数理解析研究所講究録
360巻 1979年 159-179

ある非定常剥離を伴う流れの数学的モデル

慶大 物理　松信 八十男

§1. はじめに

よく知られているように，流体運動を支配する Navier-Stokes 方程式は微分階数が高いことと非線形項をもつことのために，解析が困難であり，具体的に流れに適用できる例はきわめて少ない。とくに非定常流の解析は定常流に比べてはるかに困難である。

この報告では，無限に広い平板に対し，有限の距離にある点湧き出しまたは点渦による流れがあるときの2次元の流れの場を解析することを試みる。この場合，平板上に流線の付着または剥離が生じるが，その付近の非定常流の構造を調べておくことは，流体力学的に見て意義のあることである。

解析の方法は慣性効果を表わす非線形項が無視できるものとして，定常および非定常の Stokes 解を求め，ついで，定常の場合に慣性の効果を考慮することにする。非定常流に対する慣性の効果はまだ得られていない。

§2. 問題設定とStokes解

平板の上面に沿ってx軸をとり、y軸上の点$(0, a)$に流量$2\pi c$の点湧き出しがあるとしよう(図1)。

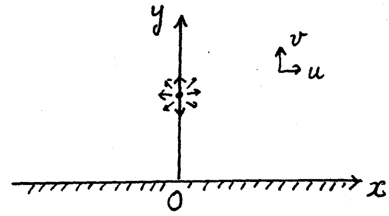

図 1. 配置図

このとき、平板上$(y=0)$で滑りなしの条件を満たし、無限遠方で静止する2次元の流れの場を決定する。湧き出しの強さcが時間とともに変動することによって流れは非定常になるものと考える。

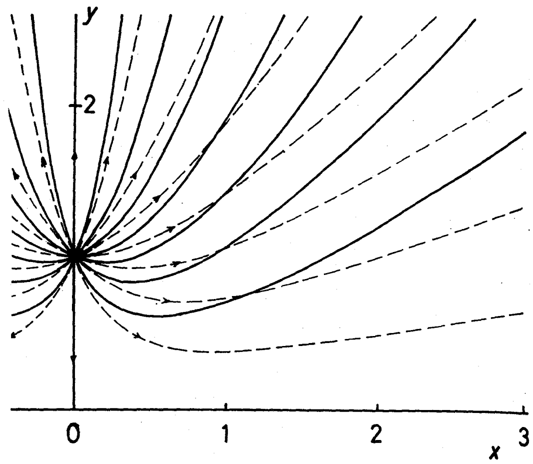

図2. 図1に対する定常Stokes流、および定常渦なし流(破線)の流線。(ψは等間隔)

まず、慣性効果を無視して非定常Stokes解を導くことから始めよう。図1に対応する渦なしの流れは、流れの関数ψ_{irr}

$$\psi_{irr} = c\left(\tan^{-1}\frac{y-1}{x} + \tan^{-1}\frac{y+1}{x}\right) \qquad (2.1)$$

によって記述される[1]。ただし、x, yはaで規格化されている。滑りなしの条件を満たすStokes解は、非定常Stokes方程式

$$\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2\psi = 0, \quad \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \qquad (2.2)$$

を満足する別の解(ψ_νと書く)をこれに加えたものになる。ただし、νは運動粘性率、tは時間を表わす。

さて
$$c = c_0 \cos \Omega t \tag{2.3}$$
（Ω は角振動数）とすると，ψ は
$$\psi = \mathcal{R}\, \Psi(x,y)\, e^{i\Omega t} \tag{2.4}$$
（$\mathcal{R}$ は実数部分）のように表わされるであろう。これを(2.2)に入れ，無次元数（Womersley 数）
$$\alpha = a\sqrt{\Omega/\nu}$$
を定義すると，
$$(\nabla^2 - \beta^2)\nabla^2 \Psi = 0 \qquad \beta^2 = i\alpha^2 \tag{2.5}$$
が得られる。これを境界条件
$$y = 0 \text{ で } \quad \Psi = \partial\Psi/\partial y = 0 \tag{2.6}$$
の下で解けば問題は解決される。

そのために Fourier 変換（$\Psi \to \tilde{\Psi}$）：
$$\tilde{\Psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi e^{isx}\, dx \ , \quad \Psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi} e^{-isx} ds \tag{2.7}$$
を利用するのが便利である。[2] (2.5), (2.6) の F 変換は
$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \beta^2 - s^2\right)\left(\frac{d^2}{dy^2} - s^2\right)\tilde{\Psi} = 0 \tag{2.8}$$
$$y = 0 \text{ で } \quad \tilde{\Psi} = \partial\tilde{\Psi}/\partial y = 0 \tag{2.9}$$
となる。$y \to \infty$ で減衰する (2.8) の解は，A, B を任意定数として
$$\tilde{\Psi}_v = A e^{-|s|y} + B e^{-\sqrt{s^2+\beta^2}\, y} \qquad (\beta \neq 0) \tag{2.10}$$
となる。一方，渦なしの解 ψ_{irr} の振幅 Ψ_{irr} の F 変換は

$$\tilde{\Psi}_{irr} = c_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tan^{-1} \frac{x}{1-y} - \tan^{-1} \frac{x}{1+y} \right) e^{isx} dx$$

$$= \frac{\pi i}{s} c_0 \left(e^{-(1-y)|s|} - e^{-(1+y)|s|} \right) \qquad (y<1) \quad (2.11)$$

