数理解析研究所講究録
358巻 1979年 57-66

確率測度に関するある種の最小化問題について

九大 理　三苫 至

§1. 序　Eを実局所凸線型位相空間，$\mathcal{B}(E)$をE上の位相的 Borel field とする。ρをE上の凸関数で次を満たすとする。

(1)、ρは原点0に関して対称.

(2)、$\forall m \neq 0 \in E$ に対して $\rho(m) > \rho(0)$.

(3)、ρはE上の上半連続関数.

(4)、$\rho(0) \neq -\infty, +\infty$ 。

さて、μを$(E, \mathcal{B}(E))$上の確率測度で、次の様な weight function が定義できるとする。

$$\phi_\mu(z) = \int_E \rho(z-x)\,d\mu(x) \quad 。$$

ここで、次の様な最小化問題を考える。すなわち

$$\phi_\mu(m) = \inf_{z \in E} \phi_\mu(z)$$

なるmの存在と一意性である。これを最小化問題 $\mathcal{P}(\mu, \rho)$ と表わすことにする。以下において、$\mathcal{P}(\mu, \rho)$に関する結果

を報告する。

§2. 一般の場合　μに関して次の定義を設ける。

定義1. μが$g\in E$に関して対称であるとは

$$\mu(A)=\mu(2g-A) \quad \text{for } {}^{\forall}A\in\mathcal{B}(E)$$

なることとする。また$g=0$の時を単に対称と呼ぶ。

この時、ρの対称性(1)を使って$\phi_\mu(2g-z)=\phi_\mu(z)$を得る。また$\rho$の凸性より$\phi_\mu(z)$も凸関数である。故に次の補題を得る。

補題1. μが$g\in E$に関して対称ならばgは$\mathcal{P}(\mu,\rho)$の解である。

（証明）

$$\begin{aligned}\phi_\mu(g)&=\phi_\mu\left(\frac{2g-z}{2}+\frac{z}{2}\right)\\&\leqq\frac{1}{2}\phi_\mu(2g-z)+\frac{1}{2}\phi_\mu(z)\\&=\frac{1}{2}\phi_\mu(z)+\frac{1}{2}\phi_\mu(z)\\&=\phi_\mu(z)\quad。\end{aligned}$$

従って、μの対称性があれば$\mathcal{P}(\mu,\rho)$の解の存在が言える。そこで、μの対称性に関する次の補題を得た。

定義2. μがτ-正則であるとは、任意の開集合の有向族$\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$に対して

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha\right)=\sup_{\alpha\in\Lambda}\mu(G_\alpha)$$

が成立することとする。

補題2. μがτ-正則であって、${}^{\forall}\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n\in E'$

に対して、n次元分布（$<\cdot,\xi_1>,<\cdot,\xi_2>,\cdots<\cdot,\xi_n>$）と（$-<\cdot,\xi_1>,-<\cdot,\xi_2>,\cdots-<\cdot,\xi_n>$）とが一致しているならば$\mu$は対称である。ここに$E'$は$E$の位相双対である。

証明はEの任意の閉凸集合が、それを含む筒的閉凸包の共通部分になることとμのτ-正則性を使って完了する。

次に一意性への準備として次の補題を示す。

<u>補題3.</u>　μがτ-正則ならば、ある$m\in E$があってmの任意の近傍Oに対して次がみたされる。

$$\mu(O)>0。$$

（証明）　背理法で示す。$\forall x\in E$に対して$\exists O_x$（xの近傍）があって　$\mu(O_x)=0$とする。$\mathcal{P}(E)\equiv\{E$の有限集合の全体$\}$。この時

$$1=\mu(E)=\mu(\bigcup_{x\in E}O_x)$$
$$=\sup_{P\in\mathcal{P}(E)}\mu(\bigcup_{x\in P}O_x)=0。$$

