数理解析研究所講究録
357巻 1979年 69-85

主部が定係数双曲型である作用素について

筑波大　数学系　若林誠一郎

序. 主部が定係数である微分作用素

$$P(x,D)=P_m(D)+\sum_{j=0}^{m-1}Q_j(x,D),\ Q_j(x,D)=\sum_{|\alpha|=j}a_\alpha(x)D^\alpha,$$

$$x=(x_1,\cdots,x_n),\ D=-i(\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n)$$

に対する Cauchy 問題を考える。ここで、$P_m(\xi)$ は m 次斉次多項式であり、$\vartheta=(1,0,\cdots,0)$ 方向を時間方向とみる。C^∞ の category では、定係数の場合($P(\xi)\equiv P(x,\xi)$)には、Gårding [3] [4] によって C^∞-well posed であるための必要十分条件が得られている。また、Atiyah-Bott-Gårding [1] によって解の波面集合の評価も与えられている。低階が変係数の場合には、Dunn [2] によって C^∞-well posed であるための十分条件が与えられた。解の波面集合の評価も得られている([12])。低階が変係数である場合、Svensson [11] の結果が重要な役割を果す。Gevrey class では、Larsson [10] が定係数作用素に対して well-posed であるための必要十分条件を与えた。ここでは、定係数の場合に Gevrey class

での Svensson の結果に対応する定理を与え、解の波面集合の外側からの評価を与える。また、低階変係数の場合には、Dunn の与えた条件が C^∞-well posed でありかつ有限伝播性をもつための必要条件でもあることをしめし、係数が解析的であるとき、Gevrey class において well-posed であるための必要条件(必要十分条件)を与える。さらに、解の波面集合の外側からの評価も考察する。

$K(\subset \mathbb{R}^n)$, $1<\kappa<\infty$ とし、$\mathcal{E}^{(\kappa)}$ (resp. $\mathcal{E}^{\{\kappa\}}$) を次のように定義する：

$$f \in \mathcal{E}^{(\kappa)} \ (\text{resp. } \mathcal{E}^{\{\kappa\}})$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$${}^\forall K：\text{コンパクト}, \ {}^\forall h>0 \ {}^\exists C \ (\text{resp. } {}^\exists h>0, {}^\exists C) \ \text{s.t.}$$
$$\sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)| \leq C h^{|\alpha|} (|\alpha|!)^\kappa$$

また、$\mathcal{E}^{(\infty)} = \mathcal{E}^{\{\infty\}} = \mathcal{E} (= C^\infty)$ と形式的に書くことにする。以下、$*\kappa$ によって (κ) または $\{\kappa\}$ を表わすものとする。$\mathcal{D}^{*\kappa}$ を $\mathcal{D}^{*\kappa} \underset{\text{def}}{=} \mathcal{E}^{*\kappa} \cap C_0^\infty$ によって定義する。$\mathcal{E}^{*\kappa}$, $\mathcal{D}^{*\kappa}$ の位相については、Komatsu [8] に詳しく述べられている。$\mathcal{D}^{*\kappa}$ の共役空間として ultradistribution の空間 $\mathcal{D}^{*\kappa\prime}$ を定義する。

Part I　定係数作用素 ($P(\xi) \equiv P(x, \xi)$)

1.1.　Cauchy 問題.

定義 1.1.　$P(D)$ が hyperbolic of class $*\kappa$ w.r.t. ϑ

$\overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def}$

${}^{\exists}K\ (\subset \mathbb{R}^n)$: 閉凸錐, ${}^{\exists}E(x)(\equiv E(P,\vartheta;x))\in \mathcal{D}^{*\kappa'}$ s.t.

$K\setminus\{0\}\subset\{x\in\mathbb{R}^n;\ x\cdot\vartheta>0\}$,

$P(D)E(x)=\delta(x),\quad \mathrm{supp}\, E(x)\subset K$ //

$P_m(\xi)$ が ϑ に関して双曲型であるとする。Γ を $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ の錐とし、$\xi^0\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ とする。そのとき、

$\delta(P;\Gamma)\equiv\delta(\Gamma)\leqq \inf\{\delta;\ \delta\geqq 0$ かつ ${}^{\exists}\gamma>0$ s.t.

