

p-進 L 函数について

京大 理 太田雅己

久保田 - Leopoldt [9] が p-進 L 函数を構成して以後、これについて研究、および一般化が多くの人によってなされてきた。以下は私の紹介である。

§1 久保田 - Leopoldt の p-進 L 函数 (Q の場合)。

$\zeta(s)$  は Riemann の zeta 函数とし、Bernoulli 数  $B_n (n=0, 1, \dots)$  を  $\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$  で定義する。すると  $\forall n \in \mathbb{N}$  について

$$(1) \quad \zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n} \in \mathbb{Q}$$

と成ることは古く知られていた。同様のことは Dirichlet の L 函数についても成り立つ； $\chi$  を導き  $f$  の原始的 Dirichlet 指標、 $L(s, \chi)$  を対応する Dirichlet の L 函数とする。「-A2

Bernoulli 数」  $B_{n, \chi} (n=0, 1, \dots)$  を  $\sum_{a=1}^f \frac{\chi(a)t e^{at}}{e^{ft}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n, \chi}}{n!} t^n$  で定義すると  $\forall n \in \mathbb{N}$  について

$$(2) \quad L(1-n, \chi) = -\frac{B_{n, \chi}}{n} \in \mathbb{Q}(\chi) \stackrel{dfn}{=} \mathbb{Q}(\chi(1), \dots, \chi(f-1)),$$

このことを用いて久保田 - Leopoldt は  $\zeta(s)$ 、 $L(s, \chi)$  の p-

adic 互類似物. 即ち  $p$ -進 L 函数を構成した. 結果を述べるために言葉を準備する:  $p$  は (固定された) 素数.  $\mathbb{Q}_p$  は  $p$ -進数体.  $\mathbb{C}_p$  は  $\mathbb{Q}_p$  の代数的閉包の完備化.  $1 \cdot 1$  は  $\mathbb{C}_p$  の付値とする. 以下  $\mathbb{Q}$  の代数的閉包の  $\mathbb{C}_p$  への埋め込みを一つとる. それで代数的数を  $\mathbb{C}_p$  の元と見做す.  $q = p$  (resp.

4)  $p \geq 3$  (resp.  $p = 2$ ) とする. ( $\mathbb{C}_p$  に値をとる)  $\text{mod } q$  の Dirichlet 指標  $\omega$  を  $p \geq 3$  のとき  $\omega(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p^n}$ .  $p = 2$  のとき  $\omega(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{if } a \equiv -1 \pmod{4} \\ 0 & \text{if } a \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$  と定める.

定理 1 ([9])  $\mathbb{Q}_p(x) = \mathbb{Q}_p(x(1), \dots, x(f-1))$  - 係数の中組数

$$(3) \quad L_p(s, x) = \frac{a-1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-1)^n$$

で表すことができるものが唯一つ存在する.

(i) (3) の右辺の収束は  $\forall s \in \mathbb{C}_p$  s.t.  $|s-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}} |q|^{-1}$  で収束する.

(ii)  $\forall n \in \mathbb{N}$  について

$$(4) \quad L_p(1-n, x) = (1 - (x\omega^{-n})^{(p)} \cdot p^{n-1}) \times \frac{-B_n x \omega^{-n}}{n}$$

(但し,  $x\omega^{-n}$  は  $a \mapsto x(a)\omega(a)^{-n}$ .  $(a, pf) = 1$  について  $p$ -進原始指標とした).

$$(iii) \quad a_{-1} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{p} & \text{if } x = x^0 \text{ 単位指標} \\ 0 & \text{if } x \neq x^0 \end{cases}$$

注意 1)  $L(s, x)$  の函数等式は  $x(-1) = -1$  ならば

$L_p(s, x) \equiv 0$  (恒等的に 0) とする. 一方,  $x(-1) = 1$  ならば

$L_p(\chi, x) \neq 0$ .