となるので，$0 \leq y < 1$ に対して

$$\tilde{\Psi} = A e^{-|s|y} + B e^{-\sqrt{s^2+\beta^2}\, y} + \frac{\pi i}{s} c_0 \left(e^{-(1-y)|s|} - e^{-(1+y)|s|} \right) \quad (2.12)$$

となる。これに境界条件（2.9）を適用すれば，A，B を定めることができる：

$$A = -B = -\frac{2\pi i c_0}{\beta^2} \left(\sqrt{s^2+\beta^2} + |s| \right) e^{-|s|} \operatorname{sgn} s \qquad (2.13)$$

これを（2.12）に入れ，逆F変換を施せば，はじめの2項から

$$\Psi_v = -\frac{i c_0}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{s^2+\beta^2} + |s| \right) e^{-|s|} \operatorname{sgn} s \left(e^{-|s|y} - e^{-\sqrt{s^2+\beta^2}\, y} \right) e^{-isx} ds$$

$$= -\frac{2 c_0}{\beta^2} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{s^2+\beta^2} + s \right) e^{-s} \left(e^{-sy} - e^{-\sqrt{s^2+\beta^2}\, y} \right) \sin sx \, ds \quad (2.14)$$

この定積分を実行することは困難であるが，$y<1$ として y についてTaylor展開すると，

$$\Psi_v = -2c_0 \frac{xy}{1+x^2} + \frac{1}{2} c_0 y^2 \left(\frac{4x}{(1+x^2)^2} + I_s(\beta, x) \right) + O(y^3)$$

$$I_s(\beta, x) = 2 \int_0^{\infty} \sqrt{s^2+\beta^2}\, e^{-s} \sin sx \, ds \qquad (2.15)$$

一方，Ψ_{irr} の展開は

$$\Psi_{irr} = 2c_0 \frac{xy}{1+x^2} + O(y^3)$$

ゆえに　$\Psi = \Psi_{irr} + \Psi_v = \frac{1}{2} c_0 y^2 \left(\frac{4x}{(1+x^2)^2} + I_s(\beta, x) \right) + O(y^3)$ (2.16)

となって，境界条件は満たされていることがわかる。積分I_sは既知関数で表わすことができるが，それについては後で述べることにする。

上の結果を使って，平板上でのずり応力τ_wを求めることができる：（μは粘性率）

$$\tau_w = \mu\left(\nabla^2\psi\right)_{y=0} = \mu c_0\, \mathcal{R}\left(\frac{4x}{(1+x^2)^2} + I_s(\beta, x)\right) e^{i\Omega t} \tag{2.17}$$

また，平板上での圧力勾配を求めるには，

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_w = -\mu\left(\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi\right)_{y=0} \tag{2.18}$$

を利用すればよい。しかし，ψの展開で$O(y^3)$の項が必要となる。結果は

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_w = \mu c_0\, \mathcal{R}\left\{\frac{4x(3-x^2)}{(1+x^2)^3} + 2\beta^2\frac{x}{1+x^2} - \frac{\partial}{\partial x} I_c(\beta, x)\right\} e^{i\Omega t} \tag{2.19}$$

ここで

$$I_c(\beta, x) = 2\int_0^\infty \sqrt{s^2+\beta^2}\, e^{-s}\cos sx\, ds \tag{2.20}$$

§3 積分I_sとI_cの評価

(2.15)，(2.20)で与えられる定積分$I_s(\beta, x)$, $I_c(\beta, x)$について考えよう。$I_c + iI_s = I$と書くと

$$I(\beta, x) = 2\int_0^\infty \sqrt{s^2+\beta^2}\, e^{-s(1-ix)}\, ds \tag{3.1}$$

となり，Laplace 変換の公式が使える[3]． すなわち，

$$I(\beta,x)=\frac{\pi\beta}{\sigma}\left[\mathbb{H}_1(\beta\sigma)-Y_1(\beta\sigma)\right]\ ,\ \sigma=1-ix \tag{3.2}$$

となる。ここで $\mathbb{H}_1$ は Struve 関数，Y_1 は第2種の Bessel 関数である。I_c，I_s は (3.2) の β を実数と見なして，それぞれ実数部分，虚数部分をとればよい。$|\beta\sigma|$ が小，$|\beta\sigma|\gg 1$ のときの展開式を示すと[4]，

$$I_s = 2\cos^2\varphi\sin 2\varphi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\beta^{2n+1}}{(2n-1)!!\,(2n+1)!!}\ \frac{\sin(2n-1)\varphi}{\cos^{2n-1}\varphi}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\beta^{2n+2}}{n!\,(n+1)!\,(2\cos\varphi)^{2n}}\Big[\sin 2n\varphi\Big\{\log\frac{\beta}{2\cos\varphi}$$
$$-\frac{1}{2}(k_n+k_{n+1})+\gamma\Big\}+\varphi\cos 2n\varphi\Big], \tag{3.3}$$

$$I_c = 2\cos^2\varphi\cos 2\varphi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\beta^{2n+1}}{(2n-1)!!\,(2n+1)!!}\frac{\cos(2n-1)\varphi}{\cos^{2n-1}\varphi}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\beta^{2n+2}}{n!\,(n+1)!\,(2\cos\varphi)^{2n}}\Big[\cos 2n\varphi\Big\{\log\frac{\beta}{2\cos\varphi}$$
$$-\frac{1}{2}(k_n+k_{n+1})+\gamma\Big\}-\varphi\sin 2n\varphi\Big], \tag{3.4}$$