$P(\xi-is(1+|\xi|)^{\delta}\vartheta)\neq 0$ for ${}^{\forall}\xi\in\Gamma,\ {}^{\forall}s>\gamma\}$,

$\delta(P;\xi^0)\equiv\delta(\xi^0)\leqq \inf\{\delta(\Gamma);\ \Gamma$ は ξ^0 の錐近傍$\}$

によって $\delta(\Gamma)$, $\delta(\xi^0)$ を定義する。

補題1.2. ξ^0 の錐近傍 Γ_0 が存在して、$\delta(\xi^0)=\delta(\Gamma_0)$ が成立する。さらに $\delta(\xi^0)$ は有理数で、ξ^0 が $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ をうごくとき有限個の値しかとらない。 //

証明は、系

$$\begin{cases} P(\xi-is\vartheta)=0, \\ |\xi|^2=r^2,\quad r>0, \\ |\xi-r/|\xi^0|\,\xi^0|\leqq\varepsilon^2 r^2,\quad 0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0 \end{cases}$$

に対して、Seidenberg の補題を適用することによってなされる。

$\delta(P)\leqq \max_{|\xi|=1}\delta(P,\xi)$

とおく。

命題1.3（$\kappa=\infty$ のとき Gårding [3], [4], $1<\kappa<\infty$ のとき Larsson [10]）. $P(D)$ が hyperbolic of class (κ) (resp. $\{\kappa\}$) w.r.t. ϑ $\Longleftrightarrow$

(i) $P_m(\xi)$ が ϑ に関して双曲型でありかつ、

(ii) $\kappa \leq 1/\delta(P)$ (resp. $\kappa < 1/\delta(P)$). //

1.2. 双曲型多項式. $H(\xi)$ を m 次斉次多項式とし、ϑ に関して双曲型であるとする。さらに、$S(\xi)$ を m' 次斉次多項式とする。但し、$m'<m$ とする。$\xi^0\in R^n\setminus\{0\}$ に対して、

$$N_{\xi^0} \equiv \{\, \gamma(s)\,;\ \gamma(s)=s^{-1}(\xi^0+\sum_{j=1}^{\infty} s^{j/l}\xi^j),\ \xi^j\in R^n,\ l\in N,$$
$$s\gamma(s) \text{ は } s=0 \text{ の近傍で収束}\}$$

とおく。

定義1.4. $\tau(s)$ を $(0,s_0]$ で定義された函数とし、

$$\tau(s)=a s^d(1+o(1)),\quad s\to +0,\quad a\neq 0$$

をみたすとする。そのとき、$\operatorname{order}\tau(s)=d$ と定義する。$\gamma\in N_{\xi^0}$ に対して

$$n(H,S;\gamma)\equiv n(\gamma)\equiv -\operatorname{order}\frac{S(\gamma(s)-i\vartheta)}{H(\gamma(s)-i\vartheta)}$$
$$n(H,S;\xi^0)\equiv n(\xi^0)\equiv \sup_{\gamma\in N_{\xi^0}} n(\gamma)$$

とおく。さらに、$R^n\setminus\{0\}$ の錐 Γ に対して

$$n(H,S;\Gamma)\equiv n(\Gamma)\equiv \inf\{\, k\,;\ \left|\frac{S(\xi-i\vartheta)}{H(\xi-i\vartheta)}\right|\leq {}^{\exists}C(1+|\xi|)^k \ \text{for } {}^{\forall}\xi\in\Gamma\}$$

と定義する。 //

補題1.5. (i) ξ^0の錐近傍Γ_0が存在して、$n(\xi^0)=n(\Gamma_0)$が成立する。(ii) $m'-m+\deg H_{\xi^0}-\deg S_{\xi^0}\leq n(\xi^0)\leq m'-m+\deg H_{\xi^0}\leq m'$. (iii) $S(\xi^0)\neq 0 \Longrightarrow n(\xi^0)=m'-m+\deg H_{\xi^0}$. (iv) $H(\xi^0)\neq 0 \Longrightarrow n(\xi^0)=m'-m$. (v) H, Sが互いに素であるとする。$H(\xi)=h_1(\xi)^{j_1}\cdots h_\mu(\xi)^{j_\mu}$ と因数分解して、$R(\xi)=h_1(\xi)\cdots h_\mu(\xi)$とおく。もし、$\frac{\partial}{\partial\xi_1}R(\xi^0)\neq 0$ならば、$n(\xi^0)=m'-m+\deg H_{\xi^0}$である。ここで、$H_{\xi^0}(\xi)\ (\neq 0)$は$H$の$\xi^0$におけるlocalizationで、