これは矛盾である。

<u>定義3.</u>　μが$g\in E$に関して凸とは、Aを任意の絶対凸閉集合とする時、任意の$y\in E$に対して

$$\mu(A+g)\geqq\mu(A+g+y)$$

が成立することとする。

この時、次の定理を得る。

<u>定理1.</u>　μをτ-正則で、gに関して対称で凸とする。

この時、g は $\mathcal{P}(\mu,\rho)$ の一意な解である。

（証明）　補題1によって、g は $\mathcal{P}(\mu,\rho)$ の解である。故に一意性を示せば良い。補題3によって $\exists m \in E$ があって原点に関する任意の絶対凸閉近傍 V に対して

$$\mu(m+V)>0。$$

μ の g に関する凸性によって

$$\mu(g+V) \geqq \mu(g+V+m-g)=\mu(m+V)>0。$$

さて、g 以外に解 h があったとする。

$$\begin{aligned}&2\{\phi_\mu(h)-\phi_\mu(g)\}\\&=\int_E \{\rho(h-x)+\rho(h-2g+x)-2\rho(g-x)\}d\mu(x)\\&=0。\end{aligned}$$

ここで、ρ の凸性と対称性を使うと

$$\begin{aligned}\rho(g-x)&=\rho\left(\frac{h-x}{2}+\frac{-h-x+2g}{2}\right)\\&\leqq \frac{1}{2}\rho(h-x)+\frac{1}{2}\rho(h+x-2g)。\end{aligned}$$

故に　$\rho(h-x)+\rho(h-2g+x)-2\rho(g-x) \geqq 0$ 。

故に　$\rho(h-x)+\rho(h-2g+x)=2\rho(g-x)$ a.e. μ。

さらに、
$$\begin{aligned}\rho(h-g)&=\rho\left(\frac{h-x}{2}+\frac{h-2g+x}{2}\right)\\&\leqq \frac{1}{2}\{\rho(h-x)+\rho(h-2g+x)\}\\&\leqq \rho(g-x) \quad \text{a.e. } \mu。\end{aligned}$$

故に　$\mu(x\in E:\ \rho(x-g)<\rho(h-g))=0$。

ここで $h \neq g$ だから、ρ に関する仮定の(2)によって

$$\rho(h-g) > \rho(0)\ 。$$

ρの仮定(3)を使うと、ある0の絶対凸閉近傍Vが存在して

$$g+V \subset \{x \in E : \rho(x-g) < \rho(h-g)\}$$

μのgに関する凸性より$\mu(g+V) > 0$だったからこれは矛盾である。証明了。

所で以上の様なうまい条件を満たす確率測度μは存在するだろうか？

定義4. μが$(E, \mathcal{B}(E))$上のGauss測度であるとは、$\forall \xi \in E'$に対し、その特性汎関数

$$\int_E \exp i\langle x, \xi\rangle d\mu(x)$$
$$= \exp\{i\,m(\xi) - \tfrac{1}{2}V(\xi)\}$$

なる時である。ここに$\langle\ ,\ \rangle$は標準双線型形式であり$m(\xi)$は平均、$V(\xi)$は共分散である。$m(\xi)=0$の時を特に中心化されていると言う。

定義5. μが$(E, \mathcal{B}(E))$上のRadon測度であるとは

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact} \subset A\}$$

が任意の$A \in \mathcal{B}(E)$に対して成立する時を言う。

注意. EがBanach空間でμが確率測度の時、τ-正則であることとRadonであることとは同値である。

定義6. μが$(E, \mathcal{B}(E))$上のGauss測度の時にEの元m_μが次を満たす時平均ベクトルと言う。

$$\langle m_\mu, \xi \rangle = m(\xi) \quad \text{for } {}^\forall \xi \in E'。$$

μが$(E, \mathcal{B}(E))$上のGaussian Radon測度の時に平均ベクトルm_μがEに存在して、m_μに関して凸であることはC. Borellによって証明された。[2], [3]。またm_μに関して対称であることは補題2より明らか。以上より定理1の系として次を得る。

