数理解析研究所講究録
362巻 1979年 114-123

正規イデアルのprecipitousnessを保持するCohen拡大の一条件について

神大 教養　角田 譲

1. 問題の提起. MをZFCの推移的模型, $s \in M$で, $s \neq \phi$とする。s上のM-ultrafilterとは次のもの$\mathcal{U}$を意味する.

i) $\mathcal{U} \subseteq P(s) \cap M$,

ii) $A \in \mathcal{U} \wedge A \subseteq B \in P(s) \cap M \longrightarrow B \in \mathcal{U}$,

iii) $A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U} \longrightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$

iv) $A \in P(s) \cap M \longrightarrow A \in \mathcal{U} \vee s - A \in \mathcal{U}$.

v) $\mathcal{U} \neq P(s) \cap M$.

$\mathcal{U}$が必ずしもMに属するという事はない事に注意されたい

${}^{s}M \cap M = \{f;\quad f: s \rightarrow M \wedge f \in M\}$に対して次の様に同値関係を定義する.

$$f \sim g \iff \{x \in s;\ f(x) = g(x)\} \in \mathcal{U}.$$

${}^{s}M \cap M/\sim$に対して二項関係Eを次の様に定義する.

$$[f] E [g] \iff \{x \in s;\ f(x) \in g(x)\} \in \mathcal{U}.$$

よって. 構造$\mathfrak{Ult}_{\mathcal{U}}(M) = \langle {}^{s}M \cap M/\sim\ ;\ E \rangle$が定義される.

通常の ultrapower の様に Łoś の定理が成立する.

さて, V を the ground model, P を V の中の partially ordered set とする. S を V の non-empty set, G を P に関する generic filter over V とする. さらに, W を S 上の $V[G]$-ultrafilter とする. その時, $W' = \{A \in P(S) \cap V : A \in W\}$ は, 明らかに, S 上の V-ultrafilter となる. ゆえに, $\langle M : E\rangle = Ult_{W'}(V)$ が構成される. $j : \langle V : \in\rangle \to \langle M : E\rangle$ を標準的な elementary embedding とすると, $j(P)$ は $\langle M : E\rangle$ の中における p.o. set である. 次に, $Ult_W(V[G])$ を考える. その時, それは, $\langle M_W[H] : E_W\rangle$ なる形になっているであろう. そこで我々は次の一般的な形の問題を考える事にする. $\langle M : E\rangle$ と $\langle M_W : E_W\rangle$ に, 標準的な isomorphism が存在し, その isomorphism による H の image が丁度, $j(P)$-generic over M となり, $Ult_W(V[G])$ と $\langle M[H'] : E\rangle$ が同型となる (但し, ここでの H' は isomorphism による H の像). 即ち,

$$\begin{tikzcd}
 & & Ult_W(V[G]) \cong \langle M[H'] : E\rangle & \\
V[G] \arrow[urr, "\text{ultrapower extension}"] & & & \\
 & & Ult_{W'}(V) = \langle M : E\rangle \arrow[uu, "\text{generic extension}"'] & \\
 & V \arrow[uul, "\text{generic extension}"] \arrow[ur, "\text{ultrapower extension}"'] & &
\end{tikzcd}$$

が成り立って可換となる事.

我々は, 上の問題が肯定的である一つの条件について考え, その応用を述べる事にする.

2. Generic ultrapower. 今 S を non-empty set, I を S 上の ideal とする. R_I として $\{A \subseteq S;\ A \notin I\}$ なる集合を意味し, R_I を set of forcing conditions と考える時には, A, B R_I に於ける場合, $A \subseteq B$ をもって, A の情報の方が, B の情報よりも多くの情報をもっているものとする.

さて, V を the ground model として, W_I を R_I-generic over V とする. その時, 次の補題が成立する.

補題 1. W_I は, S 上の V-ultrafilter で, I の dual filter を含む.

次に, I を, regular uncountable cardinal κ 上の, non-principal κ-complete ideal on κ とする. その時, 次が成立する.

補題 2. W_I は, κ 上の V-κ-complete non-principal V-ultrafilter となる.

