数理解析研究所講究録
358巻 1979年 84-98

集合値関数を用いた最適化問題とその制御理論への応用

富士通 国際情報社会科学研究所
田川 正二郎

§0. 序

集合値関数を用いて最適化問題を扱ったものは，これまでに，Blum & Oettli [1]，Borwein [2]，Gwinner [3] などがあるが，それらは集合値凸関数を用いており，凸計画法の拡張である．それに対してここでは，集合値関数に微分の概念を導入し，Fritz-John 又は Kuhn-Tucker の定理の拡張を考える．一つの応用として，最適制御問題を論じ，最適性の必要条件を導く．

§1. 凸関数と一般的極値

これからの議論に用いられる集合値凸関数は次のように定義されるが，それは，Blum & Oettli [1] で用いられているものと同じである．

X と Y を実線形空間，A を X の凸部分集合，$\Gamma : A \rightarrow Y$ を

集合値関数とする。

定義1.1: 集合値関数 $\Gamma : A \to Y$ が凸（又は凹）とは，任意の $x_1, x_2 \in A$，$\lambda \in [0,1]$ に対し

$$\lambda \Gamma x_1 + (1-\lambda)\Gamma x_2 \subset \Gamma(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

$$（又は，\lambda \Gamma x_1 + (1-\lambda)\Gamma x_2 \supset \Gamma(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)）$$

が成立するときをいう。Γ がアフィンとは，凸かつ凹のときとする。

注意: 集合値関数 Γ が凸であるための必要十分条件はそのグラフ

$$G(\Gamma) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in \Gamma x\}$$

が凸であることである。

A' を任意の集合，A を A' の部分集合，Y を位相線形空間，D を Y の閉凸部分集合でその内部（$\mathrm{int}\, D$ と記す）は空でないもの，$\Gamma : A' \to Y_{co}$ は集合値関数とする。ここで

$$Y_{co} = \{K \mid K は Y の中の凸集合\}$$

とする。すなわち，Γ は凸集合を値とする集合値関数である。

定義1.2: 元 $\bar{a} \in A'$ が (Γ, D)-極値とは，

(i) $\Gamma \bar{a} \cap D \neq \emptyset$.

(ii) 集合 $\{a \mid a \in A, \Gamma a \cap \mathrm{int}\, D \neq \emptyset\}$ は空である

を満足するものをいう。

さて，$\Delta : A' \to \mathbb{R}^m_{co}$ を集合値関数とする。

<u>定義1.3:</u> 元 $\bar{a}\in A'$ が (Δ, Γ, D)-極値とは,

(i) $\Gamma\bar{a}\cap D \neq \phi$,

(ii) $0\in\Delta\bar{a}$

(iii) 集合 $\{a \mid a\in A, \Gamma a\cap \mathrm{int}D\neq\phi, 0\in\Delta a\}$ は空である

を満足するものをいう。

極値であるための必要条件を求めるために，次のような仮定をおけば，応用上有効であると思われる.

まず，(Γ, D)-極値 $\bar{a}\in A'$ に対しては次の仮定をおく.

<u>仮定1.1:</u> (Γ, D)-極値 $\bar{a}$ に対し，位相線形空間 X と，その中の凸集合 K と，集合値凸関数 $\Psi: K\to Y_{co}$ が存在して次の条件を満す：任意の $x\in K$，任意の零近傍 $V\subset Y$，任意の元 $y\in\Psi x\cap\mathrm{int}D$，任意の元 $\eta\in\Gamma\bar{a}\cap D$，任意の正数 δ に対し，正数 $\varepsilon_0\in(0,\delta)$ と元 $a\in A$ が存在して

$$\frac{\Gamma a-\eta}{\varepsilon_0}\cap(y-\eta+V)\neq\phi$$

が成立する.

上の仮定の下に，必要条件は次のように述べられる.

<u>定理1.1:</u> (Γ, D)-極値 $\bar{a}$ に対し，仮定1.1が満たされていれば，非零連続線形汎関数 $\bar{y}^*\in Y^*$ と実数 $\bar{\mu}$ が存在して

(1.1) $\quad \bar{y}^*(y)\le\bar{\mu} \qquad \forall y\in D$,

(1.2) $\quad \bar{y}^*(y)\ge\bar{\mu} \qquad \forall y\in\Psi x,\ \forall x\in K$

が成立する.