漸近式：

$$I_s \cong 2\Big[\beta\cos\varphi\sin\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!\,(2n-3)!!}{\beta^{2n-1}}\times$$
$$\times(\cos\varphi)^{2n+1}\sin(2n+1)\varphi\ \Big], \tag{3.5}$$

$$I_c \cong 2\Big[\beta\cos^2\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!\,(2n-3)!!}{\beta^{2n-1}}\times$$
$$\times(\cos\varphi)^{2n+1}\ \cos(2n+1)\varphi\ \Big]. \tag{3.6}$$

ここで $$\varphi = \tan^{-1} x \qquad (3.7)$$

$$k_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad k_0 = 0$$

$$\gamma = 0.57721566\cdots \quad (\text{Euler 定数})$$

である。

これらの展開式を利用すれば，任意の振動数の場合の壁面ずり応力，壁面圧力勾配を精度よく計算することができる。図3は，壁面ずり応力 τ_w を x 軸に対してプロットしたものである。α の増加とともに $|\tau_w|$ は増加し，$\arg \tau_w$ は全体として 45° に近づく。また，τ_w が最大になる点は α の増加

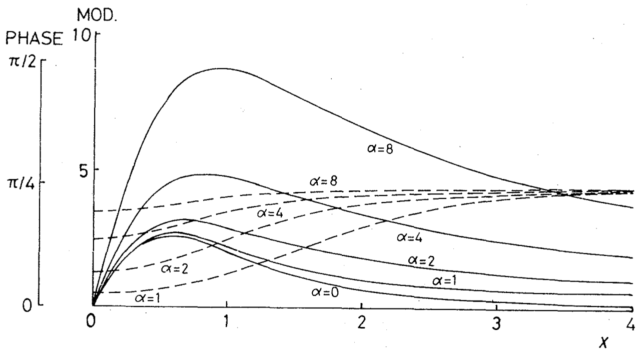

図3．正弦的に強さの変化する点湧き出しから無限平板に流れが当るときの壁面ずり応力。実線はその絶対値，破線は位相角を表わす。$\alpha = 0$，すなわち定常流に対しては位相角は0である。

にしたがってよどみ点（停点）から遠ざかることがわかる。

§4 定常流に対する慣性効果

§2の結果で $\alpha \to 0$ $(\beta \to 0)$ とすると定常 Stokes 解が得られる：

$$\psi_{st.} = c\left(\tan^{-1}\frac{y-1}{x} + \tan^{-1}\frac{y+1}{x} - \frac{2xy}{x^2+(y+1)^2}\right) \qquad (4.1)$$

$$\omega_{st} = -\nabla^2\psi_{st} = -8c\,\frac{x(y+1)}{\{x^2+(y+1)^2\}^2} \qquad (4.2)$$

（ω は渦度で，添字 st は Stokes 解を意味する。図2参照）この解を第0近似とし，慣性効果を Reynolds 数の1次の項まで見積ることを考えよう。Reynolds 数 R は

$$R = c/\nu \qquad (4.3)$$

で定義される。そのために，(x, y) 座標の代りに双極座標 (ξ, η) を使う方が解析に便利である[5]：

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\log\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2} \\ \eta &= \tan^{-1}\frac{y+1}{x} - \tan^{-1}\frac{y-1}{x} \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

$$x = \frac{\sin\eta}{\cosh\xi - \cos\eta}, \quad y = \frac{\sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\eta} \qquad (4.5)$$

この場合，流れを支配する方程式は

$$\nabla_s^2\omega = \frac{1}{\nu}\frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(\xi, \eta)}, \quad \nabla_s^2\psi = -\frac{1}{J^2}\omega \qquad (4.6)$$

$$\nabla_s^2 = \partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2, \quad J = \cosh\xi - \cos\eta \qquad (4.7)$$

となる。さて，

$$\psi = c\,(\psi^{(0)} + R\,\psi^{(1)} + \cdots) \tag{4.8}$$

$$\omega = c\,(\omega^{(0)} + R\,\omega^{(1)} + \cdots) \tag{4.9}$$

の展開を仮定すれば，$\psi^{(0)}, \omega^{(0)}$ は Stokes の解 (4.1), (4.2) で与えられている。すなわち，(ξ, η) を使って書きかえると，

$$\psi^{(0)} = \tan^{-1}\frac{\cos\eta - e^{-\xi}}{\sin\eta} + \tan^{-1}\frac{e^{\xi} - \cos\eta}{\sin\eta} - \frac{e^{-\xi}\sinh\xi\sin\eta}{J} \tag{4.10}$$

$$\omega^{(0)} = -2e^{-\xi}\sin\eta + e^{-2\xi}\sin 2\eta \tag{4.11}$$

したがって問題は $\psi^{(0)}, \omega^{(0)}$ を出発の解として $\psi^{(1)}, \omega^{(1)}$ を求めることに帰着する．(4.6) に (4.8)，(4.9) を入れ，R の1次の項を集めると，$\psi^{(1)}, \omega^{(1)}$ の方程式は

$$\nabla_S^2\,\omega^{(1)} = \frac{\partial(\omega^{(0)}, \psi^{(0)})}{\partial(\xi, \eta)}, \quad \nabla_S^2\,\psi^{(1)} = -\frac{1}{J^2}\,\omega^{(1)} \tag{4.12}$$

