数理解析研究所講究録
366巻 1979年 156-175

無限次元線形システムの実現問題

千葉大　理　　柳原　二郎
鉄道技術研究所　川瀬　眞

1. 序

次の式で記述される線形システムを考える.

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ \\ y(t) = C(x(t) \end{cases} \qquad (1.1)$$

ここで $x(t)$ は状態空間と呼ばれるある線形位相空間 X に値をとる関数, A は X の上の (C_0)-半群の生成作用素, $u(t)$, $y(t)$ は入力関数, 出力関数であり, それぞれ $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ に値をとる関数である. このようなシステムは線形作用素の組 (A, B, C) で表わすことができるため, この組をシステムと呼ぶ.

システムの実現問題とは、$m \times n$ 行列に値をとる実変数 t の関数 $w(t)$ $(t \geq 0)$ あるいは複素変数 λ の関数 $F(\lambda)$ が与えられたときシステム (A, B, C) を、その重み関数あるいは伝達関数（定義 2.1 参照）が $w(t)$ あるいは $F(\lambda)$ と一致するように構

成する問題であり、そのようなシステムを $W(t)$ あるいは $F(\lambda)$ の実現という. この論文の主題は、与えられた $W(t)$ あるいは $F(\lambda)$ が実現を持つための条件を求めることである.

重み関数あるいは伝達関数の実現を求める場合、状態空間および作用素 A, B, C の選び方が問題となる. 状態空間 X として従来は有限次元空間あるいはヒルベルト空間が考えられてきた[1],[2]. しかし多くの場合、状態の物理量はバナッハ空間の元として表現される. そこで、ここでは状態空間としてバナッハ空間あるいはより一般的に局所凸空間を対象とする.

入力と状態空間との関係を記述する作用素 B、および状態空間と出力との関係を記述する作用素 C に対する条件に対応していくつかのシステムが考えられる. 制御機構、観測機構が分布しているような場合には $C: X \to \mathbb{C}^n$ は連続な作用素となる. このようなシステムを regular system と呼ぶ. 一方境界観測のような場合には C は一般には連続ではない. しかし、X がヒルベルト空間の場合には、C はノルム $\|\cdot\|_A$:

$$\|x\|_A^2 = \|x\|^2 + \|Ax\|^2, \qquad x \in \mathcal{D}(A) \tag{1.2}$$

に関して連続となることが多い. ここで $\mathcal{D}(A)$ は A の定義域 $\|\cdot\|$ は X におけるノルムを表わす. $C: \mathcal{D}(A) \to \mathbb{C}^n$ がノルム $\|\cdot\|_A$ で連続かつ $\operatorname{Im} B \subset \mathcal{D}(A)$ であるようなシステムを balanced system と呼ぶ．くわしい定義は定義 2.1 に述べる．

境界制御のような場合には B は必ずしも $\mathbb{C}^m$ から X の中への線形作用素ではない．しかし，X がヒルベルト空間の場合，$\mathcal{D}(A^*)'$ を A の双対作用素 A^* の定義域 $\mathcal{D}(A^*)$ 上の $\|\cdot\|_{A^*}$ に関して連続な線形作用素の全体とすると，B は $\mathbb{C}^m$ から $\mathcal{D}(A^*)'$ の中への線形作用素である場合が多い．そこで $B: \mathbb{C}^m \to \mathcal{D}(A^*)'$，かつ $C: \mathcal{D}(A) \to \mathbb{C}^n$ がノルム $\|\cdot\|_A$ で連続であるようなシステムを Helton のシステムと呼ぶ．くわしい定義は定義 3.1 に述べる．

ヒルベルト空間を状態空間とする regular system, balanced system の実現問題は Baras と Brockett によってはじめられ，与えられた $W(t)$ が上記のシステムを実現として持つための必要条件および十分条件が求められた [1], [2].

ヒルベルト空間を状態空間とする Helton のシステムの定式化は Helton によって与えられ，与えられた $F(\lambda)$ が Helton のシステムを実現として持つための十分条件が求められた [3].

