-valued

且

$$|\lambda_{j,0}(t,x,\xi) - \lambda_{k,0}(t,x,\xi)| \geq c_0\langle\xi\rangle \qquad (j \neq k) \tag{3}$$

$$(c_0 > 0,\quad \langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}).$$

又，$F^0(t)$ は $1/t$ に似たふるまいをする擬微分作用素である。

この報告では，作用素(1)の基本解を構成することと，Alinhac [1], Nakamura [3], Uryu [6], Yoshikawa [7] 等によって扱われた高階の双曲型作用素が上の双曲系に帰着できることを筆者の論文[4]に沿って解説する。続いて，特性根が $t^\ell g(x)\lambda_{j,0}(t,x,\xi)$ $(g(x) \geq 0,\ g \in \mathcal{B})$ であるような双曲型作用素が，上に述べた方法と同様の方法で構成できることを筆者の論文[5]に沿って解説する。

§1. 一階双曲系の基本解の構成.

以下自然数 ℓ を固定し，これを用いて次の擬微分作用素のクラスを導入する。

定義 1.1. i) C^∞-関数 $a(t,x,\xi)$ が次の条件をみたすとき，$S[m, m']$ に属すという。

(1.1) $\quad |\partial_t^\gamma a_{(\beta)}^{(\alpha)}(t,x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}(t+\langle\xi\rangle^{-\omega})^{m'-\gamma}.$

ここで，$a_{(\beta)}^{(\alpha)} = \partial_\xi^\alpha D_x^\beta a$, $\partial_\xi^\alpha = (\partial/\partial\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial\xi_n)^{\alpha_n}$, $D_x^\beta = (-i)^{|\beta|}\partial_x^\beta = (-i)^{|\beta|}(\partial/\partial x_1)^{\beta_1}\cdots(\partial/\partial x_n)^{\beta_n}$, $\langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}$, $\omega = 1/(\ell+1)$ である。

ii) C^∞-関数 $a(t,s;x,\xi)$ が次の条件をみたすとき，$S[m, m', m'']$ に属すという

$$(1,2)\qquad |\partial_t^{\gamma}\partial_s^{\gamma'} a_{(\beta)}^{(\alpha)}(t,s;x,\xi)| \leqq C_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'}\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}(t+\langle\xi\rangle^{-\omega})^{m'-\gamma} \times (s+\langle\xi\rangle^{-\omega})^{m''-\gamma'}.$$

iii) $\mathcal{H}^m = \bigcap_N S[m-N, -(l+1)N]$,

$\tilde{\mathcal{H}}^m = \bigcap_N S[m-N, -(l+1)N, 0]$

とおく．

さて，(2), (3) をみたす作用素 (1) を考える．この作用素の特性根は $\lambda_j(t,x,\xi) = t^l \lambda_{j,0}(t,x,\xi)$, $j=1,\cdots,m$ の形をしていて，$\mathcal{B}_t(S^1)$ に属している．（ただし $S^\nu = S^\nu_{1,0}$ は通常の擬微分作用素の表象のクラス）．したがって，これに対応する相関数 $\phi_j(t,s;x,\xi)$ は $J_j(t,s;x,\xi) = \phi_j(t,s;x,\xi) - x\cdot\xi$ が $\mathcal{B}_t(S^1)$ に属するように求まる．以上の準備のもとで我々の主定理を述べる．

定理 1.2. 一階双曲系 (1) を考える．ここで $\mathcal{A}^0(t)$ は (2) の形をしており，(3) をみたしているとする．さらに低階 $F^0(t)$ は $S[0,-1]$ に属するとする．このとき，十分小なる T_0 をとると，$[s,t]$（ただし $0 \leqq s \leqq t \leqq T_0$）での双曲系 L の基本解 $E(t,s)$:

$$(1.3)\qquad \begin{cases} L E(t,s) = 0 & \text{in } [s,t], \\ E(s,s) = I \end{cases}$$

