数理解析研究所講究録
357巻 1979年 44-68

Leray-Volevich Systems と Gevrey class.

筑波大 数学系 梶谷邦彦

§1. Introduction

重複度が一定である特性根をもつ双曲型方程式系に対するCauchy問題を考える。次の方程式を$\Omega = [0,T]\times R^n$ において考える。

$$(1.1) \qquad \sum_{q=1}^{N} a_q^p(x,D)u^q(x) = f^p(x), \quad x\in\Omega, \ p=1,\dots,N.$$

ここで、$x=(x_0,x_1,\dots,x_n)=(x_0,x')\in\Omega$, $a_q^p(x,D)$ は m_q^p 次の微分作用素であり、その係数はあるGevrey class $\gamma^s(G)$ に入っているとする。$f\in\gamma^s(\Omega)$ とはある正数 C と A があって $|D^\alpha f(x)| \le C A^{|\alpha|}|\alpha|!$ をみたす C^∞ 函数である。ここで $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\sum\alpha_i$, $D_k = -\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}$, $D^\alpha = D_0^{\alpha_0}D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$ を表わす。微分作用素 $a_q^p(x,D)$ に多項式 $a_q^p(x,\xi)$ を対応させ、$a_q^p(x,\xi)$ の m_q^p 次斉次部分を $\hat{a}_q^p(x,\xi)$ で表わすことにする。$\{a_q^p\}$ の特性多項式を定義するために次の量を導入する。

$$m = \max_{\pi} \sum_{p=1}^{N} m^{p}_{\pi(p)},$$

π は $[1,\cdots,N]$ の置換群の元を表わす。 $\det(\hat{a}^p_q(x,\xi))$ の m 次斉次部分を $a(x,\xi)$ で表わす。これを特性多項式という。Volevich によれば、整数行列 $\{m^p_q\}$ に対し、整数の組 $\{t_p, s_p\}$, $p=1,\cdots,N$ が存在して

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \forall p, q \in [1,\cdots,N] \\ m^p_q \leq t_q - s_p \\ m = \sum_{p=1}^{N} (t_p - s_p) \end{cases}$$

が成り立つ（c.f [15]）。性質(1.2)をもった m^p_q 次の微分作用素の系 $\{a^p_q(x,D)\}$ を Leray-Volevich systems と呼ぶことにする。

$\boxed{\text{注意}}$ (1.2)をみたす $\{t_p, s_p\}$ は一意的ではないが、以下 (t_p, s_p) を固定して議論を進める。

方程式(1.1)に対して次のような初期値を与えることが出来る。

$$(1.3)\qquad D_0^h u^p|_{x_0=0} = W^p_h(x'),\quad h=0,1,\cdots,t_p-1.$$

$s_p>0$ のとき data (f^p, W^p_h) の間に compatibility 条件が必要である。なぜなら $W^p_h(x')$ に対して $W^p_h - D_0^h W^p = O(x_0)$ なる函数 $W^p(x)$ を一つえらぶと、$u^p - W^p = O(x_0^{t_p})$ となり order $a^p_q(x,D) \leq t_q - s_p$ だから $a^p_q(x,D)(u^q - W^q) = O(x_0^{s_p})$ となり、q について和をとると、(1.1)を用いて次の式を得る。

$$(1.4)\qquad f^p - \sum_{q=1}^{N} a^p_q(x,D)W^q = O(x_0^{s_p}),\quad p=1,\cdots,N,$$

初期値問題 (1.1), (1.3) を次の仮定の下で考える。

$\boxed{\text{仮定}}$ $\{a_q^p\}$ の特性多項式 $a(x,\xi)$ は x_0 に関して non characteristic であり、ξ_0 に関して重複度一定の実根のみをもつ。すなわち

$$a(x,\xi)=\prod_{l=1}^{d}\left(\xi_0-\lambda^{(l)}(x,\xi')\right)^{m(l)}, \quad \left(\lambda^{(j)}\neq\lambda^{(k)},\ j\neq k\right)$$

と分解できる。このとき根 $\lambda^{(l)}(x,\xi')$ は ξ' に関しては analytic であり x に関しては係数と同じ Gevrey class に入る。さらに、Matsuura の lemma (cf [R]) によれば、上の仮定をみたす $a(x,\xi)$ は strictly hyperbolic な多項式の積、$a(x,\xi)=a_1(x,\xi)^{\nu_1}a_2(x,\xi)^{\nu_2}\cdots a_g(x,\xi)^{\nu_g}$ と分解でき、$a_1(x,\xi)\cdots a_g(x,\xi)$ は ξ_0 に関して異なる実根のみをもつ。

(1.1) において未知函数を変換して、主要部が対角形であるような方程式系に帰着することが出来る。そのために $\{a_q^p\}$ の余因子作用素を導入する。$h_q^p(x,\xi)$ によって $a_q^p(x,\xi)$ の t_q-s_p 次斉次部分を表わす。すなわち、$m_q^p=t_q-s_p$ のとき $h_q^p=\hat{a}_q^p$, $m_q^p<t_q-s_p$ のとき $h_q^p\equiv 0$ とおく。このとき $\{h_q^p(x,\xi)\}$ の余因子を $\mathrm{cof}\,h_q^p(x,\xi)$ とかけば、$\mathrm{cof}\,h_q^p(x,\xi)$ の order は $m-(t_q-s_p)$ であり、$\sum h_q^p\,\mathrm{cof}\,h_r^q=\delta_r^p\,a(x,\xi)$ が成り立つ。$H_q^p(x,D)$ によってその主要部が $\mathrm{cof}\,h_q^p(x,\xi)$ であるような微分作用素を表わす。$\{H_q^p\}$ を $\{a_q^p(x,D)\}$ の余因子作用素とよぶ。このとき、

(1.5) $$\sum_{r=1}^{N} a_r^p(x,D)H_q^r(x,D) = \delta_q^p a(x,D) - b_q^p(x,D)$$

とおけ，$a(x,D) = a_1(x,D)^{\nu_1}\cdots a_q(x,D)^{\nu_q}$ と分解される。order $b_q^p \leq m+s_q-s_p-1$ が成立つ。

(1.1) において $u^p = \sum H_q^p(x,D)v^q$ とおけば，(1.1)，(1.3) が解けるためには次の方程式を考えれば十分である(c.f[4])

(1.6) $$\begin{cases} a(x,D)v^p(x) - \sum_{q=1}^{N} b_q^p(x,D)v^q(x) = f^p(x) \\ D_0^h v^p\big|_{x_0=0} = g_h^p(x'), \quad h \leq m-1. \end{cases}$$

上のような方程式を対角主要部をもったLeray-Volevich systemsとよぶ。(1.6) に対する基本解を構成しよう。

$\varphi^{(l)}(x)$ を $\lambda^{(l)}$ に対する phase function とする。(i.e $\varphi_{x_0} = \lambda^{(l)}(x,\varphi_{x'}^{(l)})$, $\varphi_{x'}^{(l)} \neq 0$)。任意の $\varphi^{(l)}$ と C^∞-function $f(x)$ に対して

(1.7) $$e^{-i\rho\varphi^{(l)}} b_q^p(x,D)\left(e^{i\rho\varphi^{(l)}}f\right) = O(\rho^{m_q^{p(l)}}), \ \rho\to\infty$$

が成立つように整数 m_q^p をとる。$b_q^p \equiv 0$ ならば $m_q^{p(l)} = -\infty$ としておく。明らかに

(1.8) $$m_q^{p(l)} \leq m + s_q - s_p$$

(1.6) において，data (f^p, g_h^p) をいかなる Gevrey class でとればよいかは，$\{m_q^{p(l)}\}$ に depend するが，それだけでなく，さらに (1.7) を ρ に関し展開して，ρ の巾の係数の微分の order にも depend する。それをみるために次の量を導入する。