この論文では 2章で regular system および balanced system を局所凸空間を状態空間とするシステムに拡張し，与えられた重み関数がこれらのシステムを実現として持つための必要および十分条件について述べる．3章では局所凸空間を状態空間とする Helton のシステムを定式化し，伝達関数が Helton のシステムを実現として持つための必要十分条件を述べる．

2. Regular System における実現問題

Xを列的完備な局所凸空間，$\{e^{tA}: t\geq 0\}$ をXの上の(C_0)-級の半群，Aをその生成作用素とする．$\{\|\cdot\|_\gamma ; \gamma\in\Gamma\}$ をXの定義セミノルム系とする．生成作用素の定義域$\mathcal{D}(A)$に新しい定義セミノルム系$\{\|\cdot\|_{A,\gamma} : \gamma\in\Gamma\}$を

$$\|x\|_{A,\gamma} = \|x\|_\gamma + \|Ax\|_\gamma , \quad x\in\mathcal{D}(A)$$

で定義し，このセミノルムを導入した$\mathcal{D}(A)$を$\mathcal{D}(A)_A$と書く．

X_1, X_2 を局所凸空間とし，X_1からX_2の中への連続な線形作用素の全体を$L(X_1, X_2)$と書く．

<u>定義 2.1</u>　システム(A, B, C)において，Bは$\mathbb{C}^m$から局所凸空間Xの中への線形作用素，$C\in L(X, \mathbb{C}^n)$となるとき，このシステムを<u>regular system</u>という．またBは$\mathbb{C}^m$から$\mathcal{D}(A)$の中への線形作用素，$C\in L(\mathcal{D}(A)_A, \mathbb{C}^n)$のとき<u>balanced system</u>という．

$m\times n$行列に値をとる実変数tの関数$W(t) = Ce^{tA}B$をシステムの<u>重み関数</u>という．また$m\times n$行列に値をとる複素変数λの関数$F(\lambda) = C(\lambda I-A)^{-1}B$をシステムの<u>伝達関数</u>という．ここで$(\lambda I-A)^{-1}$は$A$のレゾルベントである．

<u>注意</u>　システム(A, B, C)に対して伝達関数は必ずしも

存在しない.

定義 2.2　$w(t)$ $(t \geqq 0)$, $F(\lambda)$ (λは$\mathbb{C}$のある部分領域を動く)を$m \times n$ 行列に値をとる関数とする. $w(t)$あるいは$F(\lambda)$が regular (balanced) system (A, B, C) の重み関数あるいは伝達関数となっているとき, (A, B, C) を$w(t)$あるいは$F(\lambda)$の regular (balanced) realization という.

局所凸空間を状態空間とする regular realization を持つ重み関数の全体を$\mathbb{W}_X$, 伝達関数の全体を $\mathbb{F}_X$ と書く. バナッハ空間あるいはヒルベルト空間を状態空間とする場合には$\mathbb{W}_B$, $\mathbb{W}_H$ 等と書く. $\mathbb{W}_H \subset \mathbb{W}_B \subset \mathbb{W}_X$ ($\mathbb{F}_H \subset \mathbb{F}_B \subset \mathbb{F}_X$)となる. 次の定理は balanced realization を持つ重み関数の全体に対しても成りたつ.

定理 2.1　$\mathbb{W}_X$ (および $\mathbb{W}_B, \mathbb{W}_H, \mathbb{F}_X, \mathbb{F}_B, \mathbb{F}_H$)は線形空間である.

証明　$w(t) \in \mathbb{W}_X$ ならば, 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\alpha w(t) \in \mathbb{W}_X$ となることは明らかである.

$w_1(t)$, $w_2(t)$ の regular realization をそれぞれ (A_1, B_1, C_1) (A_2, B_2, C_2) とする. 新しい regular system (A, B, C) を

次のように定義する：

$X = X_1 \oplus X_2$,　　X_1 と X_2 との直積空間

$e^{tA} : (x_1, x_2) \mapsto (e^{tA_1}x_1, e^{tA_2}x_2)$,　　$(x_1, x_2) \in X$

$B : \mathbb{C}^m \to X$,　　$u \mapsto (B_1 u, B_2 u)$,　　$u \in \mathbb{C}^m$,

$C : X \to \mathbb{C}^n$,　　$(x_1, x_2) \mapsto C_1 x_1 + C_2 x_2$.

