

Title	対流における1つの混合境界値問題 (流体力学における混合境界値問題)
Author(s)	桑原, 真二
Citation	数理解析研究所講究録 (1979), 360: 142-158
Issue Date	1979-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/104522
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

対流における1つの混合境界値問題

名大 工学部 桑原真二

§ 1. まえおき

前の論文で、原子炉あるいは工業用熱交換機に付随している冷却塔（オ1回（ α ））内部の流体力学的解析を行った。その場合次のような近似をおこなった。

- i) 塔内部では Boussinesq 近似がつかえ 粘性, 熱伝導率は無視できるものとする。
- ii) 底部の充填層での境界条件は次のように考える。垂直上昇速度 w_1 は充填層の前後の圧力差 ($p_0 - p_1$) により前後の温度差 ($T_1 - T_0$) は 上昇速度に逆比例し $w_1 = \infty$ で温度差なし。 $w_1 = 0$ で最高温度 T_m に達する:

$$w_1 = C(p_0 - p_1)^k, \quad 0.5 \leq k \leq 1.5, \quad (1.1)$$

$$T_1 - T_0 = (T_m - T_0)w_0 / (w_1 + w_0), \quad (1.2)$$

C , k は定数で、充填層の熱力学及び流体力学的性質は C , k , T_m , w_0 , によって定まる。

iii) 上部での境界条件では 圧力は外圧 ($p_0 - \rho_0 gh$) と等しくなり 速度は垂直となると仮定する:

$$p = p_0 - \rho_0 gh, \quad (1.3)$$

$$u = v = 0. \quad (1.4)$$

粘性, 熱伝導のない流体の Boussinesq 近似の方程式は

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (1.5)$$

$$\rho_0 \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = - \text{grad } p' - \rho' \mathbf{g}, \quad (1.6)$$

$$\frac{DT'}{Dt} = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = -\frac{T'}{T_0}, \quad (\text{状態方程式}) \quad (1.8)$$

である。ここで

$$p' = p - \rho_0 gz - p_0,$$

$$\rho' = \rho - \rho_0,$$

$$T' = T - T_0. \quad (1.9)$$

物理量の記号は特に断らない限り 通常 of 記法にしたがう。

上記境界条件を p', ρ', T' について書きなおすと $z=0$

において

$$w_1 = C(-p'_1)^k, \quad (1.10)$$

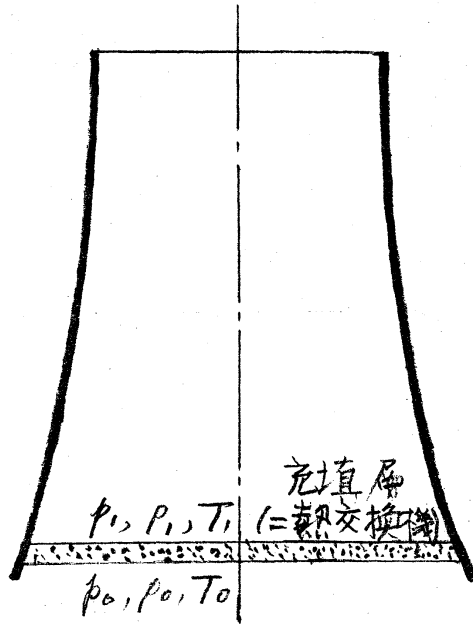
$$T'_1 = \Delta T_m w_0 / (w_1 + w_0), \quad \Delta T_m = T_m - T_0, \quad (1.11)$$

$z = h$ において

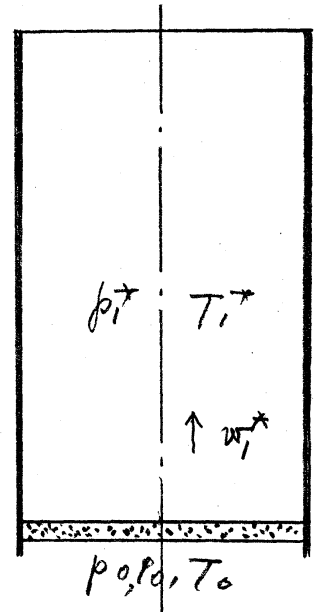
$$p' = 0, \tag{1.12}$$

$$u = v = 0, \tag{1.13}$$

となる。



(a) 回転双曲面の外壁



(b) 円筒状の外壁

才1図 冷却塔の概念図

§ 2. 流れを特徴づける量と方程式の無次元化。

自然対流では、物理量（速度、温度差、圧力差等）を特徴づける大きさが境界条件等の外部パラメータによって直接に与えられるものではない。そこで第1図(b)に示すような円筒状の塔の内部の流れを考える。

この場合 平行流 ($u = v = 0$), 水平面内での一様性 ($\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$) を仮定することができるので (1.5) ~ (1.7) は容易に解けて

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= w_1^* , & p' &= Az + B , \\ T' &= T_1^* - T_0 = \Delta T , & \rho' &= \rho^* , \end{aligned} \right\} (2.1)$$

をうる。ここで w_1^* , A , B , T^* , P^* は定数である。

境界条件 (1.10) ~ (1.13) に代入して

$$\left. \begin{aligned} A &= \rho_0 g \Delta T / T_0 , & B &= \rho_0 g \Delta T \cdot h / T_0 , \\ w_1^* &= C(\Delta p)^k , & \Delta T &= \Delta T_m w_0 / (w_1^* + w_0) , \\ \Delta p &= \rho_0 g \Delta T h / T_0 , \end{aligned} \right\} (2.2)$$