2) (4)  $n \equiv 0 \pmod{p-1}$  (resp.  $\pmod{2}$ ) if  $p \geq 3$

(resp.  $p=2$ ) なる  $L_p(1-n, x) = (1-x^{(p) \cdot p^{n-1}}) L(1-n, x)$

即ち古典的な L 函数の適当な  $p$  番目の Euler 因子を除いたものとなる。この性質と (1)  $L_p(\chi, x)$  は characterize される。

3) (iii) は  $\zeta(\chi)$  (resp.  $L(\chi, x)$ ,  $x \neq x^0$ ) が  $s=1$  で

1 位の極をもつことを示す。この性質が  $L$  (resp.  $s=1$  で正則)、にあたる性質が  $p$ -進 L 函数についても成り立ち、このことを示している。

4) 定理 1 の証明は  $B_{n, \chi}$  の次の  $p$ -adic な性質に基づいている ([9] 又は 岩沢 [8]) :

$$B_{n, \chi} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{Rf}} \sum_{a=1}^{p^R f} \chi(a) a^n.$$

### § 2 Leopoldt の $p$ -adic 類数公式

$F \in \mathbb{Q}$  の Abel 拡大とする。このとき  $F$  の Dedekind zeta 函数  $\zeta_F(s)$  は  $F/\mathbb{Q}$  に対応する Dirichlet 指標の L 函数の種となる： $\zeta_F(s) = \prod_{\chi} L(\chi, x)$ 。ここで  $F$  の  $p$ -進 zeta 函数を

$$\zeta_{F, p}(s) = \prod_{\chi} L_p(\chi, x)$$

で定義する。ここで勿論積は  $s=1$  の  $x$  を走る。注意 1)  $F$  が総実の時に限り  $\zeta_{F, p}(s) \neq 0$  である。

一、 $F$  が (一般の) 総定数体  $\mathbb{Q}$  上の古典的  $\zeta$ -関数公式は

$$\lim_{\Delta \rightarrow 1} (\Delta - 1) \zeta_F(\Delta) = 2^{[F:\mathbb{Q}]-1} h R_{\infty} / \sqrt{\Delta}$$

となる。ここで  $\Delta$ ,  $h$ ,  $R_{\infty}$  は各々  $F$  の判別式, 類数, 導数規準とした。Leopoldt [10], [11] は  $\zeta_{F,p}(\Delta)$  について類似の公式の成り立ちを示した (或は, これをいふのが  $\Delta \rightarrow 1$  の  $\zeta$ -関数  $\zeta_F$  である, cf [9] 又は  $\zeta$  の後の注意 2))。

定理 2 ([10], [11])  $F$  が総定数  $\mathbb{Q}$  上の Abel の時

$$(5) \lim_{\Delta \rightarrow 1} (\Delta - 1) \zeta_{F,p}(\Delta) = \prod_x \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \cdot 2^{[F:\mathbb{Q}]-1} h R_p / \sqrt{\Delta}$$

ここで  $R_p$  は  $F$  の「 $p$ -進導数規準」 (cf [10] 又は [8])。

この定理は  $L(1, \chi)$  ( $\chi \neq \chi_0$ ) の表示式の類似である次の結果を用いて証明される。

定理 3 ([11])  $\chi(-1) = 1$ ,  $\chi \neq \chi_0$  のとき

$$L_p(1, \chi) = - \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \log_p(1 - \xi^{-a})$$

ここで  $\xi$  は (固定された)  $1$  の原始  $f$  乗根,  $\tau(\chi)$  は Gauss の和:  $\tau(\chi) = \sum_{a=1}^f \chi(a) \xi^a$ ,  $\log_p$  は  $p$ -進  $\log$  とした。

注意 1)  $p$ -進導数規準が一般に  $0$  でないことは解,  $\zeta$  には  $\zeta$  (Leopoldt 予想)。しかし  $F/\mathbb{Q}$  が Abel の時には Brumer により  $R_p \neq 0$  が証明されている。従って (5) は trivial な等式:  $0 = 0$  にはない。

2) 非正整数  $\Delta$  なる  $\zeta$   $\mathbb{Z}_p$  で稠密なことを示す。  $L_p(1, \chi)$  は非正整数  $\Delta$  の値, 即ち一般 Bernoulli 数を用いて  $p$ -進に

近似することと示される。具体的な形については [9], [11] (および §4 の命題) 参照。

### §3 一般の総定代数体の $p$ -進 $L$ 函数

[9] 以後色々な研究 (岩沢 [7], Serre [12], Coates - Sinnott [4] 等々) があり、また、ここには最近 Deligne - Ribet [5], Cassou - Noguès [1] によつて得られた一般の結果を記す。

以下  $F$  を一般の総定代数体、 $\mathfrak{f}$  を  $F$  の整 ideal、 $\chi$  を導き  $\mathfrak{f}$  の  $F$  の原始的類指標とする。このとき Hecke の  $L$  函数：  

$$L(s, \chi) = \sum \chi(\mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s} \quad (\mathfrak{a} \text{ は } \mathfrak{f} \text{ と素な } F \text{ の整 ideal を走る, } N \text{ は ideal の絶対 norm.})$$
は全平面に有理型に解析接続され、 $s=1$  以外に正則である。(1), (2) の一般化として次の結果がある。