(1.9) $$q^{(\ell)} = \max_{\pi} \sum_{p=1}^{N} m^{p}_{\pi(p)}/N \cdot - m + m^{(\ell)}$$

とおく。ここで再び Volevich の lemma によって次の性質をもつ有理数 $\{n^{(\ell)}_p\}$ が存在する.

$$m^{p(\ell)}_q \le m - m^{(\ell)} + q^{(\ell)} + n^{(\ell)}_q - n^{(\ell)}_p .$$

注意 $q^{(\ell)} = 0, (\ell = 1, \dots, d)$ の場合は (1.6) は C^∞-data (f^p, g^p_α) に対して C^∞-解 u^p を求めることが出来る (c.f [9]). さらに任意の Gevrey class で解くことが出来る。従って以下, ある ℓ に対しては $q^{(\ell)} \neq 0$ として議論を進める。

さて (1.7) にもどって, ρ に関して展開して,

(1.10) $$e^{-i\rho\varphi^{(\ell)}} B^p_q(x,D)\left(e^{i\rho\varphi^{(\ell)}} f\right) = \sum_{k=0}^{m^{p(\ell)}_q} \rho^{m^{p(\ell)}_q - k}\, b^{p(\ell)}_{q\,k}(x,D) f,$$

$B^{p(\ell)}_{q\,k}$ の order を $d^{p(\ell)}_{q\,k}$ とおく. このとき

$$m^{p(\ell)}_q - k + d^{p(\ell)}_{q\,k} \le m - 1 + s_q - s_p$$

が成り立つ。 $d^{(\ell)}_k = \max_{\pi} \sum_p d^{p(\ell)}_{\pi(p)k}/N$ とおく. (1.9)より

$m - m^{(\ell)} + q^{(\ell)} - k + d^{(\ell)}_k \le m - 1$. ゆえに

(1.10)' $$d^{(\ell)}_k \le m^{(\ell)} - 1 - q^{(\ell)} + k$$

をうる。

(1.11) $$\kappa_0 = \inf_{\substack{q^{(\ell)} - k > 0, \\ \ell}} \frac{m^{(\ell)} - d^{(\ell)}_k}{q^{(\ell)} - k}$$ とおく.

(1.10)'より $m^{(\ell)} - d^{(\ell)}_k \ge q^{(\ell)} - k + 1$ だから $\kappa_0 > 1$ である。

この k_0 は，単独方程式の場合に，Ivrii [6] 及び Komatsu [10] ，De Paris – Wagschal [2] が導入した量と同じものである。結論からいえば，問題 (1.6) の係数が $\gamma^s(\Omega)$ に属しているとし，$s \le k_0$ をみたすとき data (f^p, g^p_h) を同じ γ^s で与えると γ^s で解を求めることが出来る。

次の方程式をみたすものを基本解という。

$$
(1.12)\quad \begin{cases} a(x,D)K^p(x,y) = \sum_{q=1}^{N} b^p_q(x,D)K^q(x,y) \\ D_0^h K^p|_{x_0=y_0} = \delta(x'-y')\,\delta^h_{m-1}, \quad h=0,1,\dots,m-1. \end{cases}
$$

$K^p(x,y)$ を $\gamma^s(R^n_y)$ から $\gamma^s(R^n_x)$ への作用素とみて $K(x_0,y_0)$ とかくことがある。

$\boxed{\text{定理 1.1}}$ $a(x,D)$, $b^p_q(x,D)$ は上にのべた仮定をみたしているとする。さらに重み $\{s_p, n^{(l)}_p\}$ について次の仮定をおく。$s^{(l)}_p = s_p - n^{(l)}_p$ とおく。

$$
(1.13)\qquad s^{(l)}_q - s^{(l)}_p \le g^{(l)}, \quad 対\ b^{(l)} \neq 0
$$

このとき (1.12) の基本解 $K^p(x_0,y_0)$ が $\gamma^s(R^n)$ から $\gamma^s(R^n)$ への作用素として次のような形で構成される。

$$
(1.14)\qquad K^p(x_0,y_0) = W^p(x_0,y_0) + \int_{y_0}^{x_0} W^p(x_0,t)F^p(t,y_0)\,dt
$$

ここで $W^p(x_0,y_0) = \sum_{l=1}^{d} \int e^{i\varphi^{(l)}(x,y,\xi')}\, u^{p(l)}(x,y_0,\xi')\,d\xi'$,
$\varphi^{(l)}$ は $\lambda^{(l)}$ に対応する phase function で

$$
(1.15)\qquad \varphi^{(l)}_{x_0} = \lambda^{(l)}(x, \varphi^{(l)}_{x'}), \quad \varphi^{(l)}|_{x_0=y_0} = \langle x'-y', \xi' \rangle
$$

をみなす。さらに $F^p(x_0, y_0)$ は次の積分方程式の解である。

$$(1.16)\quad F^p(x_0,y_0) = -R^p(x_0,y_0) - \int_{y_0}^{x_0} R^p(x_0,t)\,F^p(t,y_0)\,dt ,$$

ここで
$$R^p(x_0,y_0) = a(x,D)\,W^p(x_0,y_0) - \sum b_q^p(x,D)\,W^q(x_0,y_0)$$
$$= \sum_{l=1}^{d} \int e^{i\varphi^{(l)}(x,y,\xi')}\, r^{p(l)}(x,y_0,\xi')\,d\xi'$$

であり，$u^{p(l)}(x, y_0, \xi')$ 及び $r^{p(l)}(x, y_0, \xi')$ は

$$(1.17)\quad \left|D_x^\alpha D_{\xi'}^\beta u^{p(l)}(x,y_0,\xi')\right| \leq C_1 A_1^{|\alpha+\beta|} e^{|x_0-y_0||\xi'|^{1/K_0}A_2} |\xi'|^{m_p^{(l)}-|\beta|+d_0/K_0} \times |\alpha+\beta|!^s ,$$

$$(1.18)\quad \left|D_x^\alpha D_{\xi'}^\beta r^{p(l)}(x,y_0,\xi')\right| \leq C_1 A_1^{|\alpha+\beta|+\mu} e^{|x_0-y_0|A_2|\xi'|^{1/K_0}} |\alpha+\beta|!^s \times |\xi'|^{m_p^{(l)}-|\beta|-\mu+d_0/K_0}\,\mu!^{m^{(l)}(s-1)+1}$$

がすべての α, β 及び $\mu = 1, 2, 3, \cdots,$ に対して成りたつ。ここで C_1, A_1 及び A_2 は方程式の係数及び空間の次元に depend する定数である。$m_p^{(l)} = m^{(l)} - m - n_p^{(l)} + \max_q n_q^{(l)}$ である。

積分方程式 (1.16) の解 F^p の存在を保障するのは評価 (1.18) である。この小論では評価 (1.17) を導くのが主な目的となる。(1.17), (1.18) より次のことがわかる。

$\boxed{\text{定理 } 1.2}$ data (f^p, g_k^p) が次の評価をもつとする，

$$|D^\alpha f^p| \leq C A^{|\alpha|} |\alpha|!^s$$
$$|D^\alpha g_k^p| \leq C A^{|\alpha|} |\alpha|!^s .$$

このとき，$s < K_0$ ならば解 $u^p \in \gamma^s(\Omega)$ であり，$s = K_0$ のとき解 u^p は $0 \leq x_0 < 1/A_1 A^{1/K_0}$ において存在し評価 $|D^\alpha u^p| \leq C_2 \left(1/(A^{1/K_0} - x_0 A_1)\right)^{K_0|\alpha|} |\alpha|!^s$ をもつ。

§2 基本解の漸化式とその評価.

