数理解析研究所講究録
361巻 1979年 1-8

ある種のP-凸領域

東大 理　　中根静男

定数係数線型偏微分作用素 $P(D)$ が、$(D_{n+1},\cdots,D_{n+k})$ を含まないとき、$\mathbb{R}^{n+k}$ における領域 Ω の P-convexity を幾何学的に特徴付けることを目標にする。

一般に、$\mathbb{R}^n$ の領域 Ω が P-convex とは、

$\forall K$: compact in Ω に対し、$\exists K'$: compact in Ω, such that

$u\in\mathcal{E}'(\Omega)$, $\operatorname{supp} P(-D)u\subset K \Rightarrow \operatorname{supp} u\subset K'$

が成り立つことである。この概念が重要なのは、Malgrange [3] による、次の性質にある。

$P(D)u=f$ が $\forall f\in C^\infty(\Omega)$ に対し解 $u\in C^\infty(\Omega)$ を持つ

$\Leftrightarrow$ Ω が P-convex。

開凸集合が P-convex であることはよく知られているが、P-convex set の完全な特徴付けは、次の場合にしかわかっていない。

1) P が elliptic　　(Hörmander [1])

2) $n=2$ (Hörmander [1])

3) Pが1階 (Zachmanoglou [10])

4) $n=3$，Pはprincipal type (i.e. $P_m(\xi)=0 \Rightarrow \operatorname{grad} P_m(\xi) \neq 0$)

かつ$\partial\Omega$はC^2 (Persson [8])

5) $P(D) = D_1 D_2 + \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n} D_j^2$，$\partial\Omega$は$C^2$ (Persson [9])

ここでは，主に上の場合のような作用素をとり上げ，それらを$\mathbb{R}^{n+k}$の作用素とみなす。つまり，$(D_{n+1}, \cdots, D_{n+k})$に依らぬ。

§1 一般的な結果

まず，Persson [5]にそってuniqueness coneを定義する。

__定義1__ M: proper open convex cone in $\mathbb{R}^n$，vertex 0

と$y \in \mathbb{R}^n$に対し，

$$K(M, y) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x-y, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in M\}$$

とおく。また，$N \in M$，$0 < \rho \leq \infty$に対し，

$$K(N, M, y, \rho) = \{x \in K(M, y) ; \langle x-y, N \rangle \geq -\rho\}$$

とおく。$M \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n ; P_m(\xi) \neq 0\}$のとき，$K(N, M, y, \rho)$を$y$での$P$のuniqueness coneという。

すると，Persson [5]により，次を得る。

__補題1__ $K(N, M, y, \rho) \subset \Omega$を$P$のuniqueness coneとする。

$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$が，

$$P(-D)u = 0 \quad \text{near } K(N, M, y, \rho)$$

$$u = 0 \quad \text{near } K(N, M, y, \rho) \cap \{x \,;\, \langle x-y, N\rangle = -\rho\} \qquad (1)$$

を満たせば、

$$u = 0 \quad \text{in Int } K(N, M, y, \rho)$$

（ここでは、(1)の集合を coneの底ということにする。）

証明は Holmgren の一意性定理から従う。この補題は、$P(-D)u = 0$ の distribution 解の零点が、P の uniqueness cone に沿って伝播することを示している。特に P が elliptic のときは、M をいくらでも開半空間に近づけられるので、P の uniqueness cone は、線分又は半直線にいくらでも近づけられる。故に、解の零点は、任意の折線に沿って伝わる。これは、P が elliptic のとき、任意の開集合が P-convex になることの別証明を与える。なお、Holmgren の定理は hyperfunction でも成り立つので、この補題と、以下の零点の伝播に関する結果は hyperfunction でも正しい。

さて、cones の chain を、cones の有限集合 $\{K_i\}$ で、各 K_i の底は K_{i+1} に含まれるものと定義する。

<u>定義2</u>　K : compact in Ω に対し、

$$\hat{K}(P, \Omega) = K \cup \{x \in \Omega \setminus K \,;\, x \text{は} K^c \text{内の} P \text{の uniqueness cones の chain では} \Omega^c \text{又は} \infty \text{とは結べない。}\}$$