定理 4 (Siegel - Klingen [15])  $\forall n \in \mathbb{N}$  について  

$$L(1-n, \chi) \in \mathbb{Q}(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\chi(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a}: \mathfrak{f} \text{ と素}).$$

また、 $\theta \in \mathfrak{a} \mapsto \omega(N\mathfrak{a})$ ,  $(\mathfrak{a}, p) = 1$  で定まる原始的類指標とする。

定理 5 ([1], [5])  $\mathbb{Z}_p - \{1\}$  上の  $\mathbb{C}_p$  に値をとる連続函数  $L_p(s, \chi)$  が次をみたすものが唯一存在する；

(i)  $\forall n \in \mathbb{N}$  について

$$(b) \quad L_p(1-n, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \mid p} (1 - (\chi\theta^{-n})(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{n-1}) L(1-n, \chi\theta^{-n})$$

但し  $\chi \theta^{-n}$  の意味は定理 1 (ii) と同様とする。

(ii) 或る条件  $(\Gamma, \rho) = 1$  etc. ; 詳しくは [1] を参照) をみたす無限に多くの  $F$  の整 ideal  $\mathfrak{L}$  に対して

$$\Delta \mapsto \left( \chi(\mathfrak{L}) \left( \frac{N\mathfrak{L}}{\theta(\mathfrak{L})} \right)^{1-\Delta} - 1 \right) L_p(\Delta, \chi)$$

は  $\mathbb{Q}_p(\chi)$  上の「岩沢函数」となる。(岩沢函数については次節で説明する。)

注意 1) (ii) による定理 1 の (i) および (iii) の後半に与えられた系が得られる。

系  $L_p(\Delta, \chi) = \frac{a_{-1}}{\Delta-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\Delta-1)^n$ ,  $\forall a_n \in \mathbb{Q}_p(\chi)$  と展開され、右辺の和は  $\forall \Delta \in \mathbb{C}_p$  st.  $|\Delta-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}} |\mathfrak{L}|^{-1}$  で収束する。又、 $\chi$  が単位指標  $\chi^0$  でなければ  $a_{-1} = 0$ 。

2)  $\chi = \chi^0$  のとき  $L_p(\Delta, \chi^0) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_{F,p}(\Delta)$  は  $F$  の  $p$ -進 zeta 函数である。これについて (5) と同じく

$$(7) \lim_{\Delta \rightarrow 1} (\Delta-1) \zeta_{F,p}(\Delta) = \frac{\pi}{8|p|} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{L}}\right) 2^{[F:\mathbb{Q}]-1} \frac{1}{h} R_p / \sqrt{\Delta}$$

と成ることを知りたい。 (cf Coates [2], Serre [13].)

3) [5] は未発表で、筆者は覚えているが、Serre [12] の手法 (elliptic modular form を使った) を Hilbert modular form を使って一般化したものらしい。[1] の証明は新谷 [14] による部分 zeta 函数、およびその特殊値の「初等的」表示に基づいている。

#### §4 岩沢 - Coates 予想

まず前節で言った残した岩沢函数について述べよう。  $k \in \mathbb{Q}_p$  の有限次拡大、  $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$  の整数環とする。不定元  $x$  に關する  $\mathcal{O}$  係数の一変数形式的中級数環  $\mathcal{O}[[x]]$  を  $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$  又は単に  $\mathcal{L}$  と書く。

定義  $\mathbb{Z}_p$  上の  $k$  に値をとる連続函数  $F$  が ( $k$  上の) 岩沢函数であるとは、次の同値条件が  $F$  について成り立つことをいう。

(i)  $\exists f(x) \in \mathcal{L}_{\mathcal{O}}, \exists u = 1 + \pi \in 1 + \mathfrak{q}\mathbb{Z}_p$  s.t.  $|\pi| = |q|^{-1}$  本ある、 $\gamma, F(\gamma) = f(u^\gamma - 1)$  となる。

(ii)  $\gamma \mapsto \sum_{i=1}^n a_i u_i^\gamma$  ( $a_i \in \mathcal{O}, u_i \in 1 + \mathfrak{q}\mathbb{Z}_p, n < \infty$ ) の形の函数が  $F$  に一致収束する。