ここで w_1^* , ΔT , Δp は未知数である。後の3式から w_1^* と Δp を消去して ΔT だけについての方程式:

$$C(\rho_0 g h / T_0)^k (\Delta T)^{k+1} + w_0 \Delta T - \Delta T_m w_0 = 0 , \quad (2.3)$$

をうる。これを解けば ΔT が、したがって w_1^* , Δp も充填層の性質によってきまる。

さて 代表的な量 $a, w_1^*, \Delta T, \Delta p$ によって 物理量を無次元化する

$$\left. \begin{aligned} x/a &\rightarrow x, & h/a &\rightarrow h, & t/(a/w_1^*) &\rightarrow t, \\ v/w_1^* &\rightarrow v, & w_1/w_1^* &\rightarrow w_1, \\ p'/\Delta p &\rightarrow p', & T'/\Delta T &\rightarrow T', \\ \rho'/(\Delta T p_0/T_0) &\rightarrow \rho', \end{aligned} \right\} (2.4)$$

ここで 無次元量 (右辺) についても同じ記号をもちいた。

この無次元化によって (1.5) ~ (1.8) は

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -A \operatorname{grad} p' + \frac{A}{h} T' \mathbf{e}_2, \quad (2.6)$$

$$\frac{DT'}{Dt} = 0, \quad (2.7)$$

$$A = \frac{gh\Delta T}{w_1^{*2} T_0}, \quad (2.8)$$

となる。境界条件 (1.10) ~ (1.13) は

$$w_1 = (-p')^k, \quad (2.9)$$

$$T'_1 = \frac{1 + w_0}{w_1 + w_0}, \quad (2.10)$$

$$p' = 0, \quad (2.11)$$

$$u = v = 0, \quad (2.12)$$

となる。

§ 3. 境界にみあった斜交曲線座標の導入と それを用いた基礎方程式

無次元化していない円柱座標 (r, θ, z) において 3つのパラメータ ξ^1, ξ^2, ξ^3 で表わされる 3つの曲面

$$\left. \begin{aligned} r &= \xi^1 (1 + (\xi^3 - h)^2 / c^2)^{1/2}, & c &= ah / \sqrt{b^2 - a^2}, \\ \theta &= \xi^2, & z &= \xi^3, \end{aligned} \right\} (3.1)$$

は $\xi^1 = \text{const.}$ (ξ^2, ξ^3 はパラメータ 以下同じ), $\xi^2 = \text{const.}$ ξ^3 は各々 z 軸まわりの回転双曲面, 子午面 (z 軸をふくむ) 水平面を表わす. そこで ξ^1, ξ^2, ξ^3 に各々定数を与えればユークリッド空間中の 1 点に対応する. そこで ξ^1, ξ^2, ξ^3 を座標としてもらうことができる. 上の 3 曲面は直交していないので斜交曲線座標を与える。

第 1 図に示す双曲形の冷却塔においては $\xi^1 = 0$ を中心軸 $\xi^1 = a$ を外壁 $\xi^3 = 0$ を底部 (充填層) $\xi^3 = h$ を上部に対応づけることができる a は外壁の最も細い上部での半径である. (3.1) を a で無次元化した形でかけば $r/a \rightarrow r,$

$z/a \rightarrow z, \xi^1/a \rightarrow \xi^1, \xi^3/a \rightarrow \xi^3, h/a \rightarrow h, b/a \rightarrow b,$ として

$$\left. \begin{aligned} r &= \xi^1 (1 + (\xi^3 - h)/c^2)^{1/2}, & c &= h / \sqrt{b^2 - 1}, \\ \theta &= \xi^2, & z &= \xi^3, \end{aligned} \right\} (3.1')$$

となる。

ここで無次元化した位置ベクトル

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= r(\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) + z \mathbf{e}_z = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_r(\theta) &= \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\theta(\theta) &= -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y. \end{aligned} \right\} (3.2)$$

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ はデカルト座標の基本単位ベクトルである。
(3.1') の r, θ, z をもちいて (3.2) の \mathbf{x} を ξ^1, ξ^2, ξ^3 の関数
とみなし (ξ^1, ξ^2, ξ^3) に関する基本座標 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ をつくる:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} = \sqrt{H} \mathbf{e}_r, & \mathbf{a}_2 &= \xi^1 \sqrt{H} \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{\xi^1 I}{H} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z, \\ H(\xi^3) &= 1 + (\xi^3 - h^2)/c^2, & I(\xi^3) &= (\xi^3 - h)/c^2. \end{aligned} \right\} (3.3)$$

\mathbf{a}_1 は $\xi^2 = \text{const.}, \xi^3 = \text{const.}$ でつくられる曲線に接し ξ^1 の
増加する方向に向いている。 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に対してもサイクリック
クに変えた関係にある。

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ からつくられる逆基本ベクトル (ξ^1, ξ^2, ξ^3 の関
数とみなす) は

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1 &= \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} = \frac{1}{\sqrt{H}} (\mathbf{e}_r - \frac{\xi^1 I}{H} \mathbf{e}_z), \\ \mathbf{a}^2 &= \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} = \frac{1}{\xi^1 \sqrt{H}} \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{a}^3 &= \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} = \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 = \xi^1 H, \quad (3.4)$$

