数理解析研究所講究録
366巻 1979年 176-186

Nevanlinnaの因数分解定理の拡張
(B. Korenblumの理論)

茨城大 理　　荷見 守助

単位円板 $U = \{|z| < 1\}$ 上の正則函数 $f(z)$ がNevanlinna族に属すれば、

$$(1) \qquad f(z) = z^p B(z) \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, d\mu(\varphi) + ia\right\}$$

の形に因数分解され，逆も正しい．こゝで $p \geq 0$ は整数，B は f の零点から作られるBlaschke積，μ は円周 ∂U 上の有界な実測度で，a は実定数である。これが標記のNevanlinnaの定理である．B. Korenblum [1] は f が所謂"緩増加"ならば (1) に類似の公式が可能であることを示した．これは古典的なNevanlinna理論の拡張として極めて注目すべきものと考へられる．Korenblumはこの方向での~~興~~味あるいくつかの結果を得てゐる．その概略はヘルシンキ・コングレスの特別講演 [2] で述べられてゐるが、解決を今後に待つ問題も多いと思はれるので，[1] に限って紹介しておきたい．

§1. 函数族 $A^{-\infty}$. $n=1, 2, \dots$ に対し, $f\in A^{-n}$ とは f が U 上で正則で且つ $|f(z)| \leqq C_f(1-|z|)^{-n}$ (C_f は定数) を満たすこととし, $A^{-\infty}=\bigcup_{n=1}^{\infty} A^{-n}$ とおく. 函数族 $A^{-\infty}$ が考察の対象である. (1) の形の表示を得るためには先づ次の二点を調べる必要がある: (I) $f\in A^{-\infty}$ の零点の集合を特徴付けること. (II) 零点を持たない $f\in A^{-\infty}$ に対し, 調和函数 $\log|f(z)|$ の Poisson 型積分表示を求めること.

Nevanlinna 族に属さない $A^{-\infty}$ の函数としては Horowitz [3] の調べた函数族がある. 例へば $H(z)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+e z^{2^k})$. 簡単な計算で $H\in A^{-3}$ 及び H の零点の集合は Blaschke 条件を満たさぬことが分かる.

§2. 零点集合の特徴付け. このため記号を若干用意する. ∂U 上の全ての弧 (空なもの, 一点から成るもの, 開、閉, 半開, ∂U 自身を含む) の集合を $\mathcal{K}$ と書く. $\forall I\in\mathcal{K}$ に対し $\kappa(I)=(2\pi)^{-1}|I|\left(\log((2\pi)^{-1}|I|)+1\right)$ とおく. $|I|$ は I の弧長である. $|I|=0$ のときは $\kappa(I)=0$ とする. ∂U 上の閉集合 F に対し $\partial U\setminus F$ の成分の集合を $\{I_\nu\}$ として

$$\hat{\kappa}(F)=\sum_\nu \kappa(I_\nu)$$

と定義する. F の 1 次元 Lebesgue 測度 0 で且つ $\hat{\kappa}(F)<\infty$ のときは, F を Carleson 集合と呼ぶ. これはこの小文の表面には

現はれないが重要な概念である．

∂U 上の任意の2点 ζ, ζ' に対し，これを両端とする ∂U の劣弧の長さを π で割ったものを $d(\zeta, \zeta')$ と書く．$\zeta \in \partial U$, $E \subset \partial U$ に対し，$d(\zeta, E) = \inf\{d(\zeta, \zeta') : \zeta' \in E\}$ と定義する．また ∂U 上の閉集合 F, $q \geqq 1$, $0 < a < 1$ に対し

$$G_{F;q,a} = \left\{ z \in \overline{U} : 1 - |z| \geqq a d^q\left(\frac{z}{|z|}, F\right)\right\} \cup \{0\}$$

とおく．

さて，U の中の点列 $\alpha = \{\alpha_\nu\}$, $0 < |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots$, を考へる．$\partial U$ 上の閉集合 F, $q \geqq 1$, $0 < a < 1$ に対し

$$\sigma_\alpha(F; q, a) = \sum \left\{ \log \frac{1}{|\alpha_\nu|} : \alpha_\nu \in G_{F;q,a} \right\}$$

とおく．又，$n > 0$, $q \geqq 1$, $0 < a < 1$ を固定して

$$m_\alpha(n, q, a) = \inf_F \{ n \hat{\kappa}(F) - \sigma_\alpha(F; q, a) \}$$

とおく．こゝで F は全ての有限集合（$\subset \partial U$）を動くものとする．Carleson 集合を動くとしても値は同じである．

定理 1. 上の α について次が成立つ．

(a) α が $f \in A^{-n}$ の零点の集合ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $m_\alpha(2n+\varepsilon, 1, a) > -\infty$．