ここで, V-κ-complete とは, 次の条件が成立している事をいう:

$$\langle A_\xi ; \xi<\zeta \rangle \in V,\ \zeta<\kappa,\ (\forall \xi<\zeta)\, A_\xi \in W_I \Longrightarrow \bigcap_{\xi<\zeta} A_\xi \in W_I.$$

さらに, I が, κ 上の normal ideal であれば,

補題 3. W_I は V-normal となる.

ここで, W_I が V-normal であるとは:

$$f\in V,\quad f:\kappa\to\kappa,\quad (\forall\xi<\kappa)(f(\xi)<\xi)$$
$$\Longrightarrow (\exists\zeta<\kappa)\ \{\xi<\kappa : f(\xi)=\zeta\}\in W_I.$$

補題2, 補題3より, 次の事が簡単にいえる

補題4. i) I が κ 上の non-principal κ-complete ideal であれば, $Ult_{W_I}(V)$ は, order type κ の $Ord^{(Ult_{W_I}(V))}$ の initial segment をもつ.

ii) I が normal であれば, $[id_\kappa]$ は $Ult_{W_I}(V)$ の κ-th ordinal となる.

3. 問題の一つの条件. κ を regular uncountable cardinal, I を κ 上の normal ideal, P を κ-chain condition を満たす p.o. set とする. J を P に関する Chen extension $V[G]$ の中での I によって生成される ideal とする. J が $V[G]$ において κ 上の normal ideal となる事は, P が κ-chain condition を満たす事より判る.

補題1. W を $V[G]$ の R_J-generic filter とする. その時, $W_I=\{A\in P(\kappa)\cap V ; A\in W\}$ は, V 上の R_I-generic filter となる.

(証明). W_I が, κ 上の V-ultrafilter となる事は明らかである. W_I が I の dual filter を含む事も明白である. $\mathcal{X}\in V$ を I-分割とする. —即ち— R_I の部分集合で次の事を満たす

極大集合である： $X, Y \in \mathcal{X}, X \neq Y \Rightarrow X \cap Y \in I$.

$\mathcal{X}$ が J-分割である事を示す. $A \notin J$ とする. $p_0 \in G$ を $p_0 \Vdash \dot{A} \notin \dot{J}$ であるように選ぶ. $Y = \{p \in P : p$ と p_0 は, incompatible, 又は, $p \le p_0$ で $p \Vdash X \cap \dot{A} \notin \dot{J}$ なる $X \in \mathcal{X}$ が存在する$\}$ とおく. Y が P で dense である事をいう. $p \in P$ とせよ. p と p_0 は compatible としてよい. $p_1 \in P$ を $p_1 \le p$, $p_1 \le p_0$ とする. $p_1 \Vdash \dot{A} \notin \dot{J}$ であるので, $B = \{\alpha < \kappa : p_1 \nVdash \alpha \notin \dot{A}\} \notin I$. しかるに, $\mathcal{X}$ が I-partition である事より, $X \in \mathcal{X}$, $B \cap X \notin I$ なる X が存在する. 今 $p_1 \Vdash \dot{A} \cap X \in \dot{J}$ とする. P が κ-chain condition を満たす事より, $\kappa - D \in I$, $p_1 \Vdash \dot{A} \cap X \cap D = \phi$ なる D が存在する. $B \cap X \notin I$ であるので, $D \cap B \cap X \neq \phi$. $\alpha \in D \cap B \cap X$ とする. $\alpha \in D \cap X$ であるので, $p_1 \Vdash \alpha \notin A$, $\alpha \in B$ であるので, $p_1 \nVdash \alpha \notin \dot{A}$. これは矛盾である. よって, $p_1 \nVdash \dot{A} \cap X \notin \dot{J}$. それゆえ, $p_2 \Vdash \dot{A} \cap X \notin \dot{J}$ なる $p_2 \le p_1$ が存在する. よって, Y が P で dense である事がいえた. $p \in G \cap Y$ とする. $p_0 \in G$, (p と p_0 は compatible であるので). よって, $p \le p_0$ で $p \Vdash X \cap \dot{A} \notin \dot{J}$ なる $X \in \mathcal{X}$ が存在する. よって, ある $X \in \mathcal{X}$ に対して, $X \cap A \notin J$. 即ち, $\mathcal{X}$ は J-partition である. W が R_J-generic であるので, $X \in W \cap \mathcal{X}$ なる X が存在する, それで, $X \in W_I \cap \mathcal{X}$. W_I は V 上の R_I-generic filter である.