(Δ,Γ,D)-極値$\bar{a}\in A'$に対しては，次の仮定をおく．

<u>仮定1.2:</u> (Δ,Γ,D)-極値$\bar{a}$に対し，位相線形空間Xと，その中の凸集合Kと，集合値凸関数$\Psi: K\to Y_{co}$と，集合値アフィン関数$\Lambda: K\to \mathbb{R}^m_{co}$が存在して次の条件を満す：$K$の中の任意の$k$-シンプレックス$S$で，$k\leq m$かつ，ある$x\in S$に対して$0\in\Lambda x$なるもの，$Y$の中の任意の零近傍$V$，$\mathbb{R}^m$の中の任意の閉凸零近傍$U$，任意の正数$\delta$，任意の連続1価関数$\lambda: S\to\mathbb{R}^m$で，$\lambda(x)\in\Lambda(x)\ \forall x\in S$なるもの，任意の連続1価関数$\psi: S\to Y$で$\psi(x)\in\Psi x\cap \mathrm{int}\,D\ \forall x\in S$なるもの，任意の元$\eta\in\Gamma\bar{a}\cap D$に対し，実数$\varepsilon_0\neq 0$，実数$\varepsilon_1\in(0,\delta)$，1価関数$\theta: S\to A$が存在して次の条件を満足する．

(1.3) $\dfrac{\Gamma(\theta(x))-\eta}{\varepsilon_1}\cap\left(co(\psi(S))-\eta+V\right)\neq\emptyset \qquad \forall x\in S,$

(1.4) $\dfrac{\Delta(\theta(x))}{\varepsilon_0}\cap\{\lambda(x)+U\}\neq\emptyset \qquad \forall x\in S,$

(1.5) $\Delta(\theta(x)): S\to S$は閉集合値関数

(1.6) Kの任意の凸集合Cで$\dim C\geq m$なるものと，任意のアフィン独立なベクトル$z_0,\dots,z_m\in\{z\mid z\in\Lambda x, x\in C\}$に対してアフィン独立なベクトル$x_0,\dots,x_m\in C$が存在して

$$z_i\in\Lambda x_i \qquad i=0,1,\dots,m$$

が成立する．

上の仮定の下に，次のような必要条件が導びける．

定理1.2：(Δ,Γ,D)-極値$\bar{a}$に対し，仮定1.2が満されていれば，連続線形汎関数$\bar{y}^*\in Y^*$とベクトル$\bar{z}\in \mathbb{R}^m$と，$((\bar{y}^*,\bar{z})\neq 0)$，実数$\bar{\mu}$が存在し

(1.7)　$\bar{y}^*(y)\leq \bar{\mu}$　　　$\forall y\in D$,

(1.8)　$\bar{y}^*(y)+\bar{z}^T z\geq \bar{\mu}$　$\forall y\in \Psi x,\ \forall z\in \Lambda x,\ \forall x\in K$

が成立する。

もし，集合Dが閉凸錐ならば，定理1.1と定理1.2において，少し強い必要条件が導けるが詳細は略する。

ここで述べた(Γ,D)-極値，又は(Δ,Γ,D)-極値は，Neustadtの極値の拡張になっている。

§2. 数理計画問題

(Γ,D)-極値，又は(Δ,Γ,D)-極値で扱える数理計画問題は次のようなものがある。

Xと$\tilde{Y}$を位相線形空間，AをXの任意の部分集合，$\tilde{D}$を$\tilde{Y}$の閉凸部分体，$f:A\to\mathbb{R}$を1価関数，$\tilde{\Gamma}:A\to\tilde{Y}_\omega$を集合値関数としたとき，次の問題を考える。

(PM)　$\min\{f(x)\mid x\in A,\ \tilde{\Gamma}x\cap\tilde{D}\neq\emptyset\}$.