が次の形で求まる．

$$(1.4)\qquad E(t,s) = \sum_{j=1}^{m} E_{j,\phi_j}(t,s).$$

ここで，$E_{j,\phi_j}(t,s)$ は相関数が $\phi_j(t,s;x,\xi)$ であるようなフーリエ積分作用素の行列で，その表象 $e_j(t,s;x,\xi)$ は

$\bigcap_{\varepsilon>0} S[0, a+\varepsilon, -(a+\varepsilon)]$ に属する．ただし a は，F^0 の対角成分 $\{f_j^0(t,x,\xi)\}_{j=1}^m$ に対し

(1.5) $$a = \lim_{(t,K)\to(0,\infty)} \sup_{j,x,t\langle\xi\rangle^{\omega}=K} \{(t+\langle\xi\rangle^{-\omega}) \operatorname{Im} f_j(t,x,\xi)\}$$

で定義されるものである．

証明は二段階に分けて行なわれる．

［第1段階］$\mathcal{H}^{\omega}$ の元を法として L を対角化する．これは Kumano-go [2] の方法により行なわれ，次の結果が得られる．

<u>命題 1.3.</u> 作用素 L を定理 1.2 をみたす作用素とする．このとき，$S[0,0]$ に属す擬微分作用素 $N(t)$ で次をみたすものが存在する．

(1.6) $$|\det \sigma(N(t))| \geqq C_0 > 0,$$

(1.7) $$L N(t) \equiv N(t)\tilde{L} \qquad \mathrm{mod}\ \mathcal{B}_t(S^{-\infty}),$$

且 $\tilde{L}$ は次の形をしている．

(1.8) $$\tilde{L} = D_t - t^l \mathcal{D}^0(t) + F(t) + R(t),$$

(1.9) $\sigma(F(t))$ は対角行列でその成分は $S[0,-1]$ に属す．

(1.10) $$\sigma(F(t)) - \begin{pmatrix} f_1^0(t,x,\xi) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_m^0(t,x,\xi) \end{pmatrix} \in S[-\omega,-2] + S[0,0],$$

(1.11) $\sigma(R(t))$ は $\mathcal{H}^{\omega}$ に属する．

［第２段階］ $\tilde{L}$の近似基本解 $\tilde{E}(t,s)$ 即ち

$$\begin{cases} \tilde{L}\tilde{E}(t,s) \in \mathcal{B}_t(S^{-\infty}), \\ \tilde{E}(s,s) = I \end{cases}$$

をみたす作用素 $\tilde{E}(t,s)$ を構成する．まず

$$(1.12) \qquad \tilde{L}_0 = D_t - t^l \mathcal{D}^0(t) + F(t)$$

とおく．すると これは対角形の作用素ゆえ transport equation を解くことにより，$\tilde{L}_0$の近似基本解 $\tilde{E}^0(t,s)$ が容易に構成でき，$\tilde{E}^0(t,s)$ は次の形をもつ．

$$(1.13) \qquad \tilde{E}^0(t,s) = \begin{pmatrix} \tilde{E}^0_{1,\phi_1}(t,s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{E}^0_{m,\phi_m}(t,s) \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\tilde{E}^0_{j,\phi_j}(t,s)) \in \bigcap_{\varepsilon>0} S[0,\ a+\varepsilon,\ -(a+\varepsilon)].$$

次にこの $\tilde{E}^0(t,s)$ を用いて $\tilde{L}$の近似基本解 $\tilde{E}(t,s)$ を

$$(1.14) \qquad \tilde{E}(t,s) = \tilde{E}^0(t,s)(I + Q(t,s)) \qquad (Q(s,s) = 0)$$

の形で求める．するとこの $Q(t,s)$ は

$$(1.15) \qquad \begin{cases} D_t Q(t,s) = \tilde{R}(t,s)Q(t,s) + \tilde{R}(t,s), \\ \tilde{R}(t,s) = -\tilde{E}^0(t,s)^{-1} R(t) \tilde{E}^0(t,s) \end{cases}$$