$$H(s^{-1}\xi^0+\xi)=s^r(H_{\xi^0}(\xi)+o(1)),\quad s\to 0$$

によって定義される。 //

(i)はやはりSeidenbergの補題を用いて証明される。そのとき、Svensson[1]の議論も必要とされる。

定理1.6 (Svenssonの結果の拡張). $P_m(\xi)$がϑに関して双曲型であると仮定する。そのとき、$\xi^0\in R^n\setminus\{0\}$に対して、

$$\max(\delta(P;\xi^0),\delta(P;-\xi^0)) = \max_{0\leq j\leq m-1}\frac{n_+(P_m,Q_j;\xi^0)}{m-j+n_+(P_m,Q_j;\xi^0)}.$$

特に

$$\delta(P)=\max_{|\xi|=1,\,0\leq j\leq m-1}\frac{n_+(P_m,Q_j;\xi^0)}{m-j+n_+(P_m,Q_j;\xi^0)}$$

である。ここで、$n_+(P_m,Q_j;\xi^0)=\max(0,n(P_m,Q_j;\xi^0))$.

注意) Svenssonの結果は次のものであった:

$\delta(P)=0 \iff$

$$\left|\frac{Q_j(\xi - i\vartheta)}{P_m(\xi - i\vartheta)}\right| \leqq C,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leqq j \leqq m-1$$

$(\Longleftrightarrow\ n_+(P_m, Q_j; \xi) = 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leqq j \leqq m-1)$. //

証明は [13] を参照されたい。

1.3. 波面集合. $\kappa_1 > 1$ とし、Paley-Wiener型定理(Komatsu [8], [9] 参)を考慮して、$f \in \mathcal{D}^{*\kappa_1'}$ に対する波面集合を次のように定義する。

定義 1.7. $(x^0, \xi^0) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0$, $\kappa_1 \leqq \kappa < \infty$ とする。

(i) $(x^0, \xi^0) \notin WF_{*\kappa}(f)$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

U: x^0 の近傍, Γ: ξ^0 の錐近傍が存在して、任意の $\varphi \in \mathcal{D}^{*\kappa_1}(U)$ に対して、次が成立する:

$\forall L > 0$, $\exists C$ ($*\kappa = (\kappa)$ のとき) ($\exists L > 0$, $\exists C$ ($*\kappa = \{\kappa\}$ のとき)) s.t.

$$|\mathcal{F}[\varphi f](\xi)| \leqq C \exp[-L|\xi|^{1/\kappa}],\ \xi \in \Gamma.$$

(ii) $(x^0, \xi^0) \notin WF^{*\kappa}(f)$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

U: x^0 の近傍, Γ: ξ^0 の錐近傍が存在して、任意の $\varphi \in \mathcal{D}^{*\kappa_1}(U)$ に対して、次が成立する:

$\exists L$, $\exists C$ ($*\kappa = (\kappa)$ のとき) ($\forall L > 0$, $\exists C$ ($*\kappa = \{\kappa\}$ のとき)) s.t.

$$|\mathcal{F}[\varphi f](\xi)| \leqq C \exp[L|\xi|^{1/\kappa}],\ \xi \in \Gamma.$$

(iii) $(x^0, \xi^0) \notin WF_{(\infty)}(f) = WF_{\{\infty\}}(f) = WF(f)$ (resp. $WF^{(\infty)}(f) = WF^{\{\infty\}}(f)$)

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$

U：x^0の近傍，Γ：ξ^0の錐近傍が存在して、任意の$\varphi \in \mathcal{D}^{*\kappa_1}(U)$に対して、次が成立する：

$\forall N$：整数，$\exists C$ (resp. $\exists N, \exists C$) s.t.