$\bar{x}$を問題(PM)の最適解とし

$$A'=A,$$

$$Y=\mathbb{R}\times\tilde{Y},$$

$$D = \mathbb{R}_- \times \hat{D},$$

$$\Gamma x = (f(x) - f(\bar{x}) + \mathbb{R}_+) \times \tilde{\Gamma} x \qquad \forall x \in A$$

とおけば，$\bar{x}$ は (Γ, D)-極値であることがわかる．

さらに，$\Delta : A \to \mathbb{R}^m_{co}$ を集合値関数としたとき，もう一つの問題は次のようなものである．

$$(\mathrm{PM}_0) \qquad \min\{ f(x) \mid x \in A,\ \tilde{\Gamma} x \cap \hat{D} \neq \phi,\ 0 \in \Delta x \}.$$

$\bar{x}$ を問題 (PM_0) の最適解とすれば，

$$A' = A,$$

$$Y = \mathbb{R} \times \tilde{Y},$$

$$D = \mathbb{R}_- \times \hat{D},$$

$$\Gamma x = (f(x) - f(\bar{x}) + \mathbb{R}_+) \times \tilde{\Gamma} x \qquad \forall x \in A$$

とおくことにより，$\bar{x}$ は (Δ, Γ, D)-極値であることがわかる．

§3. 集合値関数の微分可能性

最初に半微分可能性について述べる．

X と Y を位相線形空間とし，A を X の任意の部分集合，$\Gamma : A \to Y_{co}$ を集合値関数とする．まず，最適化問題においてよく用いられる接錐を定義しておく．

A の点 $\bar{x} (\in A)$ での接錐 $T[A, \bar{x}]$ とは

$$T[A, \bar{x}] := \{ x \in X \mid {}^{\forall}\text{零近傍 } U \subset X,\ {}^{\forall}\varepsilon > 0 \text{ に対し } {}^{\exists}\xi \in x + U,\ {}^{\exists}\delta \in (0, \varepsilon) : \bar{x} + \delta \xi \in A \}$$

のことである．この $T[A,\bar{x}]$ は閉集合になる．

定義3.1: 集合値関数 $\Gamma: A \to Y_\omega$ が A に関して点 $\bar{x}\,(\in A)$ で半微分可能とは，点 $x \in T[A,\bar{x}]$ と $y \in Y$ が存在して次の条件を満足するときをいう：任意の元 $\eta \in \Gamma\bar{x}$，任意の零近傍 $U \subset X$，任意の零近傍 $V \subset Y$，任意の正数 ε に対し，元 $\xi \in x + U$ と実数 $\lambda \in (0, \varepsilon)$ が存在して

$$\bar{x} + \lambda\xi \in A,$$
$$\frac{\Gamma(\bar{x}+\lambda\xi) - \eta}{\lambda} \cap (y - \eta + V) \neq \phi$$

が成立する．x を固定したとき，上の条件を満す y のすべての集合を $\partial\Gamma_A(\bar{x})x$ と書く．さらに $\partial\Gamma_A(\bar{x})$ の定義域 $\mathrm{Dom}\,\partial\Gamma_A(\bar{x})$ は

$$\mathrm{Dom}\,\partial\Gamma_A(\bar{x}) := \{x \mid x \in T[A,\bar{x}],\ \partial\Gamma_A(\bar{x})x \neq \phi\}$$

とする．

性質3.1: $0 \in \mathrm{Dom}\,\partial\Gamma_A(\bar{x})$ そして $\Gamma\bar{x} \subset \partial\Gamma_A(\bar{x})0$．

性質3.2: Γ が A に関して $\bar{x}$ で半微分可能ならば

$$\bigcap_{\eta \in \Gamma\bar{x}} \{T[G(\Gamma),(\bar{x},\eta)] + (0,\eta)\} = \{(x,y) \mid y \in \partial\Gamma_A(\bar{x})x\}$$