Diracの測度 $\delta(x'-y')$ は

$$\delta(x'-y') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x'-y',\,\xi'\rangle}\, d\xi'$$

と表現されることに注意して(1.12)の解を次の方程式の解のξ'に関する積分することによって求める.

$$(2.1)\quad \begin{cases} a(x,D)\,u^p(x,y,\xi') = \displaystyle\sum_{q=1}^{N} b_q^p(x,D)\,u^q(x,y,\xi') \\ D_0^h u^p \big|_{x_0=y_0} = \delta_{m-1}^h\, e^{i\langle x'-y',\,\xi'\rangle}, \quad h=0,1,\dots,m-1. \end{cases}$$

上の解を次のような逐次近似で求める.

$$u^p(x,y,\xi') = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^p(x,y,\xi'),$$

ここで u_0^p は

$$(2.2)\quad \begin{cases} a(x,D)\,u(x,y,\xi') = 0 \\ D_0^h u \big|_{x_0=y_0} = \delta_{m-1}^h\, e^{i\langle x'-y',\,\xi'\rangle} \end{cases}$$

の解であり, u_k^p は次の方程式の解である。

$$(2.3)_k\quad \begin{cases} a(x,D)\,u_k^p(x,y,\xi') = \displaystyle\sum_{q=1}^{N} b_q^p(x,D)\,u_{k-1}^q(x,y,\xi') \\ D_0^h u_k^p \big|_{x_0=y_0} = 0, \quad h=1,2,\dots,m-1, \end{cases}$$

$k=1,2,3,\dots$.

はじめに, (2.2)の解をξ'に関する漸近解として求める。

(2.2)の解を次の形で求める.

$$(2.4)\quad u(x,y,\xi') = \sum_{l=1}^{d} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-(m-m^{(l)})-j}\, u_j^{(l)}(x,y,\xi')\, e^{i\varphi^{(l)}},$$

ここで $\rho=|\xi'|$ とおいた. $u_j^{(l)}$ はξ'に関して homogeneous degree zero として考える. 又 $\varphi^{(l)} = \varphi^{(l)}(x,y,\xi')$ は $\lambda^{(l)}$

の phase function で次の方程式の解である.

$$\begin{cases} \varphi^{(\ell)}_{x_0} = \lambda^{(\ell)}(x, \varphi^{(\ell)}_{x'}) \\ \varphi^{(\ell)}|_{x_0=y_0} = \langle x'-y', \xi' \rangle \end{cases}.$$

$\varphi^{(\ell)}$ は ξ' に関し homogeneous degree one である。

微分作用素 a と phase function φ に対し $\sigma_\mu(a,\varphi)$ なる order μ の微分作用素を次の式で定義する. ($m = \text{order}\ a$ である).

$$e^{-i\rho\varphi}\, a(x,D)(e^{i\rho\varphi} f) = \sum_{\mu=0}^{m} \rho^{m-\mu} \sigma_\mu(a,\varphi).$$

このとき $\sigma_\mu(a,\varphi)$ の主要部は,

$$(2.5) \qquad \sum_{|\alpha|=\mu} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha} \hat{a}(x, \varphi_x)\, D^\alpha$$

によって与えられる。ここで $\hat{a}$ は a の主要部である。

さて (1.5) で与えられた $a(x,D)$ は各 phase function $\varphi^{(\ell)}$ に対してあきらかに

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} &e^{-i\rho\varphi^{(\ell)}}\, a(x,D)(e^{i\rho\varphi^{(\ell)}} f) \\ &= \sum_{\mu=0}^{m-m^{(\ell)}} \rho^{m-m^{(\ell)}-\mu} \sigma_{\mu+m^{(\ell)}}(a, \varphi^{(\ell)}), \end{aligned}$$

となり, とくに

$$(2.7) \qquad \sigma_{m^{(\ell)}}(a, \varphi^{(\ell)}) = \sum_{j=0}^{m^{(\ell)}} a_j^{(\ell)}(x)\, H^{(\ell)}(x,D)^j, \quad a^{(\ell)}_{m^{(\ell)}} \neq 0,$$

ここで

$$(2.8) \qquad H^{(\ell)}(x,D) = D_0 - \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(\ell)}_{\xi_j}(x, \varphi^{(\ell)}_{x'})\, D_j.$$

今のべたことは，次の lemma によって保障される。

$\boxed{\text{Lemma . 2-1}}$ $a(x, D)$ を order m の微分作用素とする。今任意の phase function $\varphi^{(\ell)}$ と C^∞ function f に対して $e^{-i\rho\varphi^{(\ell)}} a(x, D)(e^{i\rho\varphi^{(\ell)}} f) = O(\rho^{m-d})$ が成立っているとする。そのとき ρ に関する展開

$$e^{-i\rho\varphi^{(\ell)}} a\,(e^{i\rho\varphi^{(\ell)}} f) = \sum_{\mu=0}^{m-d} \rho^{m-d-\mu} \sigma_{d+\mu}(a, \varphi^{(\ell)})$$

とかけるが，このときとくに $\sigma_d(a, \varphi^{(\ell)})$ は

$$\sigma_d(a, \varphi^{(\ell)}) = \sum_{j=0}^{d} a_j(x)\, H^{(\ell)}(x, D)^j$$

と表現することが出来る。（ C.f [6] ）.

さて (2.4) を (2.2) に代入すると

$$a(x, D)\, u(x, y, \xi') = \sum_{\ell=1}^{d} e^{i\varphi^{(\ell)}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{m-m^{(\ell)}} \sigma_{m^{(\ell)}+\mu}(a, \hat{\varphi}^{(\ell)}) \times \rho^{-\mu-j} u_j^{(\ell)}, \quad (\rho = |\xi'|),$$

ここで $\varphi^{(\ell)} = \rho\, \varphi^{(\ell)}(x, y, \xi'/\rho) = \rho\, \hat{\varphi}^{(\ell)}$ として考えた。

ゆえに次の漸化式を得る。

$$(2.9) \qquad \sum_{\mu=0}^{m-m^{(\ell)}} \sigma_{m^{(\ell)}+\mu}(a, \hat{\varphi}^{(\ell)})\, u_{j-\mu}^{(\ell)} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \cdots \quad \ell = 1, \cdots, d.$$

さらに (2.2) の初期条件より

$$D_0^h u\big|_{x_0 = y_0} = e^{i\langle x'-y', \xi'\rangle} \sum_{\ell, \mu, j} \sigma_\mu(D_0^h, \hat{\varphi}^{(\ell)})\, u_j^{(\ell)} \rho^{h-\mu-(m-m^{(\ell)})-j}$$

$$= e^{i\langle x'-y',\xi'\rangle}\sum \sigma_\mu(D_0^h,\hat{\varphi}^{(\ell)})\,u^{(\ell)}_{j+m^{(\ell)}-\mu}\,\rho^{h-m-j}$$
$$= e^{i\langle x'-y',\xi'\rangle}\ \delta^h_{m-1}, \qquad h=0,1,\cdots,m-1.$$

ゆえに、ρに関する係数を比較して、

$$\sum_{\ell=1}^{d}\sum_{\mu=0}^{h}\sigma_\mu(D_0^h,\hat{\varphi}^{(\ell)})\,u^{(\ell)}_{j+m^{(\ell)}-\mu} = \begin{cases} 1, & h=m-1,\ j=-1 \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