となる。 $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ は各々 (ξ^2, ξ^3) 面 (ξ^3, ξ^1) 面 (ξ^1, ξ^2) 面に垂直で ξ^1, ξ^2, ξ^3 が増加する方向にむいている。

斜交座標では一般にベクトルは共変ベクトル成分 v_λ 反変ベクトル成分 v^λ をもちいて表わされる：

$$\mathbf{v} = v^\lambda \mathbf{a}_\lambda = v_\lambda \mathbf{a}^\lambda, \quad (3.5)$$

ここおよび以下では上下の添記号については和をとるものとする。

軸対称の流れ ($v^2 = 0$) の場合には (2.5) ~ (2.7) は

$$\frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial v^3}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\xi^1} v^1 + \frac{2I}{H} v^3 = 0, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} + v^3 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^3} + \frac{2I}{H} v^1 v^3 + \frac{\xi^1}{c^2 H} v^3 v^3 \\ = -\frac{A}{H} (1 + (\xi^1 I)^2 / H) \frac{\partial p^1}{\partial \xi^1} + A \frac{\xi^1 I}{H} \frac{\partial p^1}{\partial \xi^3} - \frac{A}{H} \frac{\xi^1 I}{h} T', \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial v^3}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^3}{\partial \xi^1} + v^3 \frac{\partial v^3}{\partial \xi^3} = A \frac{\xi^1 I}{H} \frac{\partial p^1}{\partial \xi^1} - A \frac{\partial p^1}{\partial \xi^3} + \frac{A}{h} T', \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v^1 \frac{\partial T'}{\partial \xi^1} + v^3 \frac{\partial T'}{\partial \xi^3} = 0, \quad (3.9)$$

となる。ここで流れの関数 Ψ と渦度 ω を導入し

$$v^1 = \frac{1}{\xi^1 H} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^3}, \quad v^3 = -\frac{1}{\xi^1 H} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^1}, \quad (3.10)$$

$$\omega = \omega a^2,$$

更に軸上での境界条件を考慮して

$$\Phi = \Psi/\xi^1, \quad \Omega = \xi^1 \omega, \quad (3.11)$$

の変換を行い、 Φ, Ω, T' 及び $P = p' + \frac{1}{2A} v^2$ に対する連立偏微分方程式をうる。常常流に対して

$$D\Phi = F_1(\Phi, \Omega), \quad (\Psi - \omega \text{ の関係式}) \quad (3.12)$$

$$DP = F_2(\Phi, \Omega, P, T'), \quad (\text{運動方程式の div}) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial(\Phi, \Omega)}{\partial(\xi^1, \xi^3)} + \frac{\Phi}{\xi^1} \frac{\partial\Omega}{\partial\xi^3} = F_3(\Phi, \Omega, T'), \quad (\text{渦度の対流}) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial(\Phi, T')}{\partial(\xi^1, \xi^3)} + \frac{\Phi}{\xi^1} \frac{\partial T'}{\partial\xi^3} = 0, \quad (\text{温度の対流}) \quad (3.15)$$

$$F_1 = -\xi^1(2C_2^2 + C_3) \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} - \frac{1}{\xi^1 H} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} - \frac{\Phi}{\xi^1} \right), \\ + 2C_3 \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^3} - (C_3 + C_2^2)\Phi + H\Omega, \quad (3.16)$$

$$F_2 = -\left(\frac{1}{\xi^1} C_1 + \xi^1 C_3 \right) \frac{\partial P}{\partial\xi^1} + \frac{1}{A} \left[\{ D\Phi + (2C_1/\xi^1 + \xi^1 C_3) \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} \right. \\ \left. - C_2 \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^3} + C_3\Phi \right] \Omega + \left\{ C_1 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \right) - \xi^1 C_2 \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^3} \right\} \frac{\partial\Omega}{\partial\xi^1} \\ + \left\{ -\xi^1 C_2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \right) + \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^3} \right\} \frac{\partial\Omega}{\partial\xi^3} + \frac{1}{h} \left(-\xi^1 C_2 \frac{\partial T'}{\partial\xi^1} + \frac{\partial T'}{\partial\xi^3} \right), \quad (3.17)$$

$$F_3 = -\frac{1}{\xi^1} \Omega \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^3} + \frac{A}{h} \frac{\partial T'}{\partial\xi^1}, \quad (3.18)$$

$$P = p' + \frac{1}{2A} \left\{ C_1 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \right)^2 - 2\xi^1 C_2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \right) \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^3} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^3} \right)^2 \right\},$$

$$\begin{aligned}
D &= C_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} - 2\xi^1 C_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^3 \partial \xi^3}, \\
C_1(\xi^1, \xi^3) &= \frac{1}{H} \left(1 + \frac{(\xi^1_I)^2}{H} \right), \quad C_2(\xi^3) = \frac{I}{H}, \\
C_3(\xi^3) &= \frac{1}{H} \left(\frac{2I^2}{H} - \frac{1}{c^2} \right). \tag{3.19}
\end{aligned}$$

をうる。

§ 4. 数値計算

ϕ, P に対する方程式は Poisson 形 (楕円形) であり、境界 I, II, III, IV で各 1 個の境界条件を Ω, T' は 1 階の対流形で I, II, III で各 1 個の境界条件を与えればよい。I,