をみたせばよいことがわかる．相関数 $\phi_j(t,s;x,\xi)$ が $\phi_j(t,s;x,\xi) - x\cdot\xi \in S[1,\ l+1,\ 0]$ を満足することに注意すると，$\tilde{R}(t,s)$ は表象が $\tilde{\mathcal{K}}^\omega$ に属す擬微分作用素であることがわかる．したがって (1.15) をみたす $Q(t,s)$ が漸近展開 $\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(t,s)$, $\sigma(Q_\nu(t,s))$

$\in S[-\nu,0,0]$ の形で求まり，これにより $\tilde{L}$ の近似基本解 $\hat{E}(t,s)$ が求まる．以下 $\hat{E}(t,s)$ を $N(t)$ でもどして，いつものように $\mathcal{B}_t(S^{-\infty})$ に表象をもつ擬微分作用素を核とする積分方程式を解くことにより，L の基本解が求まる．

§2. 高階双曲型作用素について (I).

この節では次の双曲型作用素を考える．

$$(2.1)\qquad L_1 = D_t^m + \sum_{j=1}^m a_j(t,x,D_x)D_t^{m-j}.$$

ここで

$$(2.2)\qquad a_j(t,x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq j} t^{\kappa(j,|\alpha|)} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha,$$

$$a_{j,\alpha} \in \mathcal{B}([0,T]\times R^n_x),\quad \kappa(j,\nu) = \max(\nu(l+1)-j,0)$$

とする．今 $a_j^0(t,x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha$ とおき，これを用いて次の条件を考える．

(C) 方程式

$$(2.3)\qquad P(\lambda) = \lambda^m + \sum_{j=1}^m a_j^0(t,x,\xi)\lambda^{m-j} = 0$$

は実根 $\lambda_{j,0}(t,x,\xi)$, $j=1,\cdots,m$ をもち，$\lambda_{j,0}\in\mathcal{B}_t(S^1)$ 且 (3) をみたす．

<u>定理2.1.</u> (2.1) の形をもつ作用素 L_1 を考え，条件 (C) をおく．このとき，作用素 L_1 は (1) の形をもつ双曲系に帰着され，定理1.2 で述べられた α は

$$(2.4)\qquad a=\sup_{x,\xi,j}\left\{\mathrm{Im}\frac{G(\lambda_{j,0})}{\partial_\lambda P(\lambda_{j,0})}-\frac{\ell\lambda_{j,0}\partial_\lambda^2 P(\lambda_{j,0})}{2\partial_\lambda P(\lambda_{j,0})}+\ell(m-1)\right\}_{t=0}$$

で与えられる．ここで $P(\lambda)$ は (2.3) で定義されたものであり，$G(\lambda)$ は

$$(2.5)\qquad G(\lambda)=\sum_{j=2}^{m}\sum_{|\alpha|=j-1}a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha\lambda^{m-j}$$

という形をもつ．

証明の概略．$\chi\in C_0^\infty(R_t^1)$ を $\chi(0)\neq 0$ なる関数として，

$$(2.6)\qquad h(t,\xi)=t^\ell\langle\xi\rangle+\langle\xi\rangle^\omega\chi(t\langle\xi\rangle^\omega)\qquad(\in S[1,\ell])$$

とおく．この h を用いて

$$u\longmapsto(h^{m-1}u,\ h^{m-2}D_tu,\ \cdots,\ D_t^{m-1}u)$$

の形で方程式系にする．今

$$A=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ 0&\cdots&0\\ a_m&a_{m-1}\cdots&a_1\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}0&-1&&0\\ &\ddots&\ddots&\\ &&\ddots&-1\\ 0&&&0\end{pmatrix},\qquad H(t)=\begin{pmatrix}h^{1-m}&&0\\ &h^{2-m}&\\ &&\ddots\\ 0&&&h^{-1}&\\ &&&&1\end{pmatrix}$$

とおくと，方程式系にされた作用素 L_2 は

$$(2.7)\qquad L_2=D_t+H(t)^{-1}AH(t)+H(t)^{-1}YH(t)+H(t)^{-1}H_t(t)\qquad(\sigma(H_t(t))=D_t\sigma(H(t)))$$

$$=D_t+AH(t)+\begin{pmatrix}(1-m)h_th^{-1}&-h&&0\\ &\ddots&\ddots&\\ 0&&-h_th^{-1}&-h\\ 0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