$j: \langle V : \in \rangle \to \langle M : E \rangle = Ult_{W_2}(V)$ を canonical elementary embedding とする. $H \subseteq ext(j(P))$ を, 次の様に定義する ($ext(j(P)) = \{x \in M ; x E j(P)\}$):
$[\langle q_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle] \in ext(j(P))$ とする. その時,

$$[\langle q_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle] \in H \text{ iff } \{\alpha < \kappa ; q_\alpha \in G\} \in W.$$

補題2. Kは, $j(P)$-generic over $\langle M : E \rangle$.

(証明). 次の i), ii), iii) を証明すれば良い. i)と ii) は明らかである. iii)を示す為に, $X \in M$ を $\langle M : E \rangle \models$ "X を $j(P)$ の dense subset" とする. $\langle X_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle \in V$ を $X = [\langle X_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle]$, X_α は P の dense subset, $\alpha < \kappa$ である様に選ぶ.

$\mathscr{X} = \{A \notin J ; (\exists \langle q_\alpha : \alpha < \kappa \rangle \in V)(q_\alpha \in X_\alpha,\ \forall \alpha < \kappa,\ A \subseteq \{\alpha < \kappa : q_\alpha \in G\})\}$ と, $V[G]$ の中で定義する. $\mathscr{X}$ が P_J で dense である事を証明する. $A \in P(\kappa) \cap V[G]$, $A \notin J$ とする. $p_0 \in G$ を $p_0 \Vdash \dot{A} \notin \dot{J}$ と選ぶ.

$Y = \{p \in P ; p$ と p_0 は incompatible, 又は, $p \leq p_0$ で $(\exists \langle q_\alpha : \alpha < \kappa \rangle)(q_\alpha \in X_\alpha,\ \forall \alpha < \kappa,\ p \Vdash \{\alpha < \kappa : q_\alpha \in \dot{G}\} \cap \dot{A} \notin \dot{J})\}$

明らかに, $Y \in V$ である. Y が P で dense である事を示そう. $p \in P$ とする. p と p_0 は compatible として良い. $p_1 \in P$ を $p_1 \leq p$, $p_1 \leq p_0$ とする. $p_1 \Vdash \dot{A} \notin J$ であるので, $B = \{\alpha < \kappa : p_1 \nVdash \alpha \notin \dot{A}\} \notin I$ である.

その時, $\langle q_\alpha : \alpha<\kappa\rangle$ を次の条件を満たす様に選ぶ事ができる

(a) $q_\alpha \le p_1$, $\alpha<\kappa$.

(b) $q_\alpha \in X_\alpha$, $\alpha<\kappa$.

(c) $q_\alpha \Vdash \alpha \in A$, $\alpha\in B$.