となり，境界条件は

$$\eta = 0,\ \pi,\ 2\pi \quad で \quad \psi^{(1)} = 0 \tag{4.13a}$$

$$\xi = 0 \quad で \quad \psi^{(1)} = \partial\psi^{(1)}/\partial\xi = 0 \tag{4.13b}$$

となる。

これらの条件の下で (4.12) の解を求めることはなかなか容易ではない。とくに変換の Jacobian J が (4.7) で見るように変数分離型でないため，計算は複雑となる。以下，試行錯誤を重ねて到達した解法のあらましを述べるにとどめる。

さて，(4.10)，(4.11) を使って (4.12) の第1式の右辺を書くと，

$$\frac{\partial(\omega^{(0)},\psi^{(0)})}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{1}{2J^2}\Big[-(e^{\xi}-2e^{-\xi}+e^{-5\xi})\sin\eta + (3-4e^{-2\xi}+e^{-4\xi})\sin 2\eta - 3(e^{-\xi}-e^{-3\xi})\sin 3\eta + (e^{-2\xi}-e^{-4\xi})\sin 4\eta\Big]. \qquad (4.14)$$

この形から

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{2J}\sum_{n=1}^{\infty}\{g_n(\xi) + a_n e^{-(n-1)\xi} - a_{n+1} e^{-(n+1)\xi}\}\sin n\eta \qquad (4.15)$$

の無限級数の形の解を推定することができる。右辺の g_n 部分は非斉次方程式の特解であり，残りの a_n を係数とする級数は斉次方程式の解，すなわち調和関数である．

(4.14) に合致するように g_n を定めると，

$$\left.\begin{aligned}
g_1(\xi) &= \xi + \frac{3}{2}\xi e^{-2\xi} + \frac{1}{4}e^{-4\xi} - \frac{1}{24}e^{-6\xi},\\
g_2(\xi) &= \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}\xi\right)e^{-\xi} - \frac{1}{2}\xi e^{-3\xi} + \frac{1}{8}e^{-5\xi} - \frac{1}{40}e^{-7\xi},\\
g_3(\xi) &= \left(-\frac{13}{12} + \frac{1}{2}\xi\right)e^{-2\xi} + \frac{3}{40}e^{-6\xi} - \frac{1}{60}e^{-8\xi},\\
g_4(\xi) &= \frac{1}{12}e^{-3\xi} + \frac{1}{20}e^{-7\xi} - \frac{1}{84}e^{-9\xi},\\
&\text{以下 } n \geqq 5 \text{ については}\\
g_n(\xi) &= -\frac{e^{-(n-1)\xi}}{n(n-1)} + \frac{3\,e^{-(n+3)\xi}}{2(n+1)(n+2)} - \frac{e^{-(n+5)\xi}}{2(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.16)$$

つぎに，(4.12) の第2式から $\psi^{(1)}$ を求める。(4.15) のときと同じように，

$$\psi^{(1)} = -\frac{1}{8J^2}\sum_{n=1}^{\infty}\{4G_n(\xi) + c_{n-1}e^{-(n-2)\xi} + d_n e^{-n\xi} + e_{n+1}e^{-(n+2)\xi}\}\sin n\eta \qquad (4.17)$$

の展開形がその目的に適っていることがわかる。ここでも，$G_n(\xi)$ の部分ははじめの非線形項から由来するもので，残りの部分は (4.15) の a_n の部分および調和関数の部分を含めたものである。正確に a_n の部分に対応させるためには

$$d_n = -(c_n + e_n) \qquad n \geq 2 \tag{4.17}$$

の条件が必要であることがわかる。$G_n(\xi)$ の具体的な形を書くと，

$$\left.\begin{aligned} G_1(\xi) &= \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{4}\xi\right)e^{-\xi} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\xi\right)e^{-3\xi} + \frac{1}{48}e^{-5\xi}, \\ G_2(\xi) &= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\xi\right)e^{-2\xi} + \frac{1}{96}e^{-4\xi} + \frac{1}{80}e^{-6\xi}, \\ G_3(\xi) &= -\frac{5}{96}e^{-3\xi} + \frac{1}{120}e^{-7\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

$n \geq 4$ については

$$G_n(\xi) = -\frac{(2n-5)e^{-n\xi}}{4(n-1)n(n+1)} + \frac{(n-3)e^{-(n+2)\xi}}{4n(n+1)(n+2)} + \frac{e^{-(n+4)\xi}}{4(n+2)(n+3)}.$$

境界条件 (4.13b) を用いると，(4.17) に加えて２つの条件が得られるので，c_n, d_n, e_n，したがって a_n を決定することができる。a_n の値についてのみ結果を示す。

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = -1, \quad a_2 = -\frac{33}{40}, \quad a_3 = \frac{33}{40}, \quad a_4 = -\frac{3}{70}, \\ &a_n = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{9/2}{n+1} + \frac{7/2}{n+2} - \frac{1}{n+3} \qquad (n \geq 5). \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