(b) $m_\alpha(n, 1, a) > -\infty$ ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し α を零点の集合とする $f \in A^{-(2n+\varepsilon)}$ が存在する．

更にいくつかの特徴付けがある．例へば上の α が $f \in A^{-\infty}$

の零点集合になるための必要十分条件は

$$\sum_{\nu=1}^{N} \log \frac{1}{|\alpha_\nu|} = O(\log N) \qquad (N \to +\infty).$$

§3. Poisson型表示. 零点を持たぬ $f \in A^{-\infty}$ に対し $\log|f|$ の積分表示を得るためには,

$$(2) \qquad \begin{aligned} &u(0) = 0 \\ &u(z) \leqq c\left(\log \frac{1}{1-|z|} + a\right), \qquad \forall z \in U, \end{aligned}$$

を満たす実調和函数 $u(z)$ を考察すれば充分である. $0<r<1$ に対し $u_r(z) = u(rz)$ とおけば, u_r は U 上有界だから古典的 Poisson 公式により

$$u_r(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial U} P(\zeta, z)\, \sigma_r(|d\zeta|)$$

と表はされる. 但し測度 σ_r は

$$(3) \qquad \sigma_r(I) = \int_I u(r\zeta)\,|d\zeta|, \qquad \forall I \in \mathcal{R},$$

で与へられる. $r \nearrow 1$ とすることにより u に対応する測度が得られる感じではあるが, (2) の条件の下では測度としての収束は無理で一種の超函数として理解する必要がある.

定義. 函数 $\mu: \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ が ∂U 上の premeasure であるとは次の三性質を持つことを云ふ.

(a) $I_1, I_2 \in \mathcal{R}$ が $I_1 \cap I_2 = \phi$, $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{R}$ を満たすならば

$\mu(I_1 \cup I_2) = \mu(I_1) + \mu(I_2)$;

(b) $\mu(\partial U) = 0$;

(c) $I_\nu \in \mathfrak{K}$, $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} I_\nu = \phi$ ならば, $\mu(I_\nu) \to 0$.

与へられた premeasure μ に対して, $(0, 2\pi]$ 上の函数 $\hat{\mu}$ を $\hat{\mu}(\theta) = \mu([0, \theta))$ $(0 < \theta \leq 2\pi)$ で定義する. このとき $\hat{\mu}$ は次の性質を持つ:

(i) $\hat{\mu}(\theta - 0)$ $(0 < \theta \leqq 2\pi)$ と $\hat{\mu}(\theta + 0)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ が存在する;

(ii) $\hat{\mu}(\theta - 0) = \hat{\mu}(\theta)$ $(0 < \theta \leqq 2\pi)$;

(iii) $\hat{\mu}(2\pi) = 0$.

∂U 上の premeasure の集合と $(0, 2\pi]$ 上の函数で性質 (i), (ii), (iii) を持つものの集合は $\mu \longrightarrow \hat{\mu}$ により一対一に対応する. $\hat{\mu}$ の不連続点は高々可算個で, それらは全て第一種である.

Premeasure μ が κ-変分が有界であるとは, $\mathfrak{K}$ の元による ∂U の任意の有限分割 $\{I_\nu\}$ に対し

$$\sum_\nu |\mu(I_\nu)| \leqq C \sum_\nu \kappa(I_\nu)$$

を満たす定数 $C < +\infty$ が存在することを云ふ. この性質を持つ C の最小値を μ の κ-変分と呼び, $\kappa\text{-Var}\,\mu$ と書く. Premeasure の列 $\{\mu_k\}$ に対し premeasure μ が存在して

(i) $\exists\, C < +\infty \ni \kappa\text{-Var}\,\mu_k \leqq C$ $(k = 1, 2, \cdots)$;

(ii) $\hat{\mu}$ の全ての連続点 θ に於て $\hat{\mu}_k(\theta) \to \hat{\mu}(\theta)$

の二性質が成立つとき，$\{\mu_k\}$ は μ に κ-弱収束すると云ひ，$\mu_k \xrightarrow{\kappa w} \mu$ と書く．

さて (3) で与へられる測度（従って premeasure でもある）の集合 $\{\sigma_r : 0<r<1\}$ に対し，部分列 $\{\sigma_{r_\nu}\}$, $0<r_1<r_2<\cdots$, $r_\nu \to 1$, で κ-弱収束するものが存在し，その極限を σ と書けば次の結果が成立つ。