II, III, IV における境界条件は (オ 2 図)

$$I: \phi = 0,$$

$$P = P_C + \frac{1}{h} T_I (\xi^3 - h), \quad P_C = \frac{2}{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} \right)_C^2,$$

$$T' = T_I, \quad \Omega = 0, \tag{4.1}$$

$$II: \phi = \phi_{II},$$

$$P = P_B + \frac{1}{h} T_{II} (\xi^3 - h), \quad P_B + \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} + \phi \right)_B^2,$$

$$T' = T_{II}, \quad \Omega = \Omega_{II}, \tag{4.2}$$

$$III: \phi = - \frac{H_{III}}{\xi^1} \int_0^{\xi^1} \xi^1 (-p^1) k_{d\xi^1}, \quad H_{III} = 1 + h^2/c^2,$$

$$-p' = -P + \frac{1}{2AH} \left\{ C_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} + \frac{\phi}{\xi^1} \right)^2 - 2\xi^1 C_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} + \frac{\phi}{\xi^1} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi^3} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi^3} \right)^2 \right\},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi^3} = \frac{1}{A} \Omega \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{1}{h} T' ,$$

$$\Omega = - \frac{1}{H_{III}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} (-P')^k ,$$

$$T' = \frac{1 + w_0}{(-p^1)^1 + w_0} , \quad (4.3)$$

$$\text{IV: } D\Phi - \frac{1}{c^2} \xi^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{1}{\xi^1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} - \frac{\Phi}{\xi^1} \right) - \frac{1}{c^2} \Phi = \Omega ,$$

$$P = \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \right) , \quad (4.4)$$

をもちいる。ΦのIVにおけるPのIIIにおける境界条件は数値的不安定性等の関係で前論文の方法とは異っている。境界条件の設定からΩ, T'は下(III)から上へ(IV)解いていかねばならない。それからΦは下から上へPは上から下へ差分法を実行した。これは物理的に流れの影響は下から上へ圧力は上の効果が下に及んでくると考えたからである。

また数値計算上の対流による効果の伝達はPoisson形によるものよりもずっと速いので、Ω, T'の差分ステップはΦ, Pの差分ステップを10回行ったのちに1回行うという手段をとった。

Φ(及びP)の差分のスキームは

$$C_{1lm} \left(\overset{\downarrow}{\Phi}_{l+1m} - 2\overset{\uparrow}{\Phi}_{lm} + \overset{\downarrow}{\Phi}_{l-1m} \right) / \Delta_1^2 - \frac{1}{2} \xi^1_l C_{2lm}$$

$$\begin{aligned} & (\downarrow\phi_{l+1m+1} - \downarrow\phi_{l-1m+1} + \downarrow\phi_{l-1m-1} - \downarrow\phi_{l+1m-1})/\Delta_1\Delta_3 \\ & + (\downarrow\phi_{lm+1} - 2\uparrow\phi_{lm} + \downarrow\phi_{lm-1})/\Delta_3^2 = F_1(\downarrow\phi, \downarrow\Omega)_{lm}, \end{aligned}$$

のように行った。ここで $\downarrow\phi_{l+1m} = \phi((l+1)\Delta_1, m\Delta_3)$ 等 Δ_1, Δ_3 はメッシュの間隔 \downarrow は古い値を入れること, \uparrow はこれを未知数として解くことを意味する。