とおき、K の Ω における weak P-hull と呼ぶ。

特に P が elliptic なら、$\hat{K}(P, \Omega)$ は K と Ω で相対 compact な K^c

のすべての連結成分の和集合である。次の補題は補題1からすぐ出る。

<u>補題2</u>　K : compact in Ω とすると、$u\in\mathcal{E}'(\Omega)$ に対し、

$$\mathrm{supp}\,P(-D)u\subset K \Rightarrow \mathrm{supp}\,u\subset \hat{K}(P,\Omega)$$

すると、P-convexity のひとつの十分条件を与えることができる。

<u>定理1</u>　任意の K : compact in Ω に対し：$\hat{K}(P,\Omega)$ が compact in Ω
$\Rightarrow$ Ω は P-convex.

実は、先に上げた 1)〜5) の場合は、この十分条件が必要条件にもなっている。即ち、これらの場合、

$$\Omega : \text{P-convex} \Leftrightarrow \hat{K}(P,\Omega) : \text{compact in } \Omega \text{ for all } K : \text{compact in } \Omega \qquad (2)$$

§2　P が一部の変数を含まない場合

以後、$\mathbb{R}^{n+k}$ 上の作用素 $P(D)$ で、$(D_{n+1},\cdots,D_{n+k})$ を含まないものを考える。即ち、P は $\mathbb{R}^n$ 上の作用素でもある。混乱を避けるために、P を $\mathbb{R}^n$ 上の作用素とみなすときは P' と書く。そして $\mathbb{R}^{n+k}$ の領域 Ω の P-convexity を調べる。

$$\mathbb{R}^{n+k}\ni x=(x',x'')\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$$

$$a\in\mathbb{R}^k,\ \Omega\subset\mathbb{R}^{n+k} \text{ に対し、} \Omega_a=\{x\in\Omega ; x''=a\}$$

と書くことにする。まず、P-convexity のひとつの必要条件を与える。以下の議論で Ω_a は $\mathbb{R}^n$ の開集合ともみなしている。

<u>定理2</u>　Ω : P-convex $\Rightarrow$ $\forall a \in \mathbb{R}^k$ に対し，Ω_a は P'-convex

<u>証明</u>　或る $a \in \mathbb{R}^k$ に対し，Ω_a が P'-convex でないとすると，Ω_a の compact set K_a と，$\mathcal{E}'(\Omega_a)$ の列 $\{u_j(x')\}$ があって，

$$\operatorname{supp} P'(-D')u_j \subset K_a \quad \text{かつ} \quad \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u_j, \Omega_a^c) \to 0 \quad (j \to \infty)$$

そこで，

$$v_j(x) = u_j(x')\,\delta(x''-a)$$

とおくと，$v_j \in \mathcal{E}'(\Omega)$ で，

$$\operatorname{supp} P(-D)v_j \subset K_a \quad \text{かつ} \quad \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v_j, \Omega^c) \to 0 \quad (j \to \infty)$$

故に Ω は P convex でない。//

この条件は十分条件ではない。反例は，例えば P' が $\mathbb{R}^n$ で elliptic のときである。しかし，P' が $\mathbb{R}^n$ で (2) を満たしているならば，P-convexity のひとつの十分条件を与えることができる。

<u>定理3</u>　P' が $\mathbb{R}^n$ で (2) を満たすとき，
任意の $a \in \mathbb{R}^k$ に対し，Ω_a が P'-convex かつ $\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$ が compact in Ω
$\Rightarrow$ Ω : P-convex

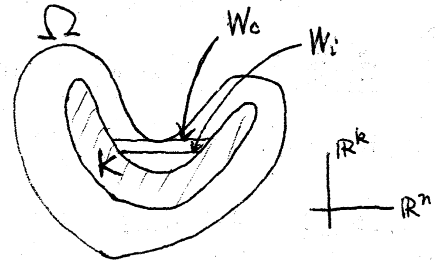
<u>証明</u>　y での P の uniqueness cone は，$x''=y''$ 上の P' の y' での uniqueness cone にいくらでも近づけられる。これは，P が $(D_{n+1}, \ldots D_{n+k})$ を含まないことから容易にわかる。即ち，P の uniqueness cone は $\mathbb{R}^k$ 方向にはつぶれていて，$\mathbb{R}^n$ に平行とみなしてよい。
故に $\hat{K}(P, \Omega)$ は $\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$ に含まれ，仮定より compact in Ω。
よって，定理1より Ω は P-convex。//