が成立する．ここで $G(\Gamma)$ は Γ のグラフ $\{(x,y) \mid y \in \Gamma x\}$ のことである．

性質3.3: A が凸集合で，Γ が集合値凸関数ならば，Γ は A に関して A の各点 y で半微分可能で

$$\Gamma x \subset \partial\Gamma_A(y)(x-y) \qquad \forall x \in A$$

が成立する．

次に半微分可能性より強い概念である微分可能性について述べる．

定義3.2: 集合値関数 $\Gamma : A \to Y_{co}$ が，A に関して点 $\bar{x}$ で微分可能とは，元 $x \in T[A, \bar{x}]$ と $y \in Y$ が存在して次の条件を満足するときをいう：任意の $\eta \in \Gamma\bar{x}$ と任意の零近傍 $V \subset Y$ に対し，正数 δ と零近傍 $U \subset X$ が存在して

$$\frac{\Gamma(\bar{x}+\varepsilon\xi)-\eta}{\varepsilon} \cap (y-\eta+V) \neq \emptyset$$

$$\forall \xi \in x+U,\ \forall \varepsilon \in (0, \delta)\ \ \text{with}\ \ \bar{x}+\varepsilon\xi \in A$$

が成立する．x を固定したとき，上の条件を満す y のすべての集合を $\nabla\Gamma_A(\bar{x})x$ と書く．$\nabla\Gamma_A(\bar{x})$ の定義域 $\mathrm{Dom}\nabla\Gamma_A(\bar{x})$ は

$$\mathrm{Dom}\nabla\Gamma_A(\bar{x}) := \{x \mid x \in T[A, \bar{x}],\ \nabla\Gamma_A(\bar{x})x \neq \emptyset\}$$

で定義される．このとき，$0 \in \mathrm{Dom}\nabla\Gamma_A(\bar{x})$ を仮定しておく．

性質3.4: Γ が A に関して $\bar{x}$ で微分可能ならば，Γ は A に関して $\bar{x}$ で下半連続である．

注意: 集合値関数 $\Gamma : A \to Y_{co}$ が A に関して $\bar{x}$ で下半連続とは，任意の開集合 $\mathcal{O} \subset Y$ で $\mathcal{O} \cap \Gamma\bar{x} \neq \emptyset$ なるものに対し，$\bar{x}$ の近傍 $U(\bar{x}) \subset X$ が存在して

$$\mathcal{O} \cap \Gamma x \neq \emptyset \qquad \forall x \in U(\bar{x}) \cap A$$

が成立するときをいう．

性質3.5: A が凸集合とし，$\Gamma : A \to Y_{co}$ が集合値凸関数で

かつAに関して$\bar{x}$で下半連続ならば，ΓはAに関して$\bar{x}$で微分可能で

$$\Gamma x \subset \nabla\Gamma_A(\bar{x})(x-\bar{x}) \qquad \forall x \in A$$

が成立する.

§4. 最適性の必要条件

前節で導入した微分を用いて，最適性の必要条件を述べる.以下は問題（PM）に対してであるが，問題（PM_0）に対しても同様の結果がえられる.

定理4.1: $\bar{x}$を問題（PM）の最適解とし，次の仮定をおく.

(i) fと$\tilde{\Gamma}$はAに関して$\bar{x}$で微分可能

(ii) $\mathrm{Dom}\nabla f_A(\bar{x}) \cap \mathrm{Dom}\nabla\tilde{\Gamma}_A(\bar{x})$ の中の凸集合Kで $0 \in K$ なるものがある

(iii) $\nabla f_A(\bar{x})x$ と $\nabla\tilde{\Gamma}_A(\bar{x})x$ はxに関してK上の凸関数である.

そのとき，実数$\bar{\alpha}$と連続線形汎関数$\bar{y}^* \in Y^*$で，共には零にならないものと実数$\bar{\mu}$が存在して次の条件を満す.

(4.1) $\quad \bar{\alpha} \geq 0$,

(4.2) $\quad \bar{y}^*(y) \leq \bar{\mu} \qquad \forall y \in \tilde{D}$,

(4.3) $\quad \bar{y}^*(y) = \bar{\mu} \qquad \forall y \in \tilde{\Gamma}\bar{x} \cap \tilde{D}$,

(4.4) $\quad \bar{\alpha}\nabla f_A(\bar{x})x + \bar{y}^*(y) \geq \bar{\alpha} f(\bar{x}) + \bar{\mu}$

$$\forall x \in K,\ \forall y \in \nabla\tilde{\Gamma}_A(\bar{x})x.$$

この定理は Fritz-John 定理の拡張にあたるが，Kuhn-Tucker 定理に対するものは，次のように述べられる．

<u>定理4.2:</u> $\bar{x}$ を問題（PM）の最適解とし，定理4.1の仮定(i)～(iii) をおく．さらに正則性条件として

$\nabla \Gamma_A(\bar{x})x_0 \cap \mathrm{int}\,\hat{D} \neq \emptyset$ なる元 $x_0 \in K$ が存在する