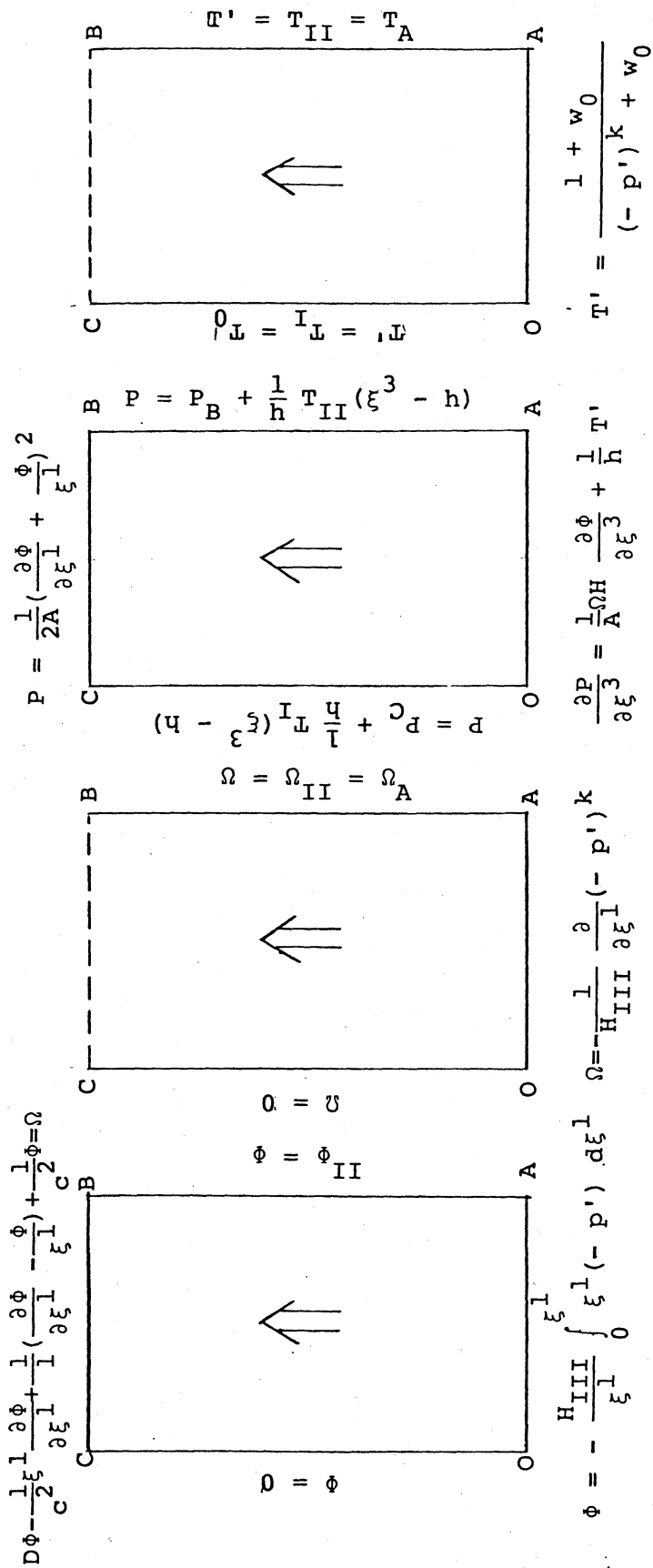
Ω (及び T') については

$$\begin{aligned} & \{ (\downarrow\phi_{(l+1)m} - \downarrow\phi_{(l-1)m})/2\Delta_1 + \downarrow\phi_{lm}/\varepsilon_l^1 \} (\uparrow\Omega_{lm+1} - \downarrow\Omega_{lm})/\Delta_3 \\ & - (\downarrow\phi_{lm}/\varepsilon_{lm}^1) (\uparrow\Omega_{lm+1} - \downarrow\Omega_{lm})/\Delta_3 = F_3(\downarrow\phi_1, \downarrow\Omega, \downarrow T^1)_{lm}, \end{aligned}$$

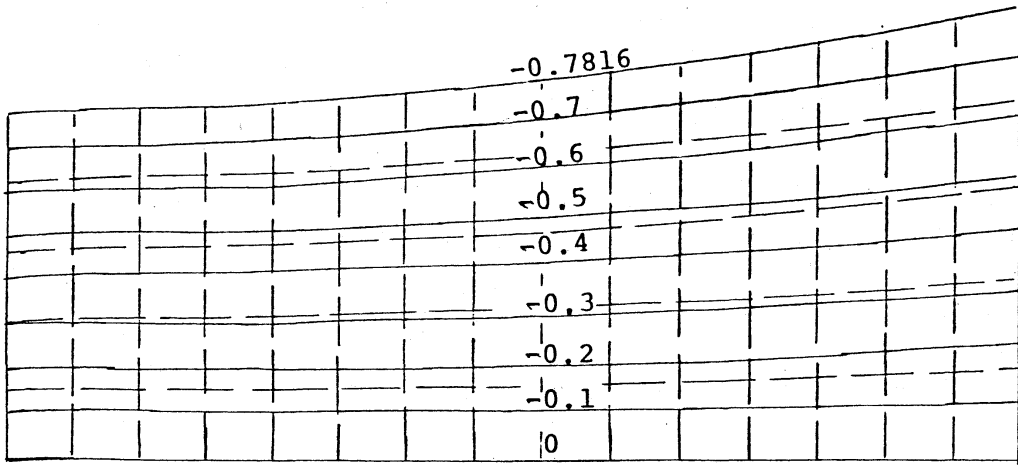
のように行った。ここで $\downarrow\phi_{(l+1)m}, \downarrow\phi_{(l-1)m}$ は (l, m) における v_1 値を計算して, その正負及び 0 にしちがって, 左側差分 $(\downarrow\phi_{l+1m} - \downarrow\phi_{lm})/\Delta_1$, 右側差分 $(\downarrow\phi_{lm} - \downarrow\phi_{l-1m})/\Delta_1$ におきかえ, なるべく下流の影響が次のステップにきかないようなスキームにした。

数値計算は $c^2 = \infty$ ($b=1$) すなわち 広がりのない円筒の場合の値を初期の数値として, 逐次近似法によった。

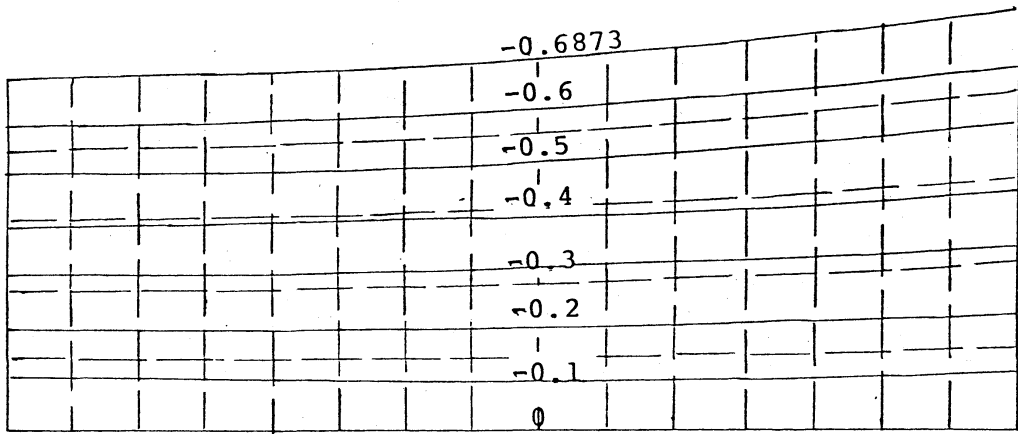
$b = 1.1, 1.2, 1.3; k=3$ の場合の $\downarrow\phi, \downarrow p', \downarrow\Omega, \downarrow T'$ が第3~6図に示してある。