となる．

次に対角化作用素 $N_0(t)$：

$$(2.8)\qquad \sigma(N_0(t)) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_{1,0}/\langle\xi\rangle & \cdots & \lambda_{m,0}/\langle\xi\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ (\lambda_{1,0}/\langle\xi\rangle)^{m-1} & \cdots & (\lambda_{m,0}/\langle\xi\rangle)^{m-1} \end{pmatrix}$$

を考え，

$$(2.9)\qquad L_3 = D_t + N_0'(t)\left\{AH(t) + \begin{pmatrix} (1-m)h_t h^{-1} & -h & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -h_t h^{-1} & -h \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} N_0(t)$$

$$+ N_0'(t) N_{0t}(t) \qquad (\sigma(N_{0t}(t)) = D_t\sigma(N_0(t)))$$

とおく．ここで $N_0'(t)$ は $N_0(t)$ の parametrix．すると

$$(2.10)\qquad L_2 N_0(t) \equiv N_0(t) L_3 \quad \mathrm{mod}\ \mathcal{B}(S^{-\infty})$$

となり，L_3 が (1) の形になることがわかる．最後に $\sigma(N_0'(t))$ の (k,m) 成分の主部が $\langle\xi\rangle^{m-1}/\partial_\lambda P(\lambda_{k,0})$ になること等を使うと，(2.4) が証明できる．

§3. 高階双曲型作用素について (II).

$g(x) \in \mathcal{B}(R^n)$ とし，$g(x) \geqq 0$, $0 \leqq \delta \leqq 1/2$ なる δ に対して

$$(3.1)\qquad |\partial_x^\beta g(x)| \leqq C_\beta\, g(x)^{1-\delta|\beta|} \qquad (\delta|\beta| \leqq 1)$$

をみたすとする．この $g(x)$ を用いて特性根が $t^\ell g(x)\lambda_{j,0}(t,x,\xi)$, $j=1,\cdots,m$ となる双曲型作用素を考える．第2節で考えた作用素 (2.1) について今度はその係数 $a_{j,\alpha}$ が次の (3.2), (3.3)

をみたすとする。

(3.2) $$\sum_{|\alpha|=j} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^{\alpha} = g(x)^{j} a_j^0(t,x,\xi), \quad a_j^0(t,x,\xi)\in \mathcal{B}_t(S^{j}).$$

$|\alpha|<j$ に対し

(3.3) $$|\partial_t^{\gamma}\partial_x^{\beta} a_{j,\alpha}(t,x)| \leqq C\, g(x)^{|\alpha|-\delta|\beta|} \qquad (\delta|\beta|\leqq|\alpha|).$$

このとき次の定理が成立する。

<u>定理3.1.</u> (3.2), (3.3) をみたすような係数 $a_{j,\alpha}(t,x)$ をもった双曲型作用素(2.1) を考える。さらに条件(C) が(3.2)で定めた a_j^0 に対して成立すると仮定する。このとき T_0 を十分小にとると, $0\leqq s\leqq t\leqq T_0$ に対し L_1 の基本解 $E_j(t,s)$, $j=1,2,\cdots,m$:

(3.4) $$\begin{cases} L_1 E_j(t,s)=0, \\ D_t^{k-1}E_j(s,s)=\delta_{j,k} \end{cases}$$

が次の形で求まる。

(3.5) $$E_j(t,s)=\sum_{\nu=1}^{m} E_{j,\nu,\phi_\nu}(t,s).$$

ここで E_{j,ν,ϕ_ν} は $\lambda_\nu = t^{\ell} g(x)\lambda_{\nu,0}$ によって決められた相関数 $\phi_\nu(t,s;x,\xi)$ をもつフーリエ積分作用素で，その表象 $e_{j,\nu}(t,s;x,\xi)$ は任意の $\varepsilon>0$ に対して次をみたす。