これまでの結果をまとめると，

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{2J} \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\xi) \sin n\eta , \tag{4.20}$$

$$\psi^{(1)} = -\frac{1}{8J^2} \sum_{n=1}^{\infty} H_n(\xi) \sin n\eta , \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= -1 + \xi + \left(\frac{33}{40} + \frac{3}{2}\xi\right) e^{-2\xi} + \frac{1}{4} e^{-4\xi} - \frac{1}{24} e^{-6\xi} , \\
K_2 &= \left(\frac{37}{40} - \frac{3}{2}\xi\right) e^{-\xi} - \left(\frac{33}{40} + \frac{1}{2}\xi\right) e^{-3\xi} + \frac{1}{8} e^{-5\xi} - \frac{1}{40} e^{-7\xi} , \\
K_3 &= \left(-\frac{31}{120} + \frac{1}{2}\xi\right) e^{-2\xi} + \frac{3}{70} e^{-4\xi} + \frac{3}{40} e^{-6\xi} - \frac{1}{60} e^{-8\xi} , \\
K_n &= \left(\frac{2}{n} - \frac{9/2}{n+1} + \frac{7/2}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) e^{-(n-1)\xi} \\
&\quad - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{9/2}{n+2} + \frac{7/2}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) e^{-(n+1)\xi} \\
&\quad + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) e^{-(n+3)\xi} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) e^{-(n+5)\xi} , \quad (n \geq 4)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= \left(-\frac{11}{12} + \xi\right) e^{-\xi} + \left(\frac{5}{6} + \xi\right) e^{-3\xi} + \frac{1}{12} e^{-5\xi} , \\
H_2 &= \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{60} + \xi\right) e^{-2\xi} - \frac{4}{15} e^{-4\xi} + \frac{1}{20} e^{-6\xi} , \\
H_n &= \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) e^{-(n-2)\xi} + \left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) e^{-n\xi} \\
&\quad + \left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{2}{n+3}\right) e^{-(n+2)\xi} + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) e^{-(n+4)\xi} , \\
&\quad (n \geq 3)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

§5 壁面ずり応力と壁面圧力分布

前節の結果は無限級数の形になっているが，いずれも $\sum_{n}^{\infty} e^{-n\xi} \sin n\eta / (n+m)$ の形の集合である。このような無限級数は有限項の和に書きかえることが可能である。以下，壁面上の値についてのみ，その表式をもとめることにする。

複素数 $\zeta=\xi+i\eta$ $(\xi\geq 0)$ に対して成立するべき級数展開

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n\zeta}=-\log(1-e^{-\zeta}) \tag{5.1}$$

の両辺に $1-e^{\zeta}$ をかけて変形すると，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n\zeta}}{n(n+1)}=1-(1-e^{\zeta})\log(1-e^{-\zeta})$$

が得られる。両辺に $1-e^{\zeta}$ をかけ同じように変形する。これを繰返せば

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m!\,e^{-n\zeta}}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{m-k}(1-e^{\zeta})^{k}-(1-e^{\zeta})^{m}\log(1-e^{-\zeta}) \tag{5.2}$$

が得られる。

ここで $\xi\to 0$ とすると

$$\log(1-e^{-\zeta})=\log\left(2\sin\frac{\eta}{2}\right)+\frac{i}{2}(\pi-\eta) \tag{5.3}$$

となることに注意して (5.2) の虚数部をとり $\xi\to 0$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m!\sin n\eta}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}=-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\left(2\sin\frac{\eta}{2}\right)^{k}}{m-k}\sin k\phi$$
$$+\left(2\sin\frac{\eta}{2}\right)^{m}\left\{-\sin m\phi\log\left(2\sin\frac{\eta}{2}\right)+\phi\cos m\phi\right\}, \tag{5.4}$$

ただし $$\phi=\frac{1}{2}(\pi-\eta). \tag{5.5}$$

この関係を利用すれば，(4.20) より

$$\omega^{(1)}(0,\eta)=\frac{5}{6}(2\sin\eta-\sin 2\eta)-\frac{1}{2}(\pi-\eta)(\cos\eta-2\cos 2\eta+\cos 3\eta)$$
$$-(\sin\eta-2\sin 2\eta+\sin 3\eta)\log\left(2\sin\frac{\eta}{2}\right) \tag{5.6}$$

を導くことができる。壁面上で

$$x=\cot\frac{\eta}{2} \tag{5.7}$$

となることに注意すると，(5.6) は書きかえられて

$$\tau_w^{(1)} = -\omega^{(1)}_{y=0} = -\frac{20x}{3(x^2+1)^2} - \frac{4(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^3}\tan^{-1}x$$
$$-\frac{8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3}\log\frac{4}{x^2+1} \qquad (5.8)$$

となる。第0近似は (4.11) から（もっと直接には (4.2) から）

$$\tau_w^{(0)} = -\omega^{(0)}_{\xi=0} = \frac{8x}{(x^2+1)^2} \qquad (5.9)$$

となることは容易にわかる（$\tau_w = \frac{\mu c}{a^2}(\tau_w^{(0)} + R\tau_w^{(1)} + \cdots)$ に注意）。