を仮定すれば，連続線形汎関数 $\bar{y}^* \in Y^*$ と実数 $\bar{\mu}$ が存在して

(4.5) $\bar{y}^*(y) \leq \bar{\mu} \qquad \forall y \in \hat{D}$,

(4.6) $\bar{y}^*(y) = \bar{\mu} \qquad \forall y \in \Gamma\bar{x} \cap \hat{D}$,

(4.7) $\nabla f_A(\bar{x})x + \bar{y}^*(y) \geq f(\bar{x}) + \bar{\mu}$

$$\forall x \in K, \quad \forall y \in \nabla \Gamma_A(\bar{x})x.$$

が成立する．

<u>§5. 最適制御問題</u>

以上の最適化問題の一つの応用として，次のような最適制御問題を考える．

I を閉区間 $[t_0, t_1]$ とし，G を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合，U を $\mathbb{R}^r$ の任意の部分集合，制御関数 $u: I \to \mathbb{R}^r$ は I 上で可測かつ本質的に有界で，$u(t) \in U \quad \forall t \in I$ なるものとし，制御関数 u の全体のクラスを $\mathcal{U}$ とする．さらに，$f(x,u,t): G \times U \times I \to \mathbb{R}^n$ は連続で，x に関して連続微分可能，関数 $g(x,t)$: $G \times I \to \mathbb{R}$ は2回連続微分可能，k 個の実数 $\tau_1, \cdots, \tau_k$ は

$t_0=\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_k=t_1$ を満し，H は $\mathbb{R}^l$ の閉部分集合，関数 $\varphi(x^1,\dots,x^k,y):G\times\cdots\times G\times H\to\mathbb{R}$ は連続微分可能で，y に関して擬凸，$h(x^1,\dots,x^k):G\times\cdots\times G\to\mathbb{R}^m$ は連続微分可能関数，B は H の閉部分集合で内部をもち，関数 $\phi(x^1,\dots,x^k):G\times\cdots\times G\to\mathbb{R}$ は連続微分可能とする．そのとき，次の最適制御問題を考える．

$$
\text{(PS)}\qquad \min\ \phi(x(\tau_1),\dots,x(\tau_k))
$$

$$
\begin{aligned}
\text{subject to}\ \ & \dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t) \quad \text{a.a. } t\in I \\
& \hspace{12em} \text{for some } u\in\mathcal{U}, \\
& g(x(t),t)\geq 0 \qquad \forall t\in I, \\
& h(x(\tau_1),\dots,x(\tau_k))=0, \\
& \varphi(x(\tau_1),\dots,x(\tau_k),y)\leq 0 \quad \text{for some } y\in B.
\end{aligned}
$$

この問題（PS）は，問題（PM_0）に変換できるが，特に集合値関数は

$$
\Gamma_2 x=\{y\in\mathbb{R}^l \mid \varphi(x(\tau_1),\dots,x(\tau_k),y)\leq 0\} \qquad \forall x\in\tilde{G},
$$

と定義され，制約条件は

$$
\Gamma_2 x\cap B\neq\emptyset
$$

と表わされる．集合値関数 Γ_2 の微分を計算しよう．

<u>命題5.1:</u>　集合 $E:=\{\eta\in\mathbb{R}^l \mid \varphi(\bar{x}(\tau_1),\dots,\bar{x}(\tau_k),\eta)=0\}$ に対し，

$$
\frac{\partial\varphi(\bar{x}(\tau_1),\dots,\bar{x}(\tau_k),\eta)}{\partial y}\neq 0 \qquad \forall\eta\in E
$$

を仮定すれば，Γ_2 は $\bar{x}$ で微分可能で

$$\nabla\Gamma_2(\bar{x})x = \Big\{ y \in \mathbb{R}^{\ell} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(\bar{x}(\tau_1),\cdots,\bar{x}(\tau_k),\eta)}{\partial x^i} x(\tau_i) + \frac{\partial\varphi(\bar{x}(\tau_1),\cdots,\bar{x}(\tau_k),\eta)}{\partial y}(y-\eta) \le 0 \quad \forall \eta \in E \Big\}$$