<u>定理2</u>　μが$(E, \mathcal{B}(E))$上のGaussian Radon測度であってweight functionが定義可能ならば、平均ベクトルm_μは$\mathcal{P}(\mu, \rho)$の一意な解である。

<u>§3. Banach 空間上のGauss測度の場合</u>

Eを Banach空間、そのノルムを$\|\cdot\|_E$とする。μが$(E, \mathcal{B}(E))$上のGaussian Radon測度であれば、Fernique[4]による次の補題がある。

<u>補題4.</u>　${}^\exists\gamma > 0$があって$\int_E \exp \gamma \|x\|_E^2 \, d\mu(x) < +\infty$。

注意、この補題は、μがE'上のweak＊位相に関するRadonの時にも$\|\cdot\|_E$を$\|\cdot\|_{E'}^*$に代えて成立する。

ここで$\rho = \|\cdot\|_E^n$を考えると仮定(1)(2)(3)(4)を満たしている。故に定理2の系として次の定理を得る。

<u>定理3.</u>　Eを Banach空間とし、μを$(E, \mathcal{B}(E))$上のGaussian Radon測度とする。この時、平均ベクトルm_μは$\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_E^n)$の一意な解である。

さて、E'上の weak *-位相に関する Borel field を $W(E',E)$と表わそう。μが $(E', W(E',E))$ 上の Gauss 測度であれば、平均ベクトル m_μ は E'に存在する。そこでもしμがE'のノルム位相に関する Radon 測度に拡張されるならば、今の定理から m_μ は $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_{E'}^{n})$の一意な解となる。そこでこの拡張可能性に対して次の補題が得られた。

補題5. (I. Mitoma, H. Sato, A. Tortrat [5], [6])

μが $(E', W(E',E))$ 上の Gaussian Radon 測度である時、E'のノルム位相に関する Radon 測度に拡張される為の必要十分条件は次で与えられる。

$$\mu(x \in E' : \|x - m_\mu\|_{E'} \leqq \gamma) > 0 \quad {}^\forall \gamma > 0 \quad 。$$

今までの議論は測度の Radon 性に基づいたものであるが次の結果はEのノルムの性質に基づいたものである。

定義7. ノルム$\|\cdot\|_E$ が狭義凸とは $\|a+b\|_E = \|a\|_E + \|b\|_E$ が成立する為の必要十分条件は ${}^\exists \rho' > 0$ が存在して $b = \rho' a$ である時を言う。

定理4. $\|\cdot\|_E$は狭義凸とする。μは $(E, \mathcal{B}(E))$上の確率測度で次をみたすとする。

(4). $\displaystyle\int_E \|x\|_E \, d\mu(x) < +\infty$

(5). μ は $g \in E$ に関して対称である

(6). $\mu(x \in E : \|x - g\|_E \leqq \gamma) \geqq \mu(x \in E : \|x - g - y\|_E \leqq \gamma)$

for $^\forall y \in E$, $^\forall \gamma > 0$。

この時、g は $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_E)$ の一意な解である。

(証明)　g の一意性だけを示せば良い。g 以外の解を m とする。この時

$$0 = 2\{\phi_\mu(m) - \phi_\mu(g)\}$$
$$= \int_E \{\|m-x\|_E + \|m-2g+x\|_E - 2\|g-x\|_E\} d\mu(x)。$$

故に

$$2\|g-x\|_E = \|m-x\|_E + \|m-2g+x\|_E \quad a.e.\ \mu 。$$

$\|\cdot\|_E$ は狭義凸だから　$m-2g+x = \rho'(x)(m-x)$ a.e. μ。

故に　$$x = \frac{2g}{\rho'(x)+1} + \frac{\rho'(x)-1}{\rho'(x)+1} m \quad a.e.\ \mu 。$$