他方，圧力 p も

$$p = \frac{\mu c}{a^2}(p^{(0)} + Rp^{(1)} + \cdots\cdots) \qquad (5.10)$$

の形に展開されるとすると，(2.18) と同じ関係を利用して

$$p_w^{(0)} = -4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}, \qquad (5.11)$$

$$p_w^{(1)} = -5\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)^2} + \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\tan^{-1}x$$
$$+\frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}\log\frac{4}{x^2+1} \qquad (5.12)$$

を導くことができる（無限遠で $p=0$ となるようにした）。

図4，図5はこれらの結果を図示したものである。壁面ずり応力では $O(R)$ の補正により，よどみ点付近の τ_w の分布はその勾配を強調し，かつ最大値を増す傾向がある。また十分遠方では $\tau_w^{(0)} = O(x^{-3})$ であるのに対し，$\tau_w^{(1)} = O(x^{-2})$ となるので，逆流の生ずる可能性のあることがわかる。他方圧力の方は $O(R)$ の補正はつねに負であり，τ_w と逆によどみ点付近では減少することがわかる。

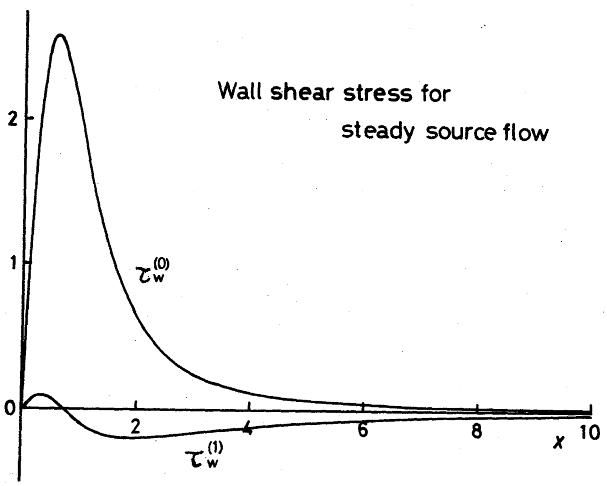

図4. 定常流に対する壁面ずり応力分布.

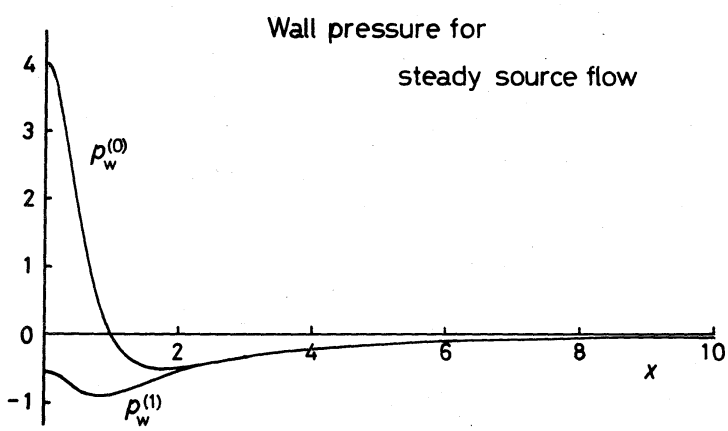

図5. 定常流に対する壁面圧力分布.

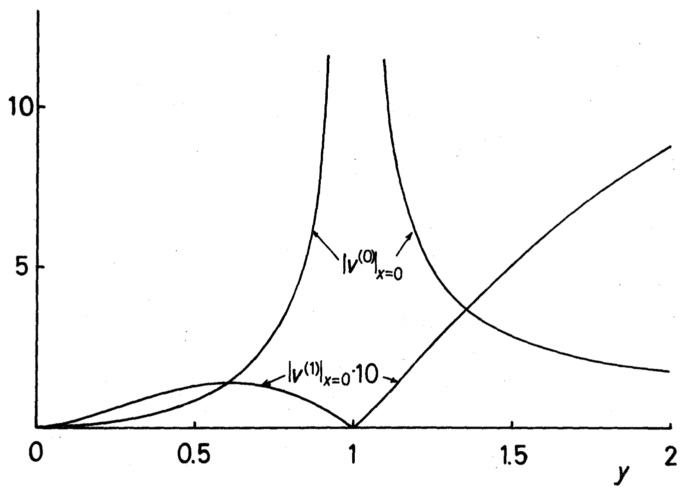

図6. 定常流に対する中心軸上の速度分布. O(R)の補正項は縦に10倍してある。

壁面上の値ではないが，参考のため軸上の速度 v を求めると，

$$v = \frac{c}{a}\left(v^{(0)} + R\, v^{(1)} + \cdots\right), \tag{5.13}$$

$$v^{(0)}_{x=0} = \frac{4y^2}{(y-1)(y+1)^2}, \tag{5.14}$$

$$v^{(1)}_{x=0} = \frac{8y^2}{(y-1)^3(y+1)} \log\frac{2}{1+y} + \frac{1}{4}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 \log\left|\frac{y+1}{y-1}\right|$$