定理 2. U 上の実調和函数 $u(z)$ が (2) を満たすときは，∂U 上の κ-変分有界な premeasure σ が一意に存在して

(4) $$u(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{d}{d\theta}P(e^{i\theta}, z)\right]\hat{\sigma}(\theta)\,d\theta$$

が成立つ．逆も正しい．部分積分により (4) は形式的に

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial U} P(\zeta, z)\,\sigma(|d\zeta|)$$

に変換される．

§4. 因数分解． $f \in A^{-\infty}$, $f(0)=1$, を考へる． $\alpha = \{\alpha_\nu\}$ を f の零点集合とすると，§2 により $m_\alpha(n, 1, a) > -\infty$ なる整数 $n>0$ が存在し，これから

$$\sum_\nu (1-|\alpha_\nu|)^2 < +\infty$$

が従ふ。

この条件の下では一般Blaschke積 $\tilde{B}_\alpha$：

$$\tilde{B}_\alpha(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_\nu-z}{1-\bar{\alpha}_\nu z}\cdot\frac{|\alpha_\nu|}{\alpha_\nu}\cdot\exp\left(\frac{\frac{\alpha_\nu}{|\alpha_\nu|}+z}{\frac{\alpha_\nu}{|\alpha_\nu|}-z}\cdot\log\frac{1}{|\alpha_\nu|}\right)\right\}$$

が U 上収束することが分かる．しかも $h=\tilde{B}_\alpha^{-1}f\in A^{-\infty}$ であることが分かるが，h は零点を持たぬので $\log|h(z)|$ に §3 の結果が適用出来て

$$\log|h(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial U}P(\zeta,z)\,\sigma(|d\zeta|)$$

が得られる．σ は ∂U 上の premeasure である．これから

$$f(z)=\tilde{B}_\alpha(z)\cdot\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial U}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\sigma(|d\zeta|)+ia\right)\qquad(a\text{は定数})$$

の形の分解が直ちに導かれる．一般の $f\in A^{-\infty}$ については $f(z)$ の原点での零点の個数に応じて cz^p の形の因数を括り出して $f(0)=1$ の場合に帰着せしめられるから，(1) の形の分解が出来たことになる．

§5．補足．原論文の証明の中には筋書のみのものも多く大々適当に補って読む必要がある．その中の二点について簡単に附記する．

1) p.193 に $G_{F;2,b}$ の等角写像函数 w についての評価式

$$1-\varepsilon\le\frac{|z-\zeta|}{|w(z)-w(\zeta)|}\le1+\varepsilon\,,\quad\left|\arg\left(\frac{z}{\zeta}-1\right)-\arg\left(\frac{w(z)}{w(\zeta)}-1\right)\right|\le\varepsilon$$

($\forall \xi \in F,\ z \in G_{F;2,b}$) が全ての有限集合(乃至 Carleson 集合) F について同時に成立つことが証明なしに述べられてゐるが，F についての有限又は Carleson の制限は不要である．全ての閉集合 $F \subset \partial U$ について同時に成立たしめ得る．証明法はみな同じである．

2) p. 204 の Helly 型定理(定理 1)は古典的 Helly 定理の証明を真似るとよいと述べられてゐるがこれは必ずしも明らかではない．古典的定理の場合は，有界変分函数を単調函数の差に書いて単調函数について先づ議論するのが普通のやうに思はれるが，分解に対応する結果は後から出て来るし，その結果(p. 206 の定理 5)の証明には p. 204 の定理 1 を使ふので一見困るやうではあるが，実際はうまく行く．

(A) $\{\mu_k\}$ が premeasure の列で一様に上に K-有界，即ち

$$\mu_k(I) \leq C\,\kappa(I) \qquad (\forall I \in 𝓡,\ \forall k = 1, 2, \cdots),$$

ならば，$\{\mu_k\}$ の部分列で K-弱收束するものが存在する．

(B) p. 206，定理 5.

(C) p. 204，定理 1.