$|\mathcal{F}[\varphi f](\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N, \ \xi \in \Gamma.$ //

$WF_{*\kappa}(f)$は Hörmander [5] において定義されたものである。$WF_{*\kappa}(f)$ (resp. $WF^{*\kappa}(f)$)は、超局所的に$\mathcal{E}^{*\kappa}$ (resp. $\mathcal{D}^{*\kappa\prime}$)に属するかどうかを特徴づけるものである。これらに対しても、$WF(f)$と同様の性質をしめすことができる。

1.4. 基本解$E(P, \vartheta; x)$. 以下、$P_m(\xi)$がϑに関して双曲型であると仮定する。$\kappa_0 = 1/\delta(P)$とおく。$E(x) \equiv E(P, \vartheta; x)$は、

$$\langle E(x), \varphi(x) \rangle = (2\pi)^{-n} \int_{\substack{\zeta = \xi - i\gamma(1+|\xi|)^{1/\kappa_0}\vartheta, \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} \frac{\hat{\varphi}(-\zeta)}{P(\zeta)} d\zeta, \quad \varphi \in \mathcal{D}^{(\kappa_0)}$$

によって定義される．実際、

$$P(\xi - i\gamma(1+|\xi|)^{1/\kappa_0}\vartheta) \neq 0, \quad \gamma > \exists \gamma_0$$

であり、$\hat{\varphi}$に対して Paley-Wiener 型定理を適用すれば、

$E(x) \in \mathcal{D}^{(\kappa_0)\prime}$ がわかる。さらに、次の補題より、

$$\mathrm{ch}\,[\,\mathrm{supp}\,E\,] = \Gamma(P_m, \vartheta)^*$$

を得る。ここで、$\Gamma(P_m, \vartheta)$ は $\{\xi \in \mathbb{R}^n;\ P_m(\xi) \neq 0\}$ の ϑ を含む連結成分として定義され、$\Gamma(P_m, \vartheta)^*$ は $\Gamma(P_m, \vartheta)$ の dual cone である。

補題 1.8. M を $\Gamma(P_m, \vartheta)$ のコンパクト集合とする。そのとき $\exists \gamma_M > 0$ s.t.

$$P(\xi - i\gamma(1+|\xi|)^{1/\kappa_0}\eta) \neq 0, \quad \eta \in M,\ \gamma > \gamma_M \quad //$$

基本解 $E(x)$ の波面集合を評価するために、次の補題を必要とする。

補題 1.9. $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $M\ (\subset \Gamma(P_{m\xi^0}, \vartheta))$：コンパクト集合 とする。そのとき、$\xi^0$ の錐近傍 Γ, t_0, γ_0, $C\ (>0)$ が存在して、

$$P(\xi - i\gamma_0(1+|\xi|)^{1/\kappa_0}\vartheta - it|\xi|\eta) \neq 0,\ \xi \in \Gamma,\ |\xi| \geq C,\ \eta \in M,$$
$$0 \leq t \leq t_0. \quad //$$

Atiyah–Bott–Gårding [1] と同様にして、次を得る。

定理 1.10.

$$WF_A(E) \subset \bigcup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \Gamma(P_{m\xi}, \vartheta)^* \times \{\xi\},$$

かつ、$(x^0, \xi^0) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0$ に対して、$(x^0, \xi^0) \notin WF^{(1/\delta(\xi^0))}(E)$ が成立する。但し、$\delta(\xi^0) = 0$ のとき、$(x^0, \xi^0) \notin WF^{(\infty)}(E)$ である。

定理 1.11. $1 < \kappa_1 \leqq \kappa_0 \equiv 1/\delta(P)$, $\kappa_1 \leqq \kappa \leqq \infty$ とする。$f \in \mathcal{D}^{(\kappa_1)\prime}$ (resp. $\mathcal{D}^{\{\kappa_1\}\prime}$), $\operatorname{supp} f \subset \{x \in \mathbb{R}^n ; x\cdot\vartheta \geqq 0\}$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して、

$$WF_{(\kappa)}(E*f)|_\xi \ (\text{resp. } WF_{\{\kappa\}}(E*f)|_\xi)$$
$$\subset \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n ; x-y \in \Gamma(P_{m\xi}, \vartheta)^*,\ (y,\xi) \in WF_{(1/\delta(\xi))}(f) \\ \quad \text{for some } y \in \mathbb{R}^n\}, \quad \kappa \geqq 1/\delta(\xi), \\ \{x \in \mathbb{R}^n ; x-y \in \Gamma(P_{m\xi}, \vartheta)^*,\ (y,\xi) \in WF_{(\kappa)}(f) \\ \quad (\text{resp. } WF_{\{\kappa\}}(f)) \text{ for some } y \in \mathbb{R}^n\}, \quad \kappa < 1/\delta(\xi). \end{cases}$$