(2.5)によれば $\sigma_\mu(D_0^h,\hat{\varphi}^{(\ell)})$の主要部は $\binom{h}{\mu}(\varphi^{(\ell)}_{x_0})^{h-\mu}D_0^\mu = \binom{h}{\mu}(\lambda^{(\ell)})^{h-\mu}D_0^\mu$ になることに注意すれば、上の関係式より $\{D_0^h u^{(\ell)}_{j+m^{(\ell)}-h}\}_{h=0,1,\cdots,m^{(\ell)}-1,\ \ell=1,\cdots,d}$, に関して解くことが出来る。なぜなら Van der Monde の行列 $\{\binom{h}{\mu}(\lambda^{(\ell)})^{h-\mu}\}$, $h=0,1,\cdots,m-1$, $\mu=0,1,\cdots,m^{(\ell)}-1$, $\ell=1,\cdots,d$, は行列式が non zero だから。Van der Monde の行列の逆行列を $\{C^{\mu(\ell)}_h\}_{h=0,1,\cdots,m-1,\ \mu=0,1\cdots m^{(\ell)}-1,\ \ell=1,\cdots,d}$ とかくと、次の式を得る。

$$(2.10)_j\quad D_0^\mu u^{(\ell)}_{j+m^{(\ell)}-\mu} = \sum_{h=0}^{m-1} C^{\mu(\ell)}_h f^h_j + \sum_{\ell'=1}^{d}\Big\{\sum_{\mu'=1}^{m-1} N^{\mu(\ell)}_{\ell';\mu'-1}\,u^{(\ell')}_{j+m^{(\ell')}-\mu'} + \sum_{\mu'=m^{(\ell')}}^{m} N^{\mu(\ell)}_{\ell',\mu'}\,u^{(\ell')}_{j+m^{(\ell')}-\mu'}\Big\},\quad j\geq -m^{(\ell)},$$

ここで $f^h_j=1$, $h=m-1$, $j=-1$, $f^h_j=0$ その他。又 $N^{\mu(\ell)}_{\ell,\mu'}$ は order μ' の D_0 に関する微分作用素である。

以上の考察より $u^{(\ell)}_j$ は逐次解くことが出来る。さて、u^P_0 として今求めた u を与えればよいのであるが後のために少し見かけ上の表現を変えて、次のよう

にかくことにする。$\bar{n}_p^{(\ell)} = \max_q n_q^{(\ell)} - n_p^{(\ell)}$ とおく.

(2.11) $$u_0^p(x,y,\xi') = \sum_{\ell=1}^{d} \sum_{j=0}^{\infty} e^{i\varphi^{(\ell)}} \rho^{-m+m^{(\ell)}+\bar{n}^{(\ell)}-j}\, u_{0j}^{p(\ell)},$$

ここで、

$$u_{0j}^{p(\ell)} = \begin{cases} u^{(\ell)}_{j-\bar{n}_p^{(\ell)}}, & j \geq \bar{n}_p^{(\ell)} \\ 0 & j < \bar{n}_p^{(\ell)}. \end{cases}$$

さて次に、$(2.3)_k$ の解をつぎのような形で求める.

(2.12) $$u_k^p(x,y,\xi') = \sum_{\ell=1}^{d} \sum_{j=0}^{\infty} e^{i\varphi^{(\ell)}} \rho^{-m+m^{(\ell)}+\bar{n}_p^{(\ell)}+kq^{(\ell)}-j}\, u_{k,j}^{p(\ell)}.$$

$(2.3)_k$ に u_k^p 及び u_{k-1}^q を代入して、ρ の巾の係数をくらべる。(1.10) を考慮すれば

(2.13) $$b_q^p(x,D)\,u_{k-1}^q = \sum_{\ell=1}^{d} e^{i\varphi^{(\ell)}} \sum \rho^{m_q^{p(\ell)}-\mu+m^{(\ell)}-m+\bar{n}_q^{(\ell)}+(k-1)q^{(\ell)}-j}\, b_{q\mu}^{p(\ell)}\, u_{k-1,j}^{p(\ell)}$$
$$= \sum e^{i\varphi^{(\ell)}} \rho^{\bar{n}_p^{(\ell)}+kq^{(\ell)}-\mu-j}\, b_{q\mu}^{p(\ell)}(x,D)\, u_{k-1,j}^{p(\ell)}$$

をうる。ここで $m_q^{p(\ell)} = m - m^{(\ell)} + q^{(\ell)} + n_q^{(\ell)} - n_p^{(\ell)}$ とした.

order $B_{q\mu}^{p(\ell)} = d_{q\mu}^{p(\ell)}$, $d_\mu^{(\ell)} = \max_\pi \sum_{p=1}^{N} d_{\pi(p)\mu}^{p(\ell)}$ とおいたが、$\max_\mu (d_{q\mu}^{p(\ell)} - d_\mu^{(\ell)})$ に対して Volevich の lemma を適応すると、$r_p^{(\ell)}$, $p=1,\dots,N$ が存在して

$$d_{q\mu}^{p(\ell)} \leq d_\mu^{(\ell)} + r_q^{(\ell)} - r_p^{(\ell)}$$

が成りたつ。(1.11) より $d_\mu^{(\ell)} \leq -K_0(q^{(\ell)}-\mu) + m^{(\ell)}$ に注意して、

(2.14) $$d_{q\mu}^{p(\ell)} \leq m^{(\ell)} - K_0(q^{(\ell)}-\mu) + r_q^{(\ell)} - r_p^{(\ell)}.$$

$$a(x,D)u_k^p = \sum_{l=1}^{d}\sum_{j=0}^{\infty} e^{i\varphi^{(l)}} \sum_{\mu=0}^{m-m^{(l)}} \sigma_{m^{(l)}+\mu}(a,\hat{\varphi}^{(l)})\,\rho^{\bar{n}_p^{(l)}+kq^{(l)}-\mu-j}\, u_{k,j}^{p(l)},$$

上の式と (2.13) の ρ の巾の係数を比較すると,

$$(2.15)_k \quad \sum_{\mu=0}^{m-m^{(l)}} \sigma_{m^{(l)}+\mu}(a,\varphi^{(l)})\,u_{k,j-\mu}^{p(l)} = \sum_{q=1}^{N}\sum_{\mu=0}^{m_q^{p(l)}} b_{q\,\mu}^{p(l)}(x,D)\,u_{k-1,j}^{q(l)}$$

をうる。又初期条件に関しては前と同様にして,

$$D_0^h u_k^p\Big|_{x_0=y_0} = \sum_j e^{i\langle x'-y',\xi'\rangle} \sum_{l=1}^{d} \rho^{h-\mu-j}\,\sigma_\mu(D_0^h,\hat{\varphi}^{(l)})\,u_{k,m_p^{(l)}+kq^{(l)}+j}^{p(l)}$$

$$= 0$$

となり,

$$\sum_{l=1}^{d}\sum_{\mu=0}^{h} \sigma_\mu(D_0^h,\hat{\varphi}^{(l)})\,u_{k,m_p^{(l)}+kq^{(l)}+j-\mu}^{p(l)} = 0,\quad h=0,1,\cdots,m-1,$$

をうる。上式より $\{D_0^\mu u_{k,m_p^{(l)}+kq^{(l)}+j-\mu}^{p(l)}\}_{\mu=0,1,\cdots,m^{(l)}-1}$, $l=1,\cdots,d$, について解くと, $(2.10)_j$ と同様に,

$$(2.16)_{k.j}\quad D_0^\mu u_{k,m_p^{(l)}+kq^{(l)}+j-\mu}^{p(l)} = \sum_{l'=1}^{d}\Big\{\sum_{\mu'=1}^{m-1} N_{l';\mu'-1}^{\mu(l)}\; u_{k,m_p^{(l')}+kq^{(l')}+j-\mu'}^{p(l')}$$

$$+\sum_{\mu'=m(l')}^{m-1} N_{l',\mu'}^{\mu(l)}\; u_{k,m_p^{(l')}+kq^{(l')}+j-\mu'}^{p(l')}\Big\}$$

ここで $m_p^{(l)}$ は (2.13) で与えられる.