の順序で証明すればよい．定理 5 で必要な Helly 型の結果は (A) に述べられたもののみだからである．以下 (A) を示す．

補題．$C(x)$ は $x \geqq 0$ で定義され，$C(0) = 0$，$C(x) > 0$ ($x > 0$) を満たし，$x = 0$ で(右)連続とする．$g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上

の実数値函数で，任意の $x' < x''$ に対して

(5) $$g(x'') - g(x') \leqq c(x'' - x')$$

が成立つと仮定する．このときは全ての $x \in R$ に対して左右の極限 $g(x \pm 0)$ が存在する。（以下の証明から分かるやうに (5) は局所的に成立てば充分である．）

証明．$x \in R$ を任意に固定する．(5) により g は x の近傍で有界ある．従って

$$A_x \equiv \limsup_{\substack{y<x \\ y \to x}} g(y), \qquad B_x \equiv \liminf_{\substack{y>x \\ y \to x}} g(y)$$

はいづれも存在して有限である。しかも $g(x-0) = A_x$, $g(x+0) = B_x$ である．証明法は同じだから $g(x-0) = A_x$ を示す．定義より $\exists y_n \nearrow x \ni g(y_n) \to A_x$. さて任意の $y < x$ に対して $y < y_n$ なる n を選べば，(5) より

$$g(y) \geqq g(y_n) - c(y_n - y).$$

$y \to x$ とすれば，$y_n \to x$ となり従って $y_n - y \to 0$ となる．y_n の選び方と，$c(x)$ の $x=0$ に於ける右連続性から，$g(y_n) \to A$, $c(y_n - y) \to 0$ が得られるから

$$\liminf_{\substack{y<x \\ y \to x}} g(y) \geqq A_x.$$

A_x の定義を見れば，これから $g(x-0)$ が存在し A_x に等しいことは明らかである．(終)

補題は最初 $c_0(x) = (2\pi)^{-1}x\left(\log(2\pi x^{-1})+1\right)$ に対して証明された. $c(x)$を上の一般の形にしたのは藪田公三氏の注意による. 証明の本質は同一である.

補題の条件を満たす函数$g(x)$については

$$B_x \leqq g(x) \leqq A_x$$

が全ての$x \in \mathbb{R}$ について成立つ. $d_x = A_x - B_x$ とおけば, $d_x \geqq 0$ であり, $d_x > 0$となるxは高々可算個である.

(A)の証明. 補題を使へば(A)の証明は古典的Helly定理と殆んど同様に示される. 必要ならば$\hat{\mu}_k(\theta)$を周期 2π の函数として$\mathbb{R}$上に延長しておけば,

$$\hat{\mu}_k(\theta'') - \hat{\mu}_k(\theta') \leqq c(\theta''-\theta'), \qquad \theta' < \theta''.$$

但し, $c(x) = C\cdot c_0(x)$である. $\hat{\mu}_k(0) = 0$であることから, $\{\hat{\mu}_k\}$は一様に有界な函数列となるから, 対角線論法で部分列$\{\hat{\mu}_{k(j)}\}$を選び出し, 全ての有理点 $\theta \in [0, 2\pi)$に於て

$$\lim_{j\to\infty} \hat{\mu}_{k(j)}(\theta) \equiv \nu(\theta)$$

が存在するやうに出来る. そこで任意の$\theta \in [0, 2\pi)$に対し

$$\bar{\nu}(\theta) = \limsup_{j\to\infty} \hat{\mu}_{k(j)}(\theta),$$

$$\underline{\nu}(\theta) = \liminf_{j\to\infty} \hat{\mu}_{k(j)}(\theta)$$

とおけば, $\bar{\nu}(\theta)$, $\underline{\nu}(\theta)$ は共に有限でいづれも不等式(5)を満たす. 従って上の注意によって$\bar{\nu}$と$\underline{\nu}$は可算集合Dの外で連続である. 有理点に於ては $\bar{\nu}(\theta) = \nu(\theta) = \underline{\nu}(\theta)$ が成立

ち，有理点は稠密であるから $\theta \notin D$ に対し $\bar{\nu}(\theta)=\underline{\nu}(\theta)$ が成立つことが分かる。そこで $\hat{\mu}(\theta)$ を

$$\hat{\mu}(\theta)=\begin{cases}\bar{\nu}(\theta)=\underline{\nu}(\theta) & \theta\notin D\\ \bar{\nu}(\theta-0) & \theta\in D\end{cases}$$

と定義すれば，$\hat{\mu}$ は或 premeasure μ に対応することが分かる．構成法より　$\mu(I)\leqq C\kappa(I)$　$(\forall I\in\mathcal{R})$　及び

$$\hat{\mu}_{k(j)}(\theta)\longrightarrow\hat{\mu}(\theta)\qquad(\forall\theta\notin D)$$

は明らかである．(終)

参考文献

[1] B. Korenblum, *An extension of the Nevanlinna theory*, Acta Math. 135 (1975), 187–219.

[2] B. Korenblum, *Analytic functions of unbounded characteristic*, to appear in Proc. Internat. Congress Math. 1978.

[3] C. A. Horowitz, *Zeros of functions in the Bergman spaces*, Duke Math. J. 41 (1974), 693–710.