$$WF^{(\kappa)}(E*f)|_\xi \ (\text{resp. } WF^{\{\kappa\}}(E*f)|_\xi)$$
$$\subset \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n ; x-y \in \Gamma(P_{m\xi}, \vartheta)^*,\ (y,\xi) \in WF_{(1/\delta(\xi))}(f) \\ \quad \text{for some } y \in \mathbb{R}^n\}, \quad \kappa > 1/\delta(\xi) \ (\text{resp. } \kappa \geqq 1/\delta(\xi)), \\ \{x \in \mathbb{R}^n ; x-y \in \Gamma(P_{m\xi}, \vartheta)^*,\ (y,\xi) \in WF^{(\kappa)}(f) \ (\text{resp.} \\ \quad WF^{\{\kappa\}}(f)) \text{ for some } y \in \mathbb{R}^n\}, \quad \kappa \leqq 1/\delta(\xi) \ (\text{resp.} \\ \quad \kappa < 1/\delta(\xi)). \end{cases}$$

但し、$\delta(\xi) = 0$ のとき、

$$WF^{(\infty)}(E*f)|_\xi = WF^{\{\infty\}}(E*f)|_\xi \subset \{x \in \mathbb{R}^n ; x-y \in \Gamma(P_{m\xi}, \vartheta)^*,\ (y,\xi) \in WF^{(\infty)}(f) \text{ for some } y \in \mathbb{R}^n\}$$

である。

Part II 低階変係数である作用素

2.1. 解の構成. 以下、$P_m(\xi)$ は ϑ に関して双曲型であると仮定する。$\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して、

$$\kappa(\xi) \leqq \min_{0\leqq j\leqq m-1,\, x\in\mathbb{R}^n} \frac{m-j+n_+(P_m, Q_j(x,\cdot);\xi)}{n_+(P_m, Q_j(x,\cdot);\xi)},$$

$$\kappa_0 \leqq \min_{|\xi|=1} \kappa(\xi)$$

とおく(上で、minで定義したがこれは意味をもつ)。$Q(x, D)$の係数は$\mathcal{E}^{*\kappa_1}$ $(1<\kappa_1)$に属するとし、次の仮定をおく:

(A) $1<\kappa_1<\kappa_0$.

κを$*\kappa_1=(\kappa_1)$のとき$\kappa_1\leqq\kappa\leqq\kappa_0$, また$*\kappa_1=\{\kappa_1\}$のとき$\kappa_1\leqq\kappa<\kappa_0$なるようにとる。次のCauchy問題を考える:

$$(2.1)\quad \begin{cases} P(x,D)u(x)=f(x), \\ \operatorname{supp} u(x)\subset\{x\in\mathbb{R}^n;\ x_1\geqq t\}. \end{cases}$$

ここで、$f\in\mathcal{D}^{*\kappa'}$, $\operatorname{supp} f\subset\{x\in\mathbb{R}^n;\ x_1\geqq t\}$, $t\in\mathbb{R}$である。まず、$Q(x,D)$の係数及びfの台が、コンパクトであると仮定すると、(2.1)の解$u(x)\in\mathcal{D}^{*\kappa'}$が逐次近似によってもとめられる。すなわち、

$$P_m(D)u_0(x)=f(x),\quad P_m(D)u_{l+1}(x)=-Q(x,D)u_l(x),$$

$$\operatorname{supp} u_l\subset\operatorname{supp} f+\Gamma(P_m,\vartheta)^*,\quad l=0,1,2,\cdots$$

によって、$u_l\in\mathcal{D}^{*\kappa'}$を定義すれば、$u=\sum_{l=0}^{\infty}u_l$が$\mathcal{D}^{*\kappa'}$で収束して(2.1)をみたす. 一方有限伝播性が証明でき、このことより、$Q(x,D)$の係数及びfの台がコンパクトでないときにも、(2.1)の解が構成できることがわかる。

定理2.1. 条件(A)の下で、Cauchy問題(2.1)は $\mathcal{D}^{*\kappa'}$ において一意解 u をもつ。

注意) $\kappa_0=\infty$ のとき、$\kappa_1\leqq\infty$ に対して定理が成立する([12])。 //

2.2. well-posedness.