(3.6) $$|\partial_t^{\gamma}\partial_s^{\gamma'} e_{j,\nu}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}| \leqq C\mu^{(1-j)\omega-\delta(|\alpha|+|\beta|)}\langle\xi\rangle^{-(1-\delta)|\alpha|+\delta|\beta|}$$
$$\times\{(t+\mu^{-\omega})/(s+\mu^{-\omega})\}^{m_0+\varepsilon}\{\mu^{-\delta}\langle\xi\rangle^{\delta}+(t+\mu^{-\omega})^{-1}\}^{\gamma}$$
$$\times\{\mu^{-\delta}\langle\xi\rangle^{\delta}+(s+\mu^{-\omega})^{-1}\}^{\gamma'}.$$

ただし

(3.7) $\mu = g(x)\langle\xi\rangle + 1$,

$$(3.8)\quad \begin{cases} m_0 = \sup\limits_{x,\xi,j}\left\{ \mathrm{Im}\dfrac{G(\lambda_{j,0})}{\partial_\lambda P(\lambda_{j,0})} - \dfrac{\ell\lambda_{j,0}\partial_\lambda^2 P(\lambda_{j,0})}{2\partial_\lambda P(\lambda_{j,0})}\right\}_{t=0}, \\ G(\lambda) = \sum\limits_{j=2}^{m}\sum\limits_{|\alpha|=j-1}\left(a_{j,\alpha}(t,x)/g(x)^{j-1}\right)\xi^\alpha\lambda^{m-j}. \end{cases}$$

上の証明は次の二点に注意するとほぼ §1, §2 で述べた方法でできる。

i) 尺度関数として $\langle\xi\rangle$ と (3.7) の μ との二つを使うこと。

ii) transport equation を解くとき，及びフーリエ積分作用素と擬微分作用素との積を考えるときに次の補題を使うこと。

<u>補題 3.2.</u> $\lambda(t,x,\xi) = t^\ell g(x)\lambda_0(t,x,\xi)$ $(\lambda_0 \in \mathcal{B}_t(S^1))$ に対して $\{q,p\}(t,s;x,\xi)$ を

$$(3.9)\quad \begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -\nabla_\xi\lambda(t,q,p), \\ \dfrac{dp}{dt} = \nabla_x\lambda(t,q,p), \qquad \{q,p\}|_{t=s} = \{x,\xi\} \end{cases}$$

の解とし，$\phi(t,s;x,\xi)$ を λ に対する相関数とする。このとき十分小なる T_0 が存在して，$0 \leqq s \leqq t \leqq T_0$ のとき

(3.10) $\frac{1}{2}\mu(x,\xi) \leqq \mu(q(t,s;x,\xi),\xi) \leqq 2\mu(x,\xi)$,

(3.11) $\frac{1}{2}\mu(x,\xi) \leqq \mu(\nabla_\xi\phi(t,s;x,\xi),\xi) \leqq 2\mu(x,\xi)$

が成立する。

この補題は $\tilde{q}(t,s;x,\xi)$ を $q(t,s;x,\xi) - x$ 又は $\nabla_\xi\phi(t,s;x,\xi) - x$ としたとき

$$|\partial_t \tilde{q}(t,s;x,\xi)| \leqq C \max_{s \leqq \sigma \leqq t} g(x+\tilde{q}(\sigma,s;x,\xi))$$

が成立することによる.

References

[1] S. Alinhac, Paramétrix et propagation des singularités pour un problème de Cauchy à mulplicité variable, Soc. Math. France Asterisque 34-35 (1976), 3-36.

[2] H. Kumano-go, Fundamental solutions for operators of regularly hyperbolic type, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 339-406.

[3] G. Nakamura, A parametrix of a certain linear hyperbolic partial differential equation with variable multiplicity, to appear.

[4] K. Shinkai, Fundamental solution of a degenerate hyperbolic system, to appear.

[5] K. Taniguchi, Remarks on the construction of the fundamental solution for a weakly hyperbolic equation (in preparation).

[6] H. Uryu, master's thesis (in Japanese).

[7] A. Yoshikawa, Fundamental solutions to the Cauchy problem of some weakly hyperbolic equation, Proc. Japan Acad., 53 (1977), 103-107.