岩沢函数のひとつの特徴づけとして次の結果がある。

命題 (Serre [12])  $F: \mathbb{Z}_p \rightarrow k$  を連続函数とする。

$\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{Z}_p, \lambda_1 \neq 0$  を任意にとり

$$\delta_n = \delta_n(\lambda_0, \lambda_1) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(\lambda_0 + (n-i)\lambda_1)$$

と置く ( $n \geq 0$ )。又、  $c_{i,n} \in \mathbb{Z}$  ( $1 \leq i \leq n, n \geq 1$ ) を

$$\sum_{i=1}^n c_{i,n} x^i = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

で定める。すると、  $F$  が岩沢函数なる次の (i) (ii) が成り立つ。

$$(i) \quad |\delta_n / q^{n \alpha_{\mathcal{O}}(\lambda_1)}| \leq 1 \quad (\forall n \geq 0)$$

$$(ii) \left| \sum_{i=1}^n C_{i,n} \delta_i q^{-i} p^{-i \text{ord}_p(\Delta_2)} / n! \right| \leq 1 \quad (\forall n \geq 1)$$

ここで  $\text{ord}_p(\Delta_2)$  は  $\text{ord}_p(p) = 1$  とする  $\mathbb{Q}_p$  の加法的付値とした。

逆に  $\Delta_0 = 0, \Delta_2 = 1$  として (i), (ii) が成り立てば  $F$  は岩沢函数。

注意  $F = \mathbb{Q}$  のとき、定理 5 と今の命題より Kummer の合同式と呼ばれる Bernoulli 数の合同式が導かれる。

さて、定理 5 より  $L_p(\Delta, X)$  は  $X$  に関する中級数の係りに  $X = u^A - 1$  を代入して得られるが、ここに関与する中級数は田分体の整数論と深い関わりをもつ。これに関して、最も基本的な予想を最後に述べておく。簡単なため  $X = \theta^2$  の場合を考える。

以下  $p$  は奇素数とし、 $F_0 = F(\mu_p)$  ( $\mu_n = 1$  の  $n$  乗根のなす群)、 $F_\infty = F(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_{p^n})$  とおく。  $G = \text{Gal}(F_\infty/F)$  とおくと自然な表現:

$$\rho: G \hookrightarrow \text{Aut}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_{p^n}) \cong \mathbb{Z}_p^\times$$

を得られ、 $\mathbb{Z}_p^\times = \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$  に対応して  $G = \Delta \times \Gamma$  と分解される。ここで  $\Delta \cong \text{Gal}(F_0/F)$ 、 $\Gamma = \text{Gal}(F_\infty/F_0)$ 。  $\Gamma$  は  $1 + p\mathbb{Z}_p$  の指数有限の部分群と同型な  $\mathbb{Z}_p$  の加法群と同型である。特に  $\exists \sigma \in \Gamma$  があり、 $\Gamma$  は  $\sigma$  を topological に生成される。以下このように  $\sigma$  を一つきめておく。



$F_n \in \Gamma^{P^n}$  に対応する  $F_\infty/F_0$  の中間体とし、 $A_n \in F_n$  の ideal 類群の  $p$ -primary component とする ( $n=0, 1, \dots$ )。  $A_n$  は自然に  $\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(F_n/F)]$ -module となり、従って

$$\mathcal{X} \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim A_n \quad (\text{norm に關する proj. lim.})$$

は  $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\text{Gal}(F_n/F)]$  (制限に關する proj. lim.)-module となる。これらについて次の事実 ① ~ ③ が知られている。

$$\text{① 対応 } \delta \leftrightarrow 1+X \text{ により } \varprojlim \mathbb{Z}_p[\text{Gal}(F_n/F)] \cong \mathbb{Z}_p[\Delta][[X]]$$

②  $\mathcal{X}$  は有限生成の torsion  $\mathbb{Z}_p[\Delta][[X]]$ -module.