定理2.2. $Q(x,D)$ の係数が実解析的であると仮定する。もし、Cauchy問題(2.1)が各 $t\in\mathbb{R}$, 任意の $f\in\mathcal{E}^{*\kappa}$, $\operatorname{supp} f\subset\{x_1\geqq t\}$ に対して一意解をもつならば、$\kappa\leqq\kappa_0$ である。

注意) $*_\kappa=\{\kappa\}$ のとき、well-posednessの十分条件は、$\kappa<\kappa_0$ であり、少しgapがある。$n\leqq3$ のときは、$\kappa<\kappa_0$ が必要十分であることを証明できる。 //

この定理は、Ivrii[6]の方法を用いて証明される。

定理2.3. $Q(x,D)$ の係数が C^∞ であると仮定する。そのとき、Cauchy問題(2.1)が C^∞-well posedでかつ有限伝播性をもつための必要十分条件は、$\kappa_0=\infty$ である。すなわち、各 $x\in\mathbb{R}^n$ に対して $P(x,\xi)$ が ϑ に関して双曲型であることが、必要十分である。 //

この定理の必要性の証明は、Ivrii-Petkov[7]の方法を用いてなされる。

2.3. 解の波面集合.

定理2.4. 条件(A)を仮定する。定理1.11で $E*f$ を

(2.1) の解 $u(x)$ で、$\delta(\xi)$ を $1/\kappa(\xi)$ でおきかえたものが成立する。 //

証明は、(2.1) の基本解を逐次近似で構成し、各項を評価すればよい。

Appendix

A.1. $n \leqq 3$ のときの $n(H, S; \xi^0)$ の計算法. $H(\xi)$, $S(\xi)$ を §1.2 と同じものとする。

補題A.1. $n=2$, $\xi^0 \in R^2 \setminus \{0\}$ とする。そのとき、

$$n(H, S; \xi^0) = \max\,(m'-m,\ m'-m+\deg H_{\xi^0} - \deg S_{\xi^0}). \quad //$$

$n=3$ のときを考える。$\xi^0 \in R^3 \setminus \{0\}$ とする。変数変換によって、$\xi^0 = (0,0,1)$, $\nu = (1,0,0)$ となるようにできる。

$$H(\tau, s, 1) = H_1(\tau, s) R(\tau, s) A(\tau, s), \quad A(0,0) \neq 0,$$

$$S(\tau, s, 1) = S_1(\tau, s) R(\tau, s) B(\tau, s), \quad B(0,0) \neq 0,$$

$$S_1(\tau, s) = s^\alpha \hat{S}_1(\tau, s), \quad \hat{S}_1(\tau, 0) \neq 0,$$

と表わす。ここで、H_1 と S_1 は互いに素であると仮定してよい。$\tau_j(s)$ $(1 \leqq j \leqq r_1)$, $\lambda_j(s)$ $(1 \leqq j \leqq r_2)$ をそれぞれ $H_1(\tau, s) = 0$, $S_1(\tau, s) = 0$ の相異なる（s について恒等的には一致しない）根で、order $\tau_j(s) > 0$, order $\lambda_j(s) > 0$ なるものとする。さらに、δ_j $(1 \leqq j \leqq r_1)$, $-\delta_{j+r_1}$ $(1 \leqq j \leqq r_2)$ をそれぞれ根 $\tau_j(s)$, $\lambda_j(s)$ の重複度とする。さらに、

$$d_{ij} = \mathrm{order}\,(\tau_i(s) - \tau_j(s)), \quad 1 \leqq i, j \leqq r_1,$$

$$d_{ij+r_1} = \mathrm{order}\,(\tau_i(s) - \lambda_j(s)),\ 1 \leqq i \leqq r_1,\ 1 \leqq j \leqq r_2.$$

とおき、

$$\{d_{ij};\ 1 \leqq j \leqq r_1 + r_2\} = \{l_{ij};\ 1 \leqq j \leqq \qquad q_i\},$$

$$0 < l_{i1} < \cdots < l_{iq_i} = \infty, \quad 1 \leqq i \leqq r_1$$

と表わす。

$$\beta_{ij} = \Sigma_{d_{ik}=l_{ij}}\,\delta_k,\quad I_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \beta_{ik} l_{ik}$$