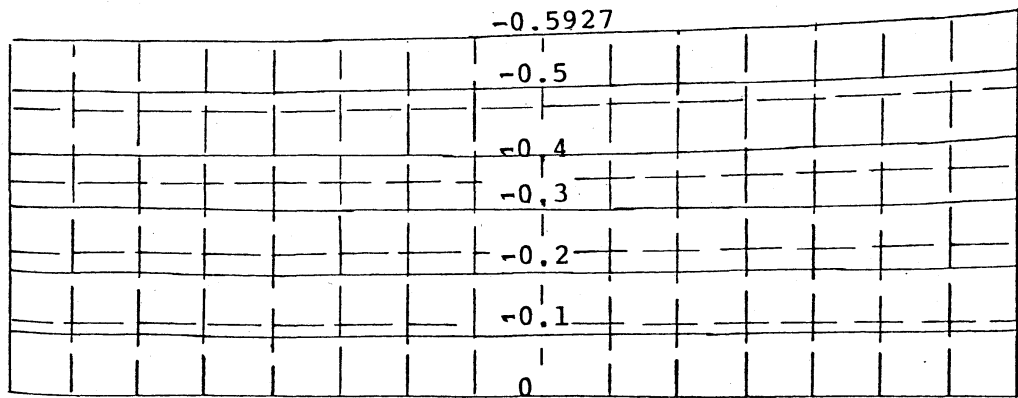
才2図 ϕ, Ω, P, T' に対する境界条件。↑は数値積分の方向を示す。



$b = 1.3$

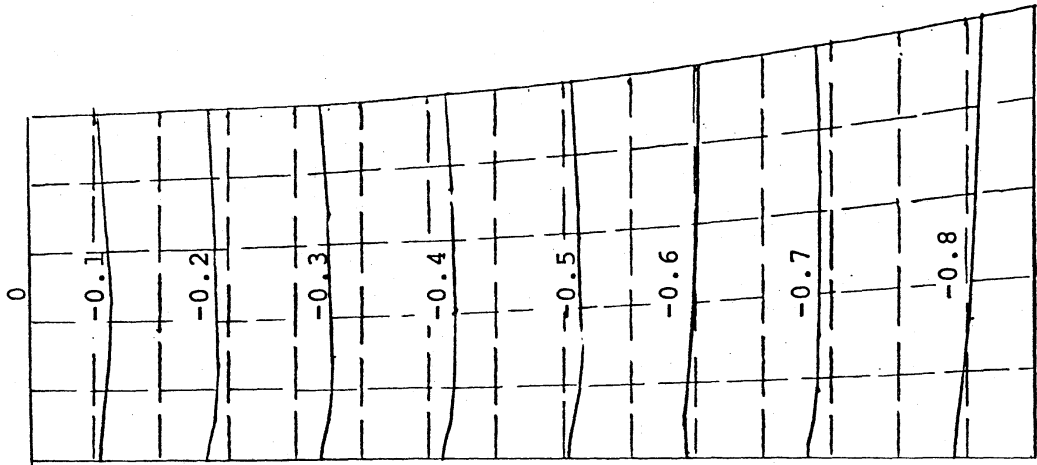


$b = 1.2$

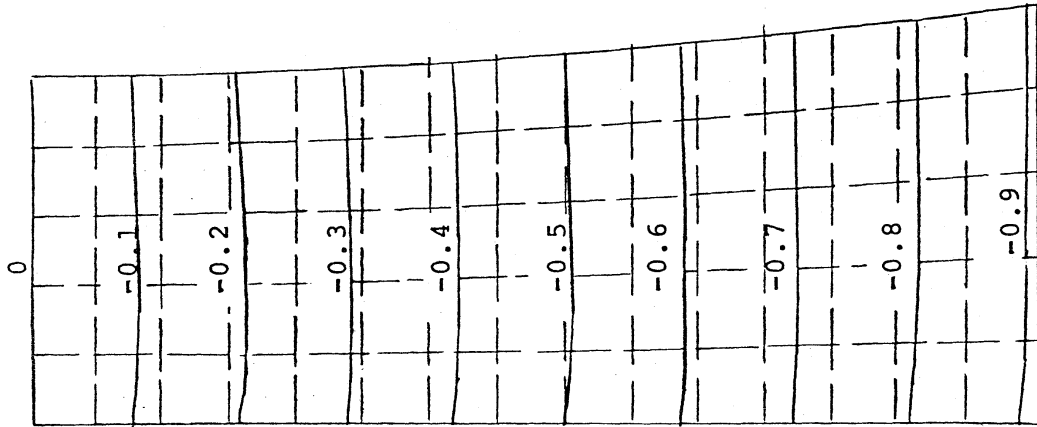


$b = 1.1$