さて $(2.15)_k$ 及び $(2.16)_k$ をみたす u_{kj}^p はどのような評価をもつかを考察しよう. (2.7) によると $\sigma_{m^{(l)}}(a,\hat{\varphi}^{(l)})$ は $H^{(l)}(x.D)$ のみの微分しか現われないことに注目して, $H^{(l)}(x.D)$ が簡単な微分

なるようなxに関する変数変換を行う。すなわち，
$x = (z_0, \hat{x}'(z_0, z'))$ とおいて，$\hat{x}'(z_0, z')$ は

$$(2.17) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\hat{x}'}{dz_0}(z_0, z') = -\lambda^{(\ell)}(z_0, \hat{x}', \hat{\varphi}^{(\ell)}_{x'}(z_0, \hat{x}')) \\ \hat{x}'(y_0, z') = z' \end{cases}$$

ここで $\hat{\varphi}^{(\ell)}(z_0, \hat{x}') = \varphi^{(\ell)}(z_0, \hat{x}', y_0, 0, \xi'/|\xi'|)$ とおいた。
このとき，あきらかに

$$H^{(\ell)} f \big|_{x=(z_0, \hat{x}')} = D_{z_0}(f(z_0, \hat{x}'(z_0, z')))$$

となる。故に

$$(2.18) \quad \sigma_{m(\ell)}(a, \hat{\varphi}^{(\ell)})\big|_{x=(z_0, \hat{x}')} = \sum_{j=0}^{m(\ell)} A^{(\ell)}_{j}(z) D_0^{j} \left(= A^{(\ell)}_{m(\ell)}(z, D_0)\right)$$

と表わすことが出来，$A^{(\ell)}_{m(\ell)}(z) \neq 0$ である。従って

$$(2.19) \quad \begin{cases} \sqcup^{p(\ell)}_{k,j}(z) = u^{p(\ell)}_{k,j}\big|_{x=(z_0, \hat{x}')}, \\ A^{(\ell)}_{j}(z, D_z) = \sigma_j(a, \hat{\varphi}^{(\ell)})\big|_{x=(z_0, \hat{x}')}, \\ B^{p(\ell)}_{q\,j}(z, D_z) = b^{p(\ell)}_{q\,j}(x, D)\big|_{x=(z_0, \hat{x}')}, \end{cases}$$

とおけば，$(2.15)_k$ は

$$(2.20)_{k,j} \quad A^{(\ell)}_{m(\ell)}(z, D_0) \sqcup^{p(\ell)}_{k,j} = F^{p(\ell)}_{k,j} + G^{p(\ell)}_{k,j},$$

ここで，

$$(2.21) \quad F^{p(\ell)}_{k,j} = \sum_{\mu=1}^{m-m(\ell)} A^{(\ell)}_{m(\ell)+\mu} \sqcup^{p(\ell)}_{k,j-\mu},$$

$$(2.22) \quad G^{p(\ell)}_{k,j} = \sum_{q=1}^{N} \sum_{\mu=0}^{m^{p}_{q}(\ell)} B^{p(\ell)}_{q\,\mu}(z, D) \sqcup^{q(\ell)}_{k-1, j-\mu},$$

となる。

$(2.20)_{k,j}$ をみたす解 $U^{p(\ell)}_{k,j}(z)$ の評価を k, ℓ, j についての帰納法で導びく。そのために少し簡単な準備をする。以下の評価の導き方は Mizohata [13] の方法に従う。次の Lemma の証明は例えば [8] を参照。

$\boxed{\text{Lemma 2.2}}$ 任意の multi-index $\alpha=(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$ について次の不等式が成り立つ。

$$(2.23)\quad \sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha}\binom{\alpha}{\alpha'}\gamma^{-|\alpha'|}(|\alpha'|+p_1)!^s(|\alpha''|+p_2)!^s \le \frac{\gamma}{\gamma-1}(|\alpha|+p_1+p_2)!^s,$$

ここで, $\gamma>1$, $s\ge 1$, $p_1>0$, $p_2>0$ なる任意の数である。$\binom{\alpha}{\alpha'}=\binom{\alpha_0}{\alpha_0'}\cdots\binom{\alpha_n}{\alpha_n'}$, $\binom{\alpha_0}{\alpha_0'}=\dfrac{\alpha_0!}{\alpha_0'!(\alpha_0-\alpha_0')!}$ である。

$\boxed{\text{Lemma 2.3}}$ $P(z,D)=\sum_{|\beta|\le m}a_\beta(z)D^\beta$, $p_1, p_2>0$ とし, $\gamma>1$ とする。今

$$(2.24)\quad \begin{cases} |D^\alpha a_\beta(z)| \le C_0(\gamma^{-1}A)^{|\alpha|}(|\alpha|+p_1)!^s, & |\beta|\le m \\ |D^\alpha U(z)| \le CA^{|\alpha|}(|\alpha|+p_2)!^s \end{cases}$$

が $z\in\overline{G}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ でなりたつとする。そのとき,

$$|D^\alpha P(z,D)U(z)| \le C_0 C K(m,n,\gamma)A^{m+|\alpha|}(|\alpha|+p_1+p_2+m)!^s,$$

$(K(m,n,\gamma)=((n+1)^{m+1}-1)n^{-1}(\gamma-1)^{-1}\gamma)$ が成立つ。

$\boxed{\text{Lemma 2.4}}$ $X_j=\sum_{i=0}^{n}a_{ji}(z)\partial_{z_i}+a_{j0}(z)$, $j=1,\cdots,N$ とし, $a_{ji}(z)$, $U(z)$ は (2.24) をみたすとする。そのとき,

$$|D^\alpha x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_p} u| \le C\,(C_0 K(1,n,\gamma))^p A^{|\alpha|+p} (|\alpha|+p+p_1+p_2)!^s,$$

が成りたつ。 $K(1,n,\gamma) = (n+1)(\gamma-1)^{-1}\gamma.$

$\boxed{\text{Lemma 2.5}}$ $\varphi = (\varphi_1(y), \dots, \varphi_{m_1}(y)),\ y \in G_2 \subset R^{m_2}$

かつ

$$|D_y^\alpha \varphi_j(y)| \le C_0 A_0^{|\alpha|} |\alpha|!^s,$$

$$|D_x^\alpha u(x)| \le C A^{|\alpha|} (|\alpha|+p)!^s,\quad x \in G_1 \subset R^{m_1}$$

とする。 $\gamma = A/A_0 > 0$ とする. そのとき.

$$|D_y^\alpha (u \circ \varphi)(y)| \le C\,(2^s C_0 K(1,m_1,\gamma) A_0)^{|\alpha|} A^{|\alpha|} \times (|\alpha|+p)!^s,\quad y \in G_2$$

が成りたつ。 $K(1,m_1,\gamma) = (m_1+1)(\gamma-1)^{-1}\gamma.$

$\boxed{\text{Lemma 2.6}}$ 方程式

$$(2.25)\qquad \begin{cases} \sum_{j=0}^{m} a_j(z) D_0^j u(z) = f(z), & (a_m = 1) \\ D_0^k u\big|_{z_0=0} = u_k(z'), & \end{cases}$$