とおき、$i(k)\ (1 \leqq k \leqq p_i)$ を

$$I_{ii(k)} - \alpha \geqq 0,\ I_{ii(k)-1} - \alpha \leqq 0,\ l_{ii(k)} = d_{ij},\ 1 \leqq {}^{\exists}j \leqq r_1$$

をみたす番号とする。そのとき、次を得る。

定理A. 2.

$$n(H, S; \xi^0) = m' - m + \max\{(I_{ii(k)} - \alpha)/l_{ii(k)} + \sum_{j=i(k)+1}^{q_i} \beta_{ij};\ 1 \leqq i \leqq r_1,\ 1 \leqq k \leqq p_i\}$$

である。但し、$l_{ii(k)} = \infty$ のとき、$(I_{ii(k)} - \alpha)/l_{ii(k)} + \Sigma_{j=i(k)+1}^{q_i} \beta_{ij} = \delta_i$ と考える。 //

A. 2. 例.

例1. $P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_3)(\xi_1^2 - 2\xi_2^2 + 2\xi_1\xi_3)(\xi_1^2 - 3\xi_2^2 + 2\xi_1\xi_3) + \xi_2^3\xi_3^2$ とする。もし、ξ^0 が $(0,0,1)$ と $(2,0,-1)$ に平行でないならば、$\frac{\partial}{\partial \xi_1} P_6(\xi^0) \neq 0$ より、$n(P_6, Q_5; \xi^0) = 0$ である。$\xi^0 = (0,0,1)$ とする。そのとき、

$$\alpha = 3,\ \tau_1(s) = \frac{s^2}{2} + \cdots,\ \tau_2(s) = s^2 + \cdots,\ \tau_3(s) = \frac{3}{2}s^2 + \cdots,$$

$$(l_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & \infty \\ 2 & \infty \\ 2 & \infty \end{pmatrix},\ (\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ (I_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & \infty \\ 4 & \infty \\ 4 & \infty \end{pmatrix},\ (I_{ij} - \alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \infty \\ \boxed{1} & \infty \\ \boxed{1} & \infty \end{pmatrix}$$

である。よって、$n(P_6, Q_5; \xi^0) = -1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, $\kappa(\xi^0) = 3$ である。また、$\xi^0 = (2, 0, -1)$ のときも同様にして、$n(P_6, Q_5; \xi^0) = \frac{1}{2}$, $\kappa(\xi^0) = 3$ を得る。故に、$\kappa_0 \equiv 1/\delta(P) = 3$ である。$\xi \in R^3 \setminus \{0\}$ に対して、P_ξ は ν に関して双曲型だが、P は双曲型でないことに注意しておく。 //

例2. $P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_3)(\xi_1^2 - 2\xi_2^2 + 4\xi_1\xi_3) + 2\xi_1\xi_3^2$, $\xi^0 = (0, 0, 1)$ とする。そのとき、

$$\alpha = 0,\ \tau_1(s) = \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{8} + \cdots,\ \tau_2(s) = \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{16} + \cdots,\ \lambda_1(s) \equiv 0,$$

$$(l_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \infty \\ 2 & 4 & \infty \end{pmatrix},\ (\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ (\mathrm{I}_{ij}) = \begin{pmatrix} -2, & 2 & \infty \\ -2 & 2 & \infty \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{I}_{ij} - \alpha) = \begin{pmatrix} -2 & \boxed{2} & \infty \\ -2 & \boxed{2} & \infty \end{pmatrix}$$

である。よって、$n(P_4, Q_3; \xi^0) = -1 + \frac{2}{4} + 1 = \frac{1}{2}$, $\kappa(\xi^0) = 3$ である。 //

例3. $P(x, D) = D_1^2 + i a(x) D_2$, $a(x) \neq 0$, $a \in \mathcal{E}^{(\kappa_1)}$ $(1 < \kappa_1 < 2)$ とする。そのとき、

$$\kappa(\xi) = 2 \quad \text{if } \xi \,/\!/\, (0, 1), \quad = \infty, \ otherwise.$$

よって、定理2.4より例えば、(2.1)で、$WF_{(2)}(f)|_{(0,\pm1)} = \phi$ かつ $WF(f) = \phi$ (i.e. $f \in C^\infty$) ならば、解 $u \in C^\infty$ であることがわかる。また、$WF_{(2)}(f)|_{(0,\pm1)} = \phi$ かつ $WF^{(\infty)}(f) = \phi$ (i.e. $f \in \mathcal{D}'$) ならば、$u \in \mathcal{D}'$ である。 //