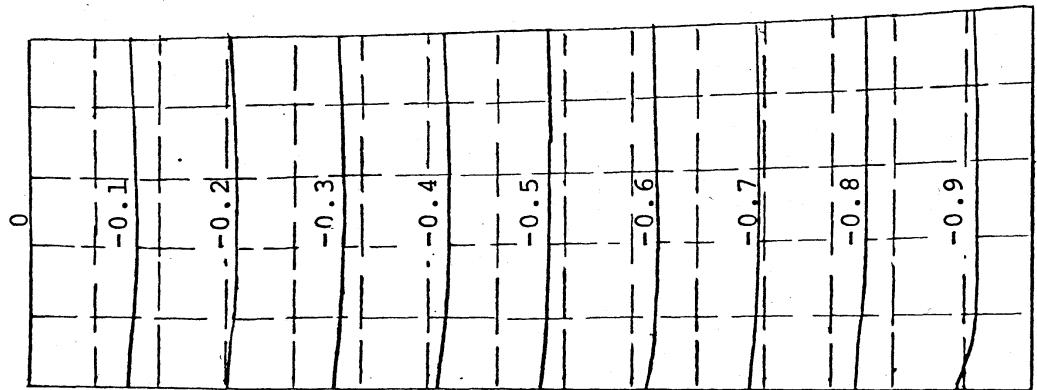
图 3 为 $h=3, w_0=3, r=0.5, A=5$ 的情况 (变形比及流体的阻系数)



$b = 1.3$

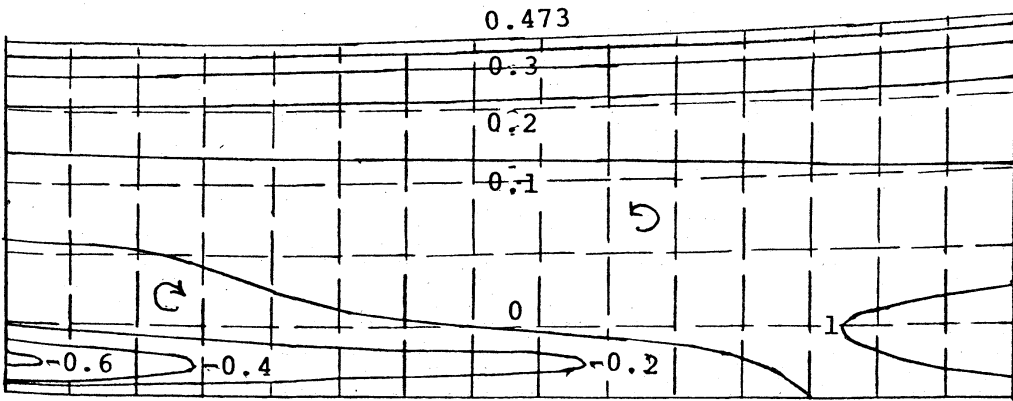
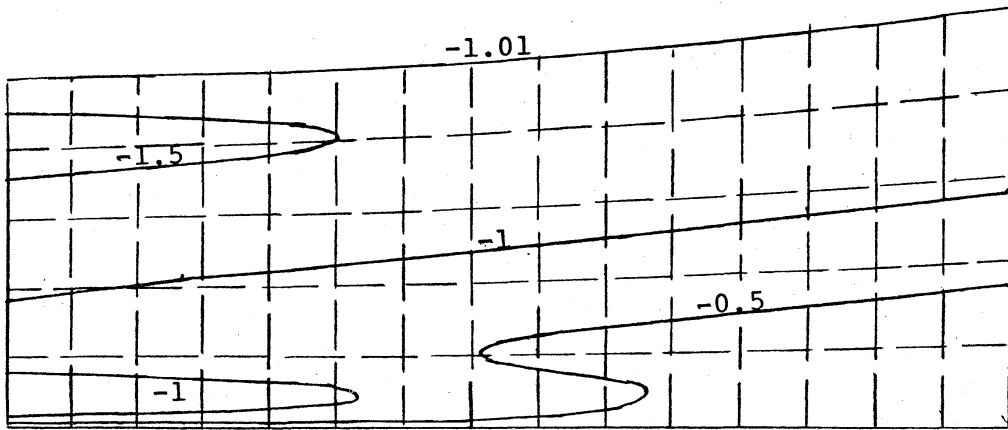
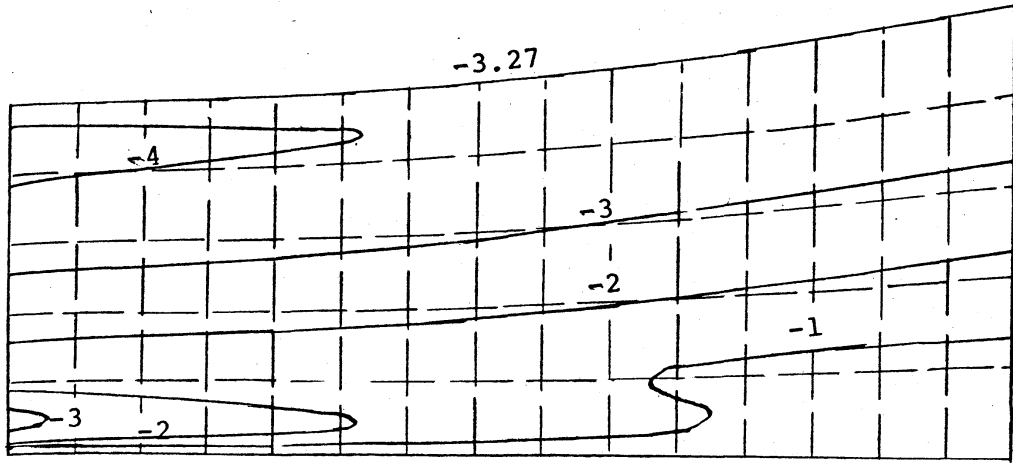