となる．

上の微分を用いて最適性の必要条件を求めると次のようになる．

<u>定理5.1:</u> 最適制御問題（PS）を考える．$\bar{x}$ を最適軌道とし，$\bar{u}$ を最適制御とするとき，次の仮定をおく．

$$\{\eta \in \mathbb{R}^{\ell} \mid \varphi(\bar{x}(\tau_1),\cdots,\bar{x}(\tau_k),\eta) = 0\} = \{\eta_1,\cdots,\eta_q\},$$

$$\frac{\partial\varphi(\bar{x}(\tau_1),\cdots,\bar{x}(\tau_k),\eta_j)}{\partial y} \neq 0, \qquad j = 1,\cdots,q.$$

そのとき，実数 $\bar{\alpha}$，I 上の有界変動関数 $v : I \to \mathbb{R}$ で $v(t_1) = 0$ なるもの，ベクトル $\bar{p} \in \mathbb{R}^{\ell}$ と $\bar{\beta} \in \mathbb{R}^m$，実数 $\bar{\mu}$ が存在し，$(\bar{\alpha}, v, \bar{p}, \bar{\beta}) \neq 0$ で，かつ，次の条件を満す．

(5.1) $\quad \bar{\alpha} \ge 0,$

(5.2) $\quad \bar{p}^T y \le \bar{\mu} \qquad \forall y \in B,$

(5.3) $\quad v(t)$ は I 上単調減少である．

(5.4) $\quad \bar{p}^T y = \bar{\mu} \quad \forall y \in B \cap \{y \mid \varphi(\bar{x}(\tau_1),\cdots,\bar{x}(\tau_k),y) \le 0\},$

(5.5) $\quad v(t)$ は $g(x(t),t) > 0$ なる I の部分区間上で一定値をとる

さらに，実数 $\gamma_j \le 0$，$j = 1,\cdots,q$ が存在して

(5.6) $\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \gamma_j \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(\bar{x}(\tau_1),\cdots,\bar{x}(\tau_k),\eta_j)}{\partial x^i} \Phi(\tau_i)$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\bar{\alpha} \frac{\partial \phi(\bar{x}(\tau_1), \dots, \bar{x}(\tau_k))}{\partial x^i} + \bar{\beta}^T \frac{\partial h(\bar{x}(\tau_1), \dots, \bar{x}(\tau_k))}{\partial x^i} \right) \Phi(\tau_i)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial g(\bar{x}(t), t)}{\partial x} \Phi(t)\, d\nu(t)$$

(5.7) $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \gamma_j \frac{\partial \varphi(\bar{x}(\tau_1), \dots, \bar{x}(\tau_k), \eta_j)}{\partial y} = \bar{\rho}^T$

(5.8) $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \gamma_j \frac{\partial \varphi(\bar{x}(\tau_1), \dots, \bar{x}(\tau_k), \eta_j)}{\partial y} \eta_j \geq \bar{\mu}$

が成立する．また，関数 $\psi_j(t)$, $j=1, \dots, q$, $\hat{\varphi}(t): I \to \mathbb{R}^n$ が存在し，$[t_0, \tau_2), [\tau_2, \tau_3), \dots, [\tau_{k-2}, \tau_{k-1}), [\tau_{k-1}, t_1]$ 上で絶対連続で次の条件を満足する．

(5.9) $\psi_j(\tau_k) = \psi_j(t_1) = \partial_{x^k} \varphi_j \qquad j=1, \dots, q$

(5.10) $\dot{\psi}_j(s) = -\psi_j(s) \dfrac{\partial f(\bar{x}(s), \bar{u}(s), s)}{\partial x} \qquad$ a.a. $s \in I$, $j=1, \dots, q$,

(5.11) $\psi_j(\tau_i) - \psi_j(\tau_i - 0) = -\partial_{x^i} \varphi_j \qquad i=2, \dots, k-1,$
$j=1, \dots, q,$