解の波面集合の外側からの評価を定理1.11と2.4で与え

たが、基本解の波面集合の内側からの評価については、満足のいく結果を得ることができなかった。例によって、うまくいく場合をしめそう。

例4. $P(\xi)=\xi_1(\xi_1-\xi_2)+\xi_3$, $\xi^0=(0,0,1)$ とする。そのとき、

(A.1) $$WF_A(E(x))|_{\xi^0}=WF^{(\kappa)}(E)|_{\xi^0}=\Gamma(P_{2\xi^0},\vartheta)^*$$
$$=\{x;\ x=\alpha(1,0,0)+\beta(1,-1,0),\ \alpha,\beta\geqq 0\},\ \kappa>2$$

であり、$WF^{(2)}(E)|_{\xi^0}=\phi$ である。実際、$\eta(s)=s^{-1}\xi^0-is^{-\frac{1}{2}}(a,b,0)$ とおくと

$$P(\eta(s)+\xi)=\{1-a(a-b)\}s^{-1}-i\{(2a-b)\xi_1-a\xi_2\}s^{-\frac{1}{2}}$$
$$+\xi_1(\xi_1-\xi_2)+\xi_3$$

である。$a>0$, $b\in\mathbb{R}$ かつ $1-a(a-b)=0$ ととると、

$$P(\eta(s)+\xi)=s^{-\frac{1}{2}}P_1(\xi)+P(\xi)$$

と表わせる。$v=2a-b$, $w=-a$ とおくと $1+w(v+w)=0$, $w<0$ である。$x^0=\alpha(1,0,0)+\beta(1,-1,0)$, $\alpha,\beta>0$ のとき、$\lambda>0$ と v,w ($w<0$, $1+w(v+w)=0$) が存在して $x^0=\lambda(v,w,0)$ とかける。そのとき

$$\mathcal{F}[e^{-ix\cdot\eta(s)}\varphi(x)E(x)](0)=\widehat{\varphi E}(\eta(s))$$
$$=s^{\frac{1}{2}}\langle E(P_1,\vartheta;x),\varphi\rangle+O(s),\quad s\to+0,$$
$$\varphi\in\mathcal{D}^{(2)}$$

が成立する。

$$\mathrm{supp}\, E(P_1, \nu; x) = \{x ;\ x = \lambda(v, w, 0),\ \lambda \geq 0\}$$

より、 $x^0 \in WF^{(\kappa)}(E)|_{\xi^0}$, $\kappa > 2$ を得る。これより、(A.1) は容易に示される。 //

ここで述べた結果の証明等については、[13] を参照されたい。

References

1. Atiyah, M. F., Bott, R. and Garding, L., Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, Acta Math., 124 (1970), 109-189.
2. Dunn, J. L., A sufficient condition for hyperbolicity of partial differential operators with constant coefficient principal part, Trans. Amer. Math. Soc., 201 (1975), 315-327.
3. Garding, L., Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta Math., 85 (1950), 1-62.
4. _______, Some trends and problem in linear partial differential equations, Proc. Int. Congr. Math. Edinburgh (1958), 87-102.
5. Hormander, L., Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 671-704.
6. Ivrii, V. Ja., Conditions for correctness in Gevrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Sib. Mat. Zh., 17 (1976), 547-563.
7. Ivrii, V. Ja. and Petokov, V. M., Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Uspehi Mat. Nauk, 29 (1974), 3-70.
8. Komatsu, H., Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 20 (1973), 25-105.
9. _______, Ultradistributions, II, The kernel theorem and

ultradistributions with support in a submanifold, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 24 (1977), 607-628.

10. Larsson, E., Generalized hyperbolicity, Ark. Mat., 7 (1967), 11-32.

11. Svensson, S. L., Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part, Ark. Mat., 8 (1969), 145-162.

12. Wakabayashi, S., Propagation of singularities for hyperbolic operators with constant coefficient principal part, Tsukuba J. Math., 2 (1978), 91-107.

13. ___________, The Cauchy problem for operators with constant coefficient hyperbolic principal part and propagation of singularities, in preparation.