を考える. 係数 $a_j(z)$ は

$$|D^\alpha a_j(z)| \le C_0 A_0^{|\alpha|} |\alpha|!^s$$

をみたし, deta f, u_μ は

$$(2.26)\qquad \begin{cases} |D^\alpha f(z)| \le C A^{m+|\alpha|} \sum_{\mu=0}^{m_0} \dfrac{(A|z_0|)^\mu (|\alpha|+m+p+\mu)!^s}{\mu!} \\ |D_{z'}^\alpha u_k(z')| \le C A^{|\alpha|+k} (|\alpha|+p+\mu)!^s \end{cases}$$

をみたすとする. そのとき (2.25)の解 $u(z)$ は, 次の評価をもつ。

$$(2.27)\qquad |D^\alpha u(z)| \leq C\hat{C}A^{|\alpha|}\sum_{\mu=0}^{m_0+[m-\alpha_0]^{+1}} \frac{(|z_0|A)^\mu}{\mu!}(|\alpha|+p+\mu)!^s,$$

ここで $[p]^{+1} = \begin{cases} p, & p\geq 1 \\ 1, & p<1, \end{cases}$ $\hat{C} = \frac{m\gamma_1^2}{(\gamma_1-1)^2}$, と

$\gamma_1 = A/2^{s+2}C_0A_0^2 > 1$ をみたす A をとる。

証明) (2.25) を1階 system 化する。

$W_i = D_0^{i-1}u$, $i=1,\cdots,m$, とおくと

$$\begin{cases} D_0W_i = W_{i+1} \\ D_0W_m = D_0^m u = -\sum_{i=0}^{m-1} a_i W_{i+1} \end{cases},\ \text{となり}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ -A_0 & \cdots & & & -A_{m-1} \end{bmatrix}$$

$W = {}^t(W_1,\cdots,W_m)$, $F = {}^t(0,\cdots,0,f)$ とおくと

上の式は

$$D_0W = MW + F$$

とかける。 $S = e^{\int_0^{z_0}A(t,z')dt}$ とおくと (2.28)の解は

$$(2.28)\qquad W(z) = S(z)\left\{W(0,z') + \int_0^{z_0} S^{-1}(t,z')F(t,z')dt\right\}$$

と表される。 $S^{\pm1}(z)$ の (p,q) 要素を $a_q^{p(\pm)}(z)$ とかくと,

Lemma 2.5 より ($A=2A_0$, $\gamma=2$ とおいて用いる)

$$|D^\alpha a_q^{p(\pm)}(z)| \leq (2^{s+2}C_0A_0^2)^{|\alpha|}|\alpha|!^s$$

となるから, さらに Lemma 2.3 を用いて ($m=0$ として考える)

$$(2.29)\qquad |D^\alpha S^{-1}(z)F(z)| = \max_i |D^\alpha a_i^{m(-)}(z)f(z)|$$
$$\leq \frac{C\gamma_1}{\gamma_1-1}A^{m+|\alpha|}\sum_{\mu=0}^{m_0}\frac{(Az_0)^\mu}{\mu!}(|\alpha|+p+m+\mu)!^s$$

ここで $\gamma_1 = A/2^{s+2} c_0 A_0^2 > 1$ を仮定した。

$$Tu(z) = \sqrt{-1}\int_0^{z_0} u(t, z')\,dt$$

によって T を定義する。このとき

$$D_0^{i+1} u(z) = T(D_0^i u) + D_0^i u(0, z'), \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

が成り立つことに注目して，順次代入して

$$u(z) = T^{m-1} D_0^{m-1} u + \sum_{i=0}^{m-2} \frac{z_0^i}{i!} D_0^i u(0, z')$$

を得る。一方 (2.28) を成分ごとに見ると，

$$W_m = D_0^{m-1} u(z) = \sum_{g=1}^{m} a_g^{m(+)}(z)\left\{D_0^{g-1} u(0, z') + T a_g^{m(-)} f\right\}$$

であるからこれを上の式に代入すれば

$$(2.30)\quad u(z) = T^{m-1} \sum_{g=1}^{m} a_g^{m(+)}\left(u_{g-1}(z') + T a_g^{m(-)} f\right) + \sum_{i=0}^{m-2} \frac{z_0^i}{i!} u_i(z')$$

を得る。ここで (2.25) の初期条件を用いた。

まず $\alpha = (\alpha_0, \beta)$, $\alpha_0 \leq m-1$ の場合を考える。このとき

$$D^\alpha u = T^{m-1-\alpha_0} \sum_{\beta' + \beta'' = \beta} \binom{\beta}{\beta'} D^{\beta'} a_g^{m(+)} \left\{D^{\beta''} u_{g-1} + T D^{\beta''}(a_g^{m(-)} f)\right\}$$

ゆえに，(2.26) および (2.29) より，lemma 2.2 を用いると

$$|D^\alpha u| \leq \left(\tfrac{1}{\sqrt{-1}}T\right)^{m-1-\alpha_0} \Big\{ \frac{m\gamma_1}{\gamma_1 - 1} c\,(|\beta| + p + m - 1)!^s A^{|\beta| + m - 1} + \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}\right)^2 \left(\tfrac{1}{\sqrt{-1}}T\right) c\, A^{|\beta| + m} \sum_{\mu=0}^{m_0} \frac{|z_0 A|^\mu}{\mu!} (|\beta| + p + m + \mu)!^s \Big\} + \sum_{i=\alpha_0}^{m-2} \frac{|z_0|^{i-\alpha_0}}{(i-\alpha_0)!} A^{|\beta| + i} (|\beta| + i + p)!^s$$

$$\leqq \check{C}\, c A^{|\alpha|} \sum_{\mu=\alpha_0}^{m_0+m} \frac{|z_0 A|^{\mu-\alpha_0}}{(\mu-\alpha_0)!} (|\beta|+\mu+p)!^s$$

$$= \hat{C}\, c A^{|\alpha|} \sum_{\mu=0}^{m+m_0-\alpha_0} \frac{|z_0 A|^{\mu}}{\mu!} (|\alpha|+p+\mu)!^s$$

ここで $\hat{C} \geqq \max\left\{1, \frac{\gamma_1 m}{\gamma_1-1}, \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1-1}\right)^2\right\}$ を用いた。

次に $\alpha=(\alpha_0, \alpha')$, $\alpha_0 \geqq m$ とし, $\beta=(\alpha_0-m+1, \alpha')$ とおく。

このとき, (2.30) より

(2.31) $D^\alpha u = D^\beta\left\{\sum a_q^{m(+)} u_{q-1} + T a_q^{m(-)} f\right\}$.

$$= \sum_{\beta_0'=\alpha_0-m+1,\ \beta'+\beta''=\beta} \binom{\beta}{\beta'} \cdot D^{\beta'} a_q^{m(+)} D^{\beta''} u_{q-1}(z')$$

$$+ \sum_{\beta'+\beta''=\beta} \binom{\beta}{\beta'} D^{\beta'} a_q^{m(+)} D^{\beta''}\left(T a_q^{m(-)} f\right).$$

$\beta_0'' \neq 0$ のとき, (2.29) より

$$|D^{\beta''} T a_q^{m(-)} f| \leqq \frac{\gamma_1 c}{\gamma_1-1} A^{|\beta''|-1+m} \sum_{\mu=0}^{m_0} \frac{|A z_0|^{\mu}}{\mu!} (|\beta''|-1+p+m+\mu)!^s$$