$p_1 \Vdash \{\alpha<\kappa ; q_\alpha \in \dot{G}\}\cap A \in J$ とする. P が κ-chain condition を満たしている事より $p_1 \Vdash \{\alpha<\kappa : q_\alpha\in\dot{G}\}\cap \dot{A}\cap D=\phi$ なる $\kappa - D\in I$ が存在する. $B\notin I$ であるので, $B\cap D\neq\phi$. $\alpha\in B\cap D$ とする. (c)により $q_\alpha\Vdash \alpha\in D\cap A$. (a)により $q_\alpha \Vdash \{\alpha<\kappa ; q_\alpha\in\dot{G}\}\cap\dot{A}\cap D=\phi$. その事より $q_\alpha\Vdash q_\alpha\notin G$. これは矛盾である. よって, $p_2\le p_1$, $p_2\Vdash\{\alpha<\kappa ; q_\alpha\in\dot{G}\}\cap\dot{A}\notin J$ なる p_2 が存在する. その時, $p_2\in Y$, $p_2\le p$. よって, Y は P で dense である. $p\in Y\cap G$ とする. $p_0\in G$ であるので, p_0 と p は compatible である. それ故, $(\forall\alpha<\kappa)(q_\alpha\in X)$, $C=\{\alpha<\kappa ; q_\alpha\in G\}\cap A\notin J$ なる $\langle q_\alpha:\alpha<\kappa\rangle$ が存在する. その時, $C\in\mathscr{X}$, $C\subseteq A$. よって, $\mathscr{X}$ は R_J で dense である. W が R_J-generic over $V[G]$ である事より $\mathscr{X}\cap W\neq\phi$. $A\in W\cap\mathscr{X}$ とする. $(\forall\alpha<\kappa)(q_\alpha\in X_\alpha)$, $A\subseteq\{\alpha<\kappa : q_\alpha\in G\}$ なる $\langle q_\alpha:\alpha<\kappa\rangle\in V$ が存在する. その事より, $\{\alpha<\kappa : q_\alpha\in G\}\in W$, 即ち, $q=[\langle q_\alpha:\alpha<\kappa\rangle]\in H$, $q\in ext(X)$. よって H は $j(P)$-generic over $\langle M : E\rangle$ である

$\langle M[H]; \in\rangle$ を $\langle M; \in\rangle$ の generic extension とする.
elementary embedding $\tilde{j}: \langle V[G]; \in\rangle \to \langle M[H]; \in\rangle$
を次の様に定義する. $x \in V[G]$ とする. $\dot{x}$ を $i_G^V(\dot{x}) = x$
なる term とする. $\tilde{j}(x) = i_H^M(j(\dot{x}))$ とする. $p \in G \iff j(p) \in H$
, $p \in P$ である事を考えれば, $\tilde{j}$ が well-defined である事
が判る. 同様の事実により, $\tilde{j}$ は j の拡張した elementary
embedding となる.

補題3. $W = \{A \in P(\kappa) \cap V[G] : \langle M[H]; \in\rangle \models \kappa_M \in \tilde{j}(A)\}$.

$j_W : \langle V[G]; \in\rangle \to Ult_W(V[G])$ を canonical
embedding とする. $k : Ult_W(V[G]) \to \langle M[H]; \in\rangle$
を次の様に定義する: $[f]_W \in Ult_W(V[G])$.
$k([f]_W) = \tilde{j}(f)(\kappa)$. 補題3を使用して次の事を証明できる.

補題4. k は同型である.

$$\begin{tikzcd} & Ult_W(V[G]) \arrow[d, "k"] \\ V[G] \arrow[ur, "j_W"] \arrow[r, "\tilde{j}"] & M[H] \\ V \arrow[u, "\cup"] & M \arrow[u, "\cup"'] \end{tikzcd}$$

ゆえに、我々は、§1で提起した問題に解答を与える一条件を、得た事になる。

4. 応用。

§3で得た結果より、次の定理が得られる。

定理1. κをregular uncountable cardinal, Iをnormal ideal on κとする。$\mathcal{P}$をκ-chain conditionを満足するp.o.setとする。Iがprecipitousになるための、必要十分条件は、$\Vdash$ "Iで生成されたκ上のidealがprecipitous" である。

（Iがprecipitousであるとは、$\mathrm{Ult}_{W_I}(V)$がwell-foundedである事である）。

証明は前節の補題4より明らかである。

定理2. κをregular uncountable cardinal, Tをκ上のκ-saturated normal idealとする。その時、

κ上のthin setsがprecipitousであるための必要十分条件は、$\{\alpha<\kappa;$ α上のthin setsのidealがprecipitous$\}$がT-measure oneを持つ事である。

参考文献.

[1]. T. Jech and K. Prikry, Ideal of sets and the power set operation, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 593-595.

[2] T. Jech, M. Magidor, W. Mitchell and K. Prikry, Precipitous ideals, to appear.

[3]. Y. Kakuda, On a condition for Cohen extensions which preserve precipitous ideals.