$$+ \frac{y(11y^3+47y^2+41y-3)}{6(y-1)^2(y+1)^3} \tag{5.15}$$

となる。とくに $y \to 1$ で $v^{(0)}_{x=0}$ は $O(1/(y-1))$ であるのに対し，

$$v^{(1)}_{x=0} \to \frac{1}{12}(y-1) + O((y-1)^2 \log|y-1|)$$

となることに注意を要する。それらの変化は図6に示されている。

§6. 点渦による剥離流のモデル

点湧き出しの代りに，循環 $2\pi C$ の渦糸を y 軸上の点 $(0,a)$ においたときの解については，点湧き出しのときと同じやり方で結果を導くことができる。ここでは結果のみを記すことにする。

$$(2.1) \to \quad \psi_{irr} = \frac{C}{2} \log\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}, \tag{6.1}$$

$$(2.17) \to \quad \tau_w = \mu C_0 R\left[\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + I_c(\beta, x)\right] e^{i\Omega t}, \tag{6.2}$$

$$(4.1) \to \quad \psi_{st.} = C\left[\frac{1}{2} \log\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2} - \frac{2y(y+1)}{x^2+(y+1)^2}\right], \tag{6.3}$$

$$(4.2) \rightarrow \quad \omega_{st.} = 4c \frac{x^2-(y+1)^2}{[x^2+(y+1)^2]^2}, \tag{6.4}$$

$$(5.6) \rightarrow \quad \omega^{(1)}(0,\eta) = -\frac{7}{6}(2\sin\eta - \sin 2\eta) - \frac{1}{2}(\pi-\eta)(1-3\cos\eta+3\cos 2\eta - \cos 3\eta) + (3\sin\eta - 3\sin 2\eta + \sin 3\eta)\log\left(2\sin\frac{\eta}{2}\right), \tag{6.5}$$

$$(5.9) \rightarrow \quad \tau_w^{(0)} = -\frac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}, \tag{6.6}$$

$$(5.8) \rightarrow \quad \tau_w^{(1)} = \frac{28}{3}\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{8(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}\tan^{-1}x + \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\log\frac{4}{x^2+1}, \tag{6.7}$$

$$(5.11) \rightarrow \quad p_w^{(0)} = -\frac{8x}{(x^2+1)^2}, \tag{6.8}$$

$$(5.12) \rightarrow \quad p_w^{(1)} = \frac{x^2-5}{(x^2+1)^2} - \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\tan^{-1}x - \frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}\log\frac{4}{x^2+1}, \tag{6.9}$$

$$u^{(0)}_{x=0} = \frac{4y}{(1-y)(1+y)^2}, \tag{6.10*}$$

$$(5.15) \rightarrow \quad v^{(1)}_{x=0} = -\frac{4y^2(y+3)}{(y-1)^3(y+1)^2}\log\frac{2}{1+y} + \frac{1}{4}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| - \frac{y(y^3+49y^2+43y+3)}{6(y-1)^2(y+1)^3}, \tag{6.11*}$$

$y \to 1$ で　$v^{(1)}_{x=0} \to \frac{-1}{24} + O(y-1)$.