特にP'が$\mathbb{R}^n$でellipticなら、定理3の条件は必要条件にもなっている。故に、この場合は、P-convexityの完全な特徴付けができたことになる。

<u>定理4</u>　P'は$\mathbb{R}^n$でellipticとするとき、

$$\Omega : P\text{-convex} \Longleftrightarrow \forall K : \text{compact in } \Omega \text{ に対し、} \bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a) \text{ は compact in } \Omega$$

<u>証明</u>　Zachmanoglou [10] の定理4の証明の若干の変形である。必要性を示せばよい。或るcompactなKに対し$\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$がcompactでないとすると、$\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)$の点列$\{x^i\}$で$[\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)]^c$の点$x^0$に収束するものがある。$x^i \in K^c$としてよい。$W_i$を、$x^i$を含む、$\Omega$で相対compactな、$K^c \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k}; x'' = x^{i\prime\prime}\}$の連結成分とする。又、$W_0$を、$x^0$を含む、$K^c \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k}; x'' = x^{0\prime\prime}\}$の連結成分とする。$x^0 \in [\bigcup_a \hat{K}_a(P', \Omega_a)]^c$故、$W_0$は非有界又は$\Omega^c$と交わる。$W_0$が非有界なら、$x^0$は$W_0$内の$\infty$を通る折線の端点で、この折線は$K$と交わらぬ。故に、十分大きな$i$に対し、$x^i$も$K^c$内の折線で$\infty$と結ばれ、矛盾。故に$W_0$は$\Omega^c$と交わる。同様に、$\mathrm{dist}(W_i, \Omega^c) \to 0$ $(i \to \infty)$は容易にわかる。



図のような状況になっている。∂W_iはKに含まれることに注意しておく。

さて、$w(x')$ を $P'(-D')w(x')=0$ の実解析解とし、$\chi_i(x')$ を $\mathbb{R}^{n'}$ での W_i の特性函数とし、

$$u_i(x) = \chi_i(x')\, w(x')\, \delta(x'' - x_i'')$$

とおくと、

$$\operatorname{supp} u_i = \overline{W_i}\ , \quad \operatorname{supp} P(-D)u_i \subset W_i$$

故に Ω は P-convex でない。よって必要性が言えた。//

定理3は 2)～5) の場合にも適用できるが、このとき定理3の条件が必要かどうかは筆者にはわからない。

最後に、4) において、P が principal type という条件は、constant multiplicity にまで緩められる。実際、uniqueness cone は multiplicity には依らないことと、null solution が constant multiplicity でも作れる（Persson [6], [7], Komatsu [2]）ことから容易にわかる。

文献

[1] L. Hörmander : Linear partial differential operators. Springer, Berlin (1963).

[2] H. Komatsu : Irregularity of characteristic elements and construction of null solutions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math., **23**, 297-342 (1976).

[3] B. Malgrange : Existence et approximation des solutions des equations

aux dérivées et des equations de convolutions. Ann. Inst. Fourier Grenoble, 6, 271–355 (1955–1956).

[4] J. Persson : A sufficient condition for a set to be P-convex in $\mathbb{R}^n$. Mathematiche, 25, 1–7 (1970).

[5] ______ : On uniqueness cones, velocity cones and P-convexity. Ann. Mat. Pura Appl., (4) 96, 69–87 (1973).

[6] ______ : Semi-global null solutions and P-convexity. Boll. Un. Mat. Ital., (4) 8, 20–28 (1973).

[7] ______ : Correction of "Semi-global null solutions and P-convexity". Boll. Un. Mat. Ital., (4) 11, 518–524 (1975).

[8] ______ : The Cauchy problem at simply characteristic points and P-convexity. To appear in Ann. Mat. Pura Appl.

[9] ______ : The wave operator and P-convexity. To appear.

[10] E. C. Zachmanoglou : An application of Holmgren's uniqueness theorem and convexity with respect to differential operators with flat characteristic cones. Trans. Am. Math. Soc., 140, 109–115 (1969).