注意　$m \neq g$ だから $\rho'(x) \neq -1$。

故に、μ は m と g の張る2次元部分空間の可測な部分に台を持っている。従って、μ は E 上のノルムに関する Radon 測度と考えられる。故に、前の定理の証明と同様にして、$\mu(x \in E : \|g-x\|_E < \|m-g\|_E) = 0$。これは矛盾である。証明了。

この定理の系として次が言える。

<u>系 1.</u>　μ を $(E', W(E', E))$ 上の Gauss 測度で weak * 位相に関して Radon とする。この時、もし $\|\cdot\|_{E'}$ が狭義凸であれば平均ベクトル m_μ は $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_{E'})$ の一意な解である。

さて、問題 $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_E)$ を μ が Gauss 測度であって、E が数列空間の場合に考える。　ℓ^p ノルムは $(1<p<+\infty)$ 狭義

凸である。また c_0, ℓ^1 は可分だから Radon 測度となって今までのことから $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_E)$ は一意な解を持つ。ℓ^∞ については一意性が成立しない Gauss 測度を作ることができる。

例　$X_1 = \delta(0), X_2, X_3, \cdots X_n \cdots$ は独立で平均 0 で分散 σ_i の Gauss 型確率変数列とする。$\sigma_i = \dfrac{8}{(\log i^2)}$ とする。この時、

$$\sum_{i=2}^{\infty} \exp - \frac{4}{\sigma_i} = +\infty$$
$$\sum_{i=2}^{\infty} \exp - \frac{R}{\sigma_i} < +\infty \quad (R > 4)\text{。}$$

故に確率変数列 $(X_1, X_2, X_3, \cdots X_n \cdots)$ は $(\ell^\infty, W(\ell^\infty, \ell^1))$ 上に第 n 座標関数 $X_n(\cdot)$ の分布が X_n の分布に等しくなる様な中心化された Gauss 測度 μ を定める。$\mu(x \in \ell^\infty : \|x\|_{\ell^\infty} < 2) = 0$ である。この時、$(1, 0, 0, \cdots 0, \cdots) \equiv m$ は 0 以外の $\mathcal{P}(\mu, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ の解である。

（証明）　$x \in \ell^\infty$ に対して $Y_i(x) = \sup_{j \neq i} |X_j(x)|$ とする。この時次の補題が成立する。

補題 6.　今の場合、$\mu(x \in \ell^\infty : Y_i(x) < 2) = 0$。

$$\begin{aligned} &2\{\phi_\mu(m) - \phi_\mu(0)\} \\ &= \int_A 1 - \big| |X_1(x)| - Y_1(x) \big| d\mu(x)\text{。} \end{aligned}$$

ここに $A = \{x \in \ell^\infty : \big| |X_1(x)| - Y_1(x) \big| < 1\}$。故に次を得る。

$$\mu(A) = \mu(x \in \ell^\infty : Y_1(x) < 1) = 0 \quad\text{。}$$

故に $\phi_\mu(m)=\phi_\mu(0)$ である。証明了。

最後にこの問題は参考文献の[1]に触発されて考えたものである。この報告は、すでに出版されている我々の論文[5]に少し形式的変化を加えたものである。

参考文献

[1]. B. Beauzamy : Points minimaux dans les espaces de Banach. Seminaire Maurey-Schwartz 1974-1975, Exposé N° 18-19.

[2]. C. Borell : Convex measures on locally convex spaces. Arkiv för Mat. Vol. 12 (1974) PP. 239-252.

[3]. C. Borell : Gaussian Radon measures on locally convex spaces.

[4]. X. Fernique : Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Ecole d'été de Calcul des Probabilités, St. Flour (1974).

[5]. I. Mitoma and H. Sato : minimal Point of a Gaussian Measure. Memo. of the Fac. of Scie. Kyushu Univ. Ser. A. Vol. 31. NO. 1. (1977) PP. 71-86.

[6]. H. Sato and A. Tortrat : Prolongements τ-régulière de lois des probabilité et application aux lois gaussiennes. C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, Vol. 280 (1975) PP. 909-911.