点渦による流れの諸量を以下グラフに示す．次ページの図7～11は前の結果図2～6にそれぞれ対応している．

---

* $v^{(0)}_{x=0}$, $u^{(1)}_{x=0}$ は恒等的に0である。

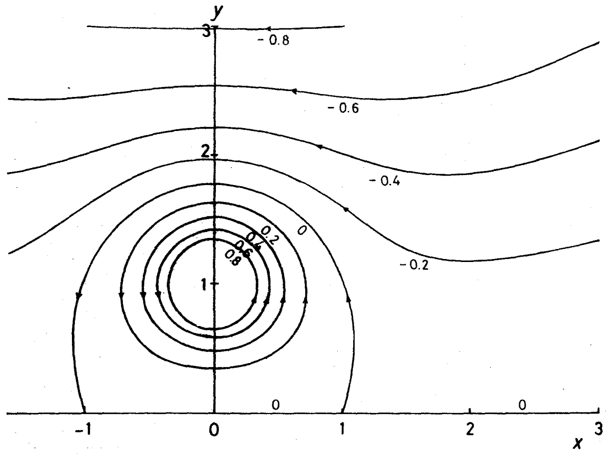

図7. 点(0, 1)に点渦をおいたときの定常 Stokes流の流線。流線に付した値は ψ_{st}/c の値［式(6.3)参照］。

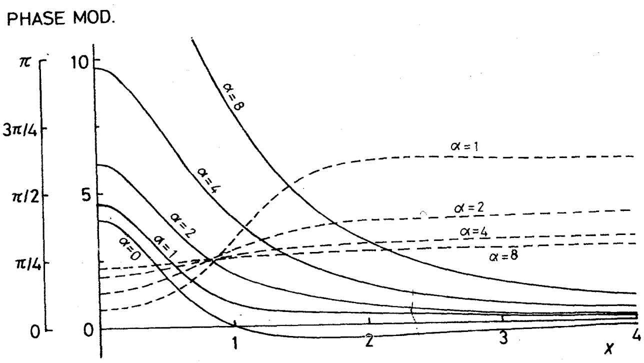

図8. 正弦的に強さの変化する点渦による壁面ずり応力。実線はその絶対値，破線は位相角を表わす。$\alpha=0$ は定常解そのものを示す［式(6.2)参照］。

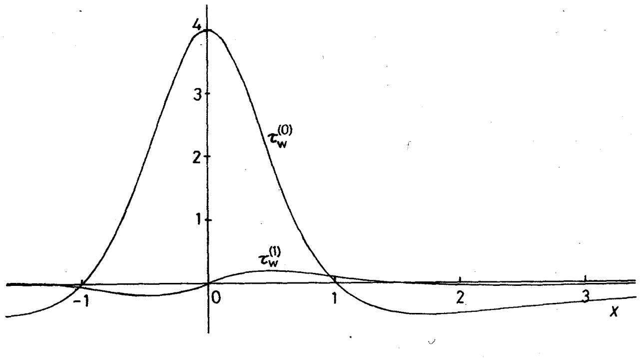

図9 定常流に対する壁面ずり応力分布［式(6.6)，(6.7)参照］。

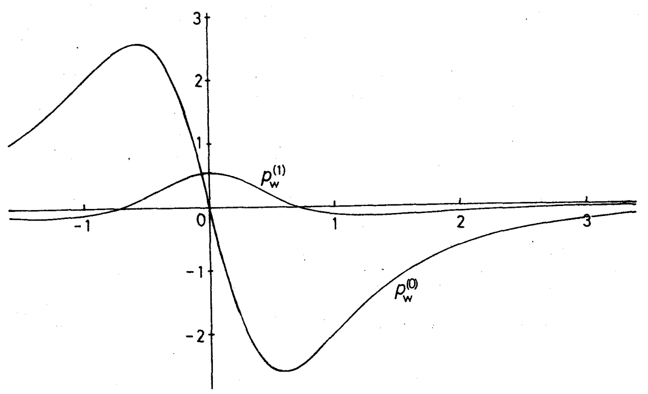

図10　定常流に対する壁面圧力分布[式(6.8), (6.9)参照]。

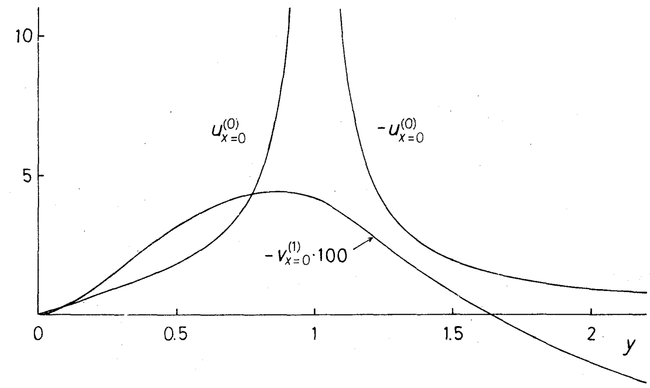

図11. 中心軸上の速度分布。O(R)の補正項は縦に100倍してある[式(6.10), (6.11)参照]。

図7は壁面上の点(1, 0)で剥離が，(−1, 0)で再付着が起ることを示しているが，図9からO(R)の補正によって剥離点は中心から遠ざかり，再付着点は近づくことがわかる。また非定常Stokes流の場合，振動数の増加とともに壁面ずり応力は中心付近で強い値をとり，位相のすすみは全体的に $\pi/4$ に近づくことが示されている(図8)。

§7　むすび

この報告では，非定常とくに振動的な流れと固定壁との相互作用をNavier-Stokes方程式を用いて解析し，剥離点または再付着点付近の非定常流れの構造について一般的な知見を得ることを目的とする．そのため，無限平板で境された半無限領域を占める2次元の流れという，極端に単純化されたモデルを採用した。そして平板から有限の距離におかれた点湧き出しまたは点渦によって誘起される粘性流を想定したのである。

非線形効果を表わす対流項が無視できる場合についてその目的は一応達せられ，壁面ずり応力に関していえば一般的な傾向があることが示された．すなわち，主流の振動数の高い極限では，壁面ずり応力は，絶対値においては主流の振動数の平方根に比例し，位相においては主流よりも$\pi/4$だけ全体的に進むことが確認された。この傾向は，流れの特異点が平板から無限の遠方にあり，かつその強さが無限大である非定常Hiemenz流[6]の示す傾向と同じである．見方によっては，Hiemenz流は無限大のReynolds数の流れと考えることができるので，この傾向は非線形効果を考慮したとしても一般的な意味をもつものと想像される．

残念ながら，きわめて単純なモデルを採用したにもかかわらず，非線形効果を含めた振動流について結果を導くことは

できず，したがってこの想像が正当であるかどうかを確認することは不可能であった。しかし，定常流を仮定すれば非線形効果は摂動近似により1次の項まで評価することができ，その結果，O(1)のReynolds数に対しては，非線形効果はそれ程強くはないことが示された。

最後に，式(3.1)の定積分 $I(\beta, x)$ の評価に関して，超関数の立場から今井功教授の有益なご助言を頂いた。ここに御礼を申し上げる。また，この研究は文部省科学研究費の支持による。

参考文献

1) 今井 功：流体力学(前)，裳華房，東京，1974.

2) Sneddon, I. N., *Fourier Transform*, McGraw Hill, N.Y. 1951.

3) Erdéryi, A., et al. (eds.), *Table of Integral Transformation I*, McGraw-Hill, N.Y., 1954, p136.

4) Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publ., Inc., N.Y., 1972.

5) Happel, J.H. and Brenner, H.B., *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Inc., N.J., 1965, p497.

6) Matunobu, Y., J. Phys. Soc. Japan, 42, 2041~49; 43, 326-329(1977).