$\beta_0''=0$ のとき,

$$|D^{\beta''} T a_q^{m(-)} f| \leqq \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} T\right) |D^{\beta''} a_q^{m(-)} f|$$

$$\leqq \frac{\gamma_1 c}{\gamma_1-1} A^{|\beta''|+m-1} \sum_{\mu=0}^{m_0} \frac{(z_0 A)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} (|\beta''|+p+m+\mu)!^s$$

$$= \frac{\gamma_1 c}{\gamma_1-1} A^{|\beta''|+m-1} \sum_{\mu=1}^{m_0+1} \frac{|z_0 A|^{\mu}}{\mu!} (|\beta''|-1+p+m+\mu)!^s$$

このことに注意して, (2.31) より

$$|D^\alpha u| \leqq G \sum_{\beta_0''=0,\ \beta'+\beta''=\beta} m \binom{\beta}{\beta'} (\gamma_1^{-1} A)^{|\beta'|} |\beta'|!^s A^{|\beta''|+m-1} (|\beta''|+m-1+p)!^s$$

$$+ \sum_{\beta_0''\neq 0,\ \beta'+\beta''=\beta} \binom{\beta}{\beta'} (\gamma_1^{-1} A)^{|\beta'|} |\beta'|!^s \sum_{\mu=0}^{m_0} \frac{\gamma_1 c}{\gamma_1-1} A^{|\beta''|-1+m} \frac{|A z_0|^{\mu}}{\mu!} (|\beta''|-1+p+m+\mu)!^s$$

$$+ \sum_{\beta_0''=0,\ \beta'+\beta''=\beta} \binom{\beta}{\beta'} (\gamma_1^{-1} A)^{|\beta'|} |\beta'|!^s \sum_{\mu=1}^{m_0+1} \frac{c\gamma_1}{\gamma_1-1} A^{|\beta''|-1+m} \frac{|A z_0|^{\mu}}{\mu!} (|\beta''|-1+p+m+\mu)!^s$$

$$\leq \sum_{\beta_0''\neq 0} \binom{\beta}{\beta'} (\gamma_1^{-1}A)^{|\beta'|} |\beta'|!^s \sum_{\mu=0}^{m_0} \frac{m\gamma_1 C}{\gamma_1-1} A^{|\beta''|-1+m} \frac{|z_0A|^\mu}{\mu!} (|\beta''|-1+p+m+\mu)!^s$$

$$+ \sum_{\beta_0''=0} \binom{\beta}{\beta'} (\gamma_1^{-1}A)^{|\beta'|} |\beta'|!^s \cdot \sum_{\mu=0}^{m_0+1} \frac{C\gamma_1}{\gamma_1-1} A^{|\beta''|-1+m} \frac{|z_0A|^\mu}{\mu!} (|\beta''|-1+p+m+\mu)!^s$$

$$\leq C\hat{C} A^{|\alpha|} \sum_{\mu=0}^{m_0+1} \frac{|Az_0|^\mu}{\mu} (|\alpha|+p+\mu)!^s.$$

以上で lemma 2-6の証明が了った。

$\boxed{\text{Corollary 2.7}}$ (2.25) において $u_k=0$, $k=0,1,\cdots m-1$ とし，かつ $f(z)$ が，

$$|D^\alpha f| \leq CA^{|\alpha|+m} \sum_{\mu=(k_0-\alpha_0)^+}^{m_0+k_0} \frac{|Az_0|^\mu}{\mu!} (|\alpha|+m+p+\mu)!^s,$$

をみたすとき，

$$|D^\alpha u| \leq \hat{C} C A^{|\alpha|} \sum_{\mu=(k_0+m-\alpha_0)^+}^{m_0+k+[m-\alpha_0]^{+1}} \frac{|z_0A|^\mu}{\mu!} (|\alpha|+p+\mu)!^s,$$

が成りたつ。 $(k)^+ = \begin{cases} k, & k>0 \\ 0 & k\leq 0 \end{cases}$, $[k]^{+1} = \begin{cases} k & k>0 \\ 1 & k\leq 0 \end{cases}$.

さて再び方程式 $(2.20)_{k,j}$ にもどろう。$U_{k,j}^{p(l)}$ と $u_{k,j}^{p(l)}$ 同じ初期値 $(2.16)_{k,j}$ をもつことに注意し，$U_{k,j}^{p(l)}$ を評価する。結論をいえば，

$$(2.32)_{k,j} \quad |D^\alpha U_{k,j}^{p(l)}| \leq C(C_0\hat{C})^{j+k+1} A^{|\alpha|+j+k-r_p^{(l)}} \sum_{\mu=(m^{(l)}-\alpha_0)^+}^{[jm^{(l)}+kk_0q^{(l)}+[m^{(l)}-\alpha_0]^{+1}+r_p^{(l)}]} \frac{|z_0A|^\mu}{\mu!} [|\alpha|+j-kk_0q^{(l)}+\mu-r_p^{(l)}]!^s$$

ここで $[k]$ は kをこえない最大の整数を表わす，又 $k\leq 0$ のとき $[k]!=0$ と約束する。

$(2.32)_{k,j}$ は (k,j) に関する induction で示される。まず $(2.32)_{0,j}$ は Lemma 2.6 を用いて j に関する induction で証明出来る。次に、$(2.32)_{k,0}$ を $(2.32)_{k-1,j}$ がなりたっているとして Lemma 2.7 を用いて示すことが出来、さらに一般に $(2.32)_{k,j}$ は $(2.32)_{k,i}$, $i \leq j-1$ が成りたっているとして再び Lemma 2.7 を用いて示される。証明はむつかしくはないが少し長くなるので割愛する。

§3 基本解の作り方

前節において (2.2) に対する漸近解を構成したが、これに基いて基本解を作る。$|\xi'|^{-m+m^{(l)}+\bar{n}_p^{(l)}+kg^{(l)}-j}\, u^{p,(l)}_{k,j}$ を改めて $u^{p,(l)}_{k,j}$ とかけば、(2.32) より Lemma 2.5 を考慮すると、

$$|D^{\alpha} D_{\xi'}^{\beta} u^{p(l)}_{k,j}| \leq \frac{C_0 A_0^{|\alpha|+|\beta|+j+k}}{[k\kappa_0 g^{(l)}]!} |x_0-y_0|^{[k\kappa_0 g^{(l)}-\alpha_0]^+} |\xi'|^{kg^{(l)}-|\beta|+m_p^{(l)}}$$
$$\times (|\alpha+\beta|)!^{s}\, j!^{m^{(l)}(s-1)+1}$$

となる。Boutet de Monvel and Kree [1] によれば $\{u^{p(l)}_{k,j}\}_{j=0,1,\dots}$ に対して次のような $u^{p(l)}_{k}$ が存在する。

$$(3.1)\quad \Big|D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta}\Big(u^{p(l)}_{k} - \sum_{j=0}^{\nu} u^{p(l)}_{k,j}\Big)\Big|$$
$$\leq C_1 A_1^{|\alpha+\beta|+k+\nu}\left(|x_0-y_0|^{(k\kappa_0 g^{(l)}-\alpha_0)^+} |\xi'|^{k\kappa_0 g^{(l)}} + 1\right)$$
$$\times |\xi|^{m_p^{(l)}-\gamma-|\beta|}\, |\alpha+\beta|!^{s}\, \nu!^{m^{(l)}(s-1)+1},$$

が任意の ν に対して成りたつ。故に

$$u^{p(l)}(x, y_0, \xi') = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{p(l)}(x, y_0, \xi')$$

とおけばこれは一様収束し、かつ評価(1.17)をもつ。

$$r^{p(l)}(x, y_0, \xi') = e^{-i\varphi(l)} \Big\{ \underbrace{a(x, D) u^{p(l)}}_{e^{i\varphi(l)}} - \sum_{q=1}^{N} b_q^p(x, D) e^{i\varphi(l)} u^{q(l)} \Big\}$$