$b = 1.2$

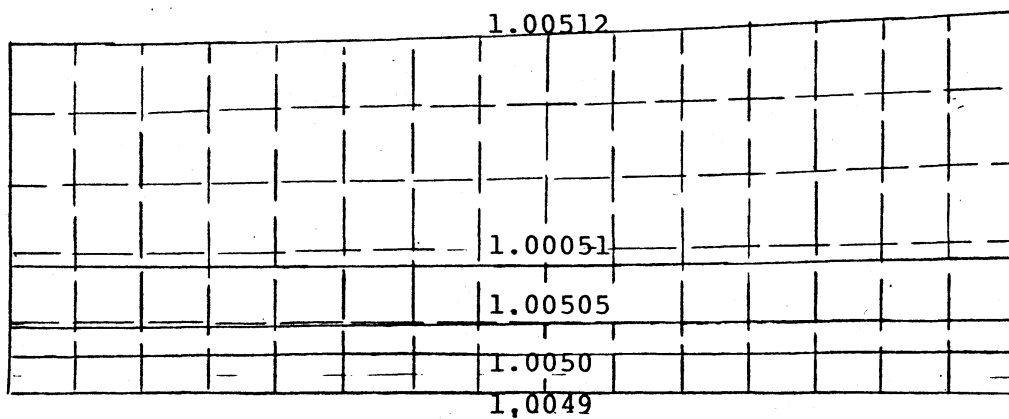
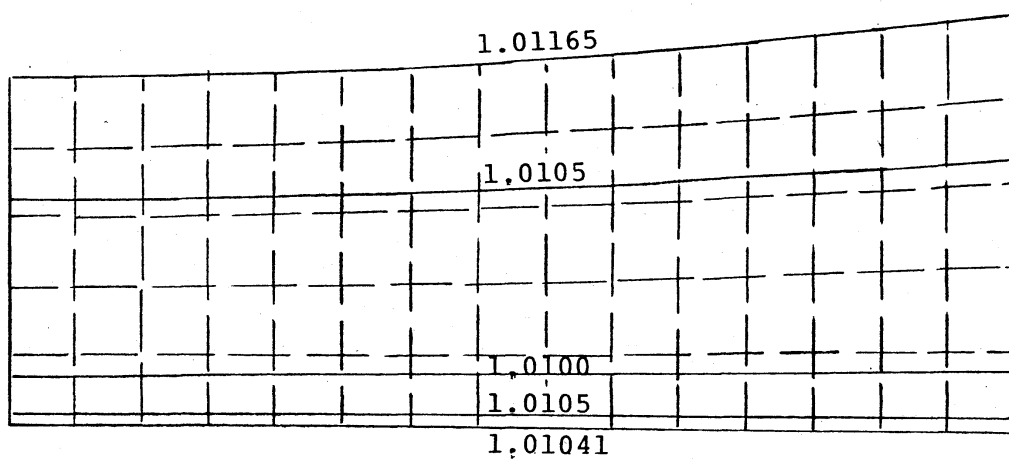
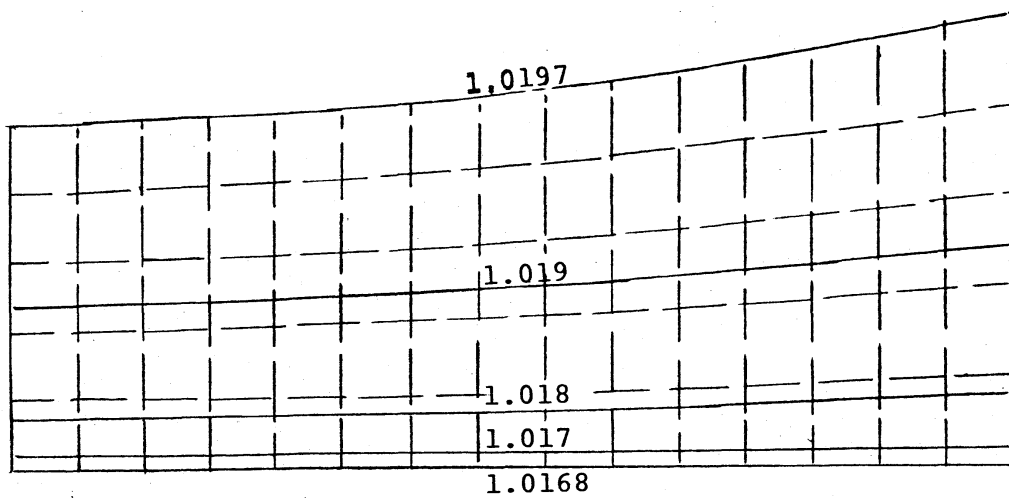


$b = 1.1$

第4圖 $k=3, w_0=3, k=0.5, A=5$ の場合の圧力 p'



第5圖 $k=3, w_0=3, k=0.5, A=5$ の場合の Ω (変形した渦度)。
 数値は $\times 10^{-2}$ として読む。



第6図 $k=3, W_0=3, k=0.5, A=5$ の場合の温度 T'.