次に  $i \in \mathbb{Z}$  s.t.  $1 \leq i \leq |\Delta|$  に対応して

$$\mathcal{X}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{X} \mid \delta x = \kappa(\delta)^i x \text{ for } \forall \delta \in \Delta\}$$

と置く。① により  $\mathcal{X}^{(i)}$  は  $\mathbb{Z}_p[[X]] = \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p} = \mathcal{L}$ -module となる。

③  $\mathcal{L}$ -module の完全系列:

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow \mathcal{X}^{(i)} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{n(i)} \mathcal{L}/(f_{ij}) \rightarrow F_2 \rightarrow 0$$

が成り、 $F_1, F_2$  は有限。  $f_i(x) = \prod_{j=1}^{n(i)} f_{ij}(x)$  と置く。

これは  $\mathcal{L}^\times$ -multiple を除いて  $\mathcal{X}^{(i)}$  の因子を定めた。

予想 ([2] の "Main Conjecture").  $u = \kappa(\theta)$  とし、

$f_i(x)$  を適当にとると

$$(i) f_i(u^\alpha - 1) = L_p(\rho, \theta^{1-i}) \quad \text{for } i = \text{odd}, \neq 1$$

$$(ii) f_1(u^\alpha - 1) = (u^\alpha - u) L_p(\rho, \theta^0)$$

但し  $\theta^0$  は単位指標。

これは有限体上の一般数代数学関数体の zeta 函数 (の主要部) 本. Tate module の上での Frobenius の特性多項式として得られることの類似とも見做せる。この予想については次のことが証明されている。

定理 6 (Coates - Lichtenbaum [3])  $F/\mathbb{Q}$  本 Abel で、

更に次の三条件が成り立つば予想も成り立つ。

(i)  $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i: \text{odd}}}^{|\Delta|} A_0^{(i)}$  本  $\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(F_0/\mathbb{Q})]$  - module として cyclic (i.e.  $\mu$  と  $\nu$  の元で生成される)。

(ii)  $F_0$  の最大実部分体の素点で  $p$  をわらぬものは  $F_0$  で分解しない。

(iii)  $p$  は  $[F:\mathbb{Q}]$  をわらぬ。

注意  $F=\mathbb{Q}$  のときこれは岩沢 [6], [7] による結果で、[3] の証明はこれを少し一般化したもの。  $F=\mathbb{Q}$  のときは上の条件 (i) は常に成り立つものと予想されている (岩沢 - Leopoldt 予想)。

尚、以上では専ら総実体の場合を考へた。そうでない場合は類指標に關する L 函数の負の整数での値が全  $2\pi$  に等しくなる。 Serre [12] は虚二次体、或は一般の CM 体の場合には  $(A_0)$  型量指標の L 函数の  $p$ -adic な類似物を考へることを提案している。實際の後のこの方面の研究も色々ある。

211 の  $\zeta$  本. ここでは省略する。

### 文献

- [1] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta  $p$ -adiques, Inv. Math. 51 (1979) 29-60
- [2] J. Coates,  $p$ -adic  $L$ -functions and Iwasawa's theory, Durham conference on alg. num. theory and class field theory, (1976) 269-353
- [3] J. Coates, S. Lichtenbaum, On  $\ell$ -adic zeta functions, Ann. of Math. 98 (1973) 498-550
- [4] J. Coates, W. Sinnott, On  $p$ -adic  $L$ -functions over real quadratic fields, Inv. Math. 25 (1974) 253-279
- [5] P. Deligne, K. Ribet, Values of abelian  $L$ -functions at negative integers (in preparation).
- [6] K. Iwasawa, On some modules in the theory of cyclotomic fields, J. Math. Soc. Japan 16, No.1 (1964) 42-82
- [7] K. Iwasawa, On  $p$ -adic  $L$ -functions, Ann. of Math. 89 (1969) 198-205
- [8] K. Iwasawa, Lectures on  $p$ -adic  $L$ -functions,

- Ann. Math. Studies, 74, Princeton (1972)
- [9] T. Kubota, H. Leopoldt, Eine  $p$ -adische Theorie der Zetawerte, J. reine angew. Math. 214/215 (1964) 328-339
- [10] H. Leopoldt, Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern, J. reine angew. Math. 209 (1962) 54-71
- [11] H. Leopoldt, Eine  $p$ -adische Theorie der Zetawerte II, J. reine angew. Math. 274/275 (1975) 224-239
- [12] J.-P. Serre, Formes modulaires et fonctions zêta  $p$ -adiques, in Springer Lecture Notes 350 (1973) 191-268
- [13] J.-P. Serre, Sur le résidu de la fonction zêta  $p$ -adique d'un corps de nombres, Comptes Rendus Acad. Sci. 287 Sér. A 183-188
- [14] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 23, No. 2 (1976) 393-417
- [15] C. L. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Gött. Nachr. 3, 1970, 15-56