(5.12) $\psi_j(\tau_1) = \psi_j(t_0) = \displaystyle\sum_{i=2}^{k} \partial_{x^i} \varphi_j \Phi(\tau_i) \qquad j=1, \dots, q,$

(5.13) $\dot{\hat{\varphi}}(t) = -\hat{\varphi}(t) \dfrac{\partial f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}{\partial x} + \nu(t) \dfrac{\partial p(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}{\partial t}$

a.a. $t \in I$,

ここで，$p(x, u, t) := \dfrac{\partial g(x, t)}{\partial x} f(x, u, t) + \dfrac{\partial g(x, t)}{\partial t}$

(5.14) $\hat{\varphi}(\tau_k) = \hat{\varphi}(t_1) = \bar{\alpha}\, \partial_{x^k} \phi + \bar{\beta}^T \partial_{x^k} h$

(5.15) $\hat{\varphi}(\tau_i) - \hat{\varphi}(\tau_i - 0) = -\bar{\alpha}\, \partial_{x^i} \phi - \bar{\beta}^T \partial_{x^i} h, \quad i=2, \dots, k-1,$

(5.16) $\hat{\varphi}(\tau_1) = \hat{\varphi}(t_0) = \displaystyle\sum_{i=2}^{k} (\bar{\alpha} \partial_{x^i} \phi + \bar{\beta}^T \partial_{x^i} h) - \int_{t_0}^{t_1} \nu(t) \dot{\varphi}_0(t)\, dt$

$$= \sum_{j=1}^{q} \gamma_j \sum_{i=1}^{k} \partial_{x^i} \varphi_j \, \Phi(\tau_i) - \bar{\alpha}\, \partial_{x^1} \phi - \bar{\beta}^T \partial_{x^1} h + v(t_0) \frac{\partial g(\bar{x}(t_0), t_0)}{\partial x}$$

$$(5.17) \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \psi_j(s)\, \delta f_u(s)\, ds + \partial_y \varphi_j (y - \eta_j) \le 0 & \forall u \in \mathcal{U},\ j = 1, \cdots, q \\ \text{ならば} \\ \int_{t_0}^{t_1} [\tilde{\psi}(s) - v(s) \frac{\partial g(\bar{x}(s), s)}{\partial x}]\, \delta f_u(s)\, ds + \bar{\beta}^T y \ge \bar{\mu} & \forall u \in \mathcal{U}, \end{cases}$$

ここで、

$$\partial_{x^i} \varphi_j = \frac{\partial \varphi(\bar{x}(\tau_1), \cdots, \bar{x}(\tau_k), \eta_j)}{\partial x^i} \qquad i = 1, \cdots, k, \quad j = 1, \cdots, q,$$

$$\partial_{x^i} h = \frac{\partial h(\bar{x}(\tau_1), \cdots, \bar{x}(\tau_k))}{\partial x^i} \qquad i = 1, \cdots, k,$$

$$\delta f_u(s) = f(\bar{x}(s), u(s), s) - f(\bar{x}(s), \bar{u}(s), s) \quad \forall s \in I, \ \forall u \in \mathcal{U},$$

$$\partial_y \varphi_j = \frac{\partial \varphi(\bar{x}(\tau_1), \cdots, \bar{x}(\tau_k), \eta_j)}{\partial y} \qquad j = 1, \cdots, q,$$

$$\partial_x g(t) = \frac{\partial g(\bar{x}(t), t)}{\partial x} \qquad \forall t \in I,$$

$$\partial_{x^i} \phi = \frac{\partial \phi(\bar{x}(\tau_1), \cdots, \bar{x}(\tau_k))}{\partial x^i} \qquad i = 1, \cdots, k.$$

注意：上の式（5.17）は制御理論における最大原理に対応している。

参考文献

[1] E. Blum & W. Oettli: Korrespondenzen in der Optimierung. Manuscript.

[2] J. Borwein: Multivalued convexity and optimization.

Math. Programming 13 (1977), 183 - 199.

[3] J. Gwinner: Dualitätstheorie für eine Klasse von allgemeinen Programmen. Operations Research Verfahren 22 (1976), 35-50.

[4] S. Tagawa: Optimierung mit mengenwertigen Abbildungen. Dissertation an der Universität Mannheim 1978.