とおけば、(3.1) より $r^{p(l)}$ は評価 (1.18) をもつことがわかる。

$\boxed{\text{Lemma 3.1}}$ (c.f [4]). 任意 $\rho > 0$ に対して、

$$\inf_{j \in N} \frac{j!}{\rho^j} \leq C \sqrt{\rho + 2}\, e^{1-\rho}$$

となる定数 C が存在する。

上の lemma より $\sqrt{\rho+2} \leq 2 e^{-\frac{\rho}{2}}$ とすると

$$\inf_{\mu} (A_1^{-1} |\xi'|)^{-\mu} \mu!^{m(l)(s-1)+1} \leq C e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{|\xi'|}{A}\right)^{\frac{1}{m(l)(s-1)+1}}}$$

となるから (1.18) より

$$(3.2) \quad \left| D_x^\alpha D_\xi^\beta r^{p(l)}(x, y_0, \xi') \right| \leq C A_1^{|\alpha+\beta|} e^{|x_0 - y_0| A_2 |\xi'|^{1/\kappa_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{|\xi'|}{A_1}\right)^{\frac{1}{m(l)(s-1)+1}}} \times |\alpha+\beta|!^s |\xi'|^{m_p^{(l)} - |\beta| + \alpha_0/\kappa_0}$$

をうる。

$W^p(x_0, y_0)$, $R^p(x_0, y_0)$ を定理 1.1 で与えられたものとする。このとき W^p は

$$\begin{cases} a(x, D) W^p - \sum b_q^p W^q = R^p \\ D_0^k W^p \big|_{x_0 = y_0} = \delta_{m-1}^k \, \delta(x' - y') \end{cases}$$

をみたす。$K^p(x_0,y_0)$を(1.14)で与え，$K^p(x_0,y_0)$が(1.12)をみたすように$F^p(x_0,y_0)$をきめる。すなわち

$$a(x,D)K^p - \sum b^p_q K^q = R^p + F^p + \int_{y_0}^{x_0} R^p(x_0,\sigma)F^p(\sigma,y_0)d\sigma$$
$$= 0$$

となるようにF^pをきめる。つまり$F^p(x_0,y_0)$は(1.16)の解である。

$s \leq k_0$として$F^p(x_0,y_0)$を$\gamma^s(R^n)$から$\gamma^s(R^n)$への作用素として次のように求める。

$$(3.3)\quad \begin{cases} F^p(x_0,y_0) = \sum_{j=0}^{\infty} F^p_j(x_0,y_0), \\ F_0(x_0,y_0) = -R(x_0,y_0), \\ F^p_j(x_0,y_0) = \int_{y_0}^{x_0} R^p(x_0,\sigma)F^p_{j-1}(\sigma,y_0)d\sigma \end{cases}$$

とおく。

$$R^p(x_0,y_0) = \sum_{l=1}^{d} R^{p(l)}(x_0,y_0),$$
$$R^{p(l)}(x_0,y_0) = \int e^{i\varphi^{(l)}(x,y,\xi')}\gamma^{p(l)}(x,y_0,\xi')d\xi'$$

とおく。$\gamma^{p(l)}$は(3.2)をみたす。$\varphi^{(l)}(x,y,\xi') = \psi^{(l)}(x,y_0,\xi') - \langle y',\xi'\rangle$と分解できることに注意して，$u(x')\in\gamma^s(R^n)$に対して

$$R^{p(l)}(x_0,y_0)u(x') = \int e^{i\psi^{(l)}}\gamma^{p(l)}(x,y_0,\xi')\hat{u}(\xi')d\xi'$$

と定義する。

$\boxed{\text{Lemm 3.2}}$ $u(x')\in\gamma^s(R^n)$，$s\leq k_0$かつ

$$(3.4)\quad |D^\alpha u(x')| \leq C_1 A^{|\alpha|}|\alpha|!^s$$

とする。このとき，

$$(3.5)\qquad \left| D_{x'}^{\alpha}\, R^{p(\ell)}(x_0, y_0)u \right| \leq \hat{C} C_1 \left(e^{\varepsilon_0|x_0-y_0|} A_1 \right)^{|\alpha|} |\alpha|!^{s}$$

となる定数 $\hat{C}>0$, $\varepsilon_0>0$ が存在する。

これは評価 (1.18) から Lemma 2.5 及び Lemma 3.1 を用いて導かれる。さらに (3.4) をみたす $u\in\mathcal{E}^s(R^n)$ に対して (3.5) より inductive に F^p_j に対して

$$\left| D^{\alpha} F_j^{p}(x_0, y_0)u \right| \leq \hat{C} C_1 \frac{(\hat{C}_0|x_0-y_0|)^j}{j!} \left(e^{\varepsilon_0|x_0-y_0|} A_1 \right)^{|\alpha|} |\alpha|!^{s}$$

なる定数 $\hat{C}_0>0$ が存在する。故に (3.3) の $F^p(x_0,y_0)$ は収束して

$$\left| D^{\alpha} F^{p}(x_0, y_0)u \right| \leq \hat{C} C_1\, e^{\hat{C}_0|x_0-y_0|} \left(e^{\varepsilon_0|x_0-y_0|} A_1 \right)^{|\alpha|} |\alpha|!^{s}$$

をみたす。

以上で基本解 $K^p(x_0,y_0)$ が構成された。定理 1.2 の証明はむづかしくない。基本解 $K^p(x_0,y_0)$ の表現式 (1.14) から wave front sets を知ることができる。$W^p(x_0,y_0)$ の wave front sets は表現式から明らかであるが、(1.14) の第2項の wave front sets は、

$$\int_{y_0}^{x_0} R^{p(\ell')}(x_0,\sigma)\, R^{p(\ell)}(\sigma, y_0)\, d\sigma\,,$$

$$\int_{y_0}^{x_0} W^{p(\ell')}(x_0,\sigma)\, R^{p(\ell)}(\sigma, y_0)\, d\sigma$$

の wave front set は $\ell'\neq\ell$ のとき空集合になるという事実より、やはり各 $\lambda^{(\ell)}$ に対応する bi-characteristic sets に含まれることがわかる。ここで

$$w^{p(2)}(x_0, y_0) = \int e^{i\varphi^{(2)}(x,y,\xi')} w^{(2)}(x, y, \xi')\, d\xi'$$

とおいた。

参考文献

[1] Boutet de Monvel and Kree ; Ann. Inst. Fourier Vol 17 (1967)

[2] De Paris et Wagschal ; J. Math. pures et appl. (1978)

[3] Hamada ; C.R. Acad. Sc. Paris t. 276 (1973)

[4] Hamada, Leray et Wagschal : J. Math. pures et appl. (1976)

[5] Hörmander ; Comm. pure Appl. vol. 26 (1971)

[6] Ivrii : Siberian Math. J. Vol 17 (1976)

[7] Ivrii ; Math. Sb. 96 (1975)

[8] Kajitani : Tsukuba J. Math. vol 1 (1977)

[9] Kajitani , RIMS Kyoto Univ. Vol. 14 (1979)

[10] Komatsu ; RIMS Kyoto Univ. Vol 12 (1977)

[11] Leray - Ohya : Centre Belge Rech. Math. (1964)

[12] Matsuura ; Proc. of th Conf. on Funct. Tokyo (1969)

[13] Mizohata ; J. Math. Kyoto Univ. Vol 1 (1962)

[14] Sato - Kawai - Kashiwara : Proc. Conf. at Katata (1971)

[15] Volevich ; Dokl. Acad. Nauk. S.S.S.R (1960)

[16] De Paris ; J. Math. pures et appl. (1971)