$\{e^{tA};\ t \geq 0\}$ は明らかに X の上の (C_0)－半群であり，B, C は連続な線形作用素である．また，

$$C_1 e^{tA_1} B_1 + C_2 e^{tA_2} B_2 = C e^{tA} B$$

となるから (A, B, C) は $w_1(t) + w_2(t)$ の regular realization である．他の場合も同様に証明することができる．

状態空間がバナッハ空間の場合，$w(t)$ が regular (balanced) realization を持てば任意の $\beta \in \mathbb{R}$ に対して $e^{\beta t} w(t)$ も regular (balanced) realization を持つ．それゆえに以下では $\{e^{tA};\ t \geq 0\}$ が同程度連続であるようなシステムをあつかう．

状態空間 X がヒルベルト空間の場合，$w(t)$ が regular realization を持つということと balanced realization を持つということとは同値である [1]．同様なことは X が局所凸空間の場合にも成立する．

__定理 2.2__　　$w(t)$ を $t \geq 0$ で定義された $m \times n$ 行列に値

をとる関数とする．$w(t)$ は regular realization を持つとき，そのときに限り balanced realization を持つ．しかも両者の実現において，状態空間 X と生成作用素 A は同じものにとることができる．

証明　十分性：(A_1, B_1, C_1) を $w(t)$ の balanced realization とする．このときある $\lambda_0>0$ をとると

$$w(t)=C_1 e^{tA}B_1 = C_1(\lambda_0 I-A)^{-1}(\lambda_0 I-A)e^{tA}B_1$$
$$= C_1(\lambda_0 I-A)^{-1}e^{tA}(\lambda_0 I-A)B_1$$

となる．ここで $C_1(\lambda_0 I-A)^{-1}$ は X から $\mathbb{C}^n$ への連続な作用素，$(\lambda_0 I-A)B_1$ は $\mathbb{C}^m$ から X への線形作用素であるから，$w(t)$ は regular realization $(A, (\lambda_0 I-A)B_1, C_1(\lambda_0 I-A)^{-1})$ を持つ．

必要性：(A, B, C) を $w(t)$ の regular realization とする．$\lambda_0>0$ とすると

$$w(t)=Ce^{tA}B = C(\lambda_0 I-A)e^{tA}(\lambda_0 I-A)^{-1}B$$

となる．$(A, (\lambda_0 I-A)^{-1}B, C(\lambda_0 I-A))$ は balanced realization の条件を満たす．

この定理から，以後与えられた関数が regular system の重み関数あるいは伝達関数となるための必要条件および十分条件について考える．なお $\mathbb{C}^n=\mathbb{C}^m=\mathbb{C}$ の場合を考えれば十

分である．従って B は状態空間 X の元 b とする．

<u>定理2.3</u>　$w(t)$ を $t \geqq 0$ で定義された複素数値関数とする．$w(t)$ が局所凸空間を状態空間とする regular realization を持つための必要十分条件は，$w(t)$ が $[0,\infty)$ で有界かつ一様連続であることである．

<u>証明</u>　$C[0,\infty)$ を $[0,\infty)$ で有界かつ一様連続な関数の全体とする．$C[0,\infty)$ はノルム $\|f\| = \sup_{t\in[0,\infty)} |f(t)|$ $(f \in C[0,\infty))$ を持つバナッハ空間である．$C[0,\infty)$ の上の半群 $\{e^{tA}; t\geqq 0\}$ を

$$(e^{tA}f)(s) = f(t+s), \qquad f \in C[0,\infty)$$

で定義し，$b = w(s)$，$C: f(s) \longmapsto f(0)$ とすると (A, B, C) は明らかに regular system であって $w(t) = Ce^{tA}b$ となる．

逆に $w(t)$ が regular realization (A, b, C) を持てば，あるセミノルム $\|\cdot\|_\gamma$ と定数 $\beta > 0$ が存在して

$$|w(t+h) - w(t)| = |C(e^{(t+h)A} - e^{tA})b|$$
$$\leqq \beta \|(e^{hA} - I)b\|_\gamma$$

となるから $w(t)$ は一様連続である．$\{e^{tA}: t \geqq 0\}$ は同程度連続であるから $w(t)$ は有界である．

系　$w(t)$ が局所凸空間を状態空間とする regular realization を持てば，バナッハ空間を状態空間とする regular realization を持つ．

この系は，システムの状態空間をバナッハ空間から局所凸空間に広げても，regular system で実現できる重み関数の集合は広がらないことを示している．

次に重み関数がヒルベルト空間を状態空間とする regular realization を持つための条件を求める．

定義 2.3　regular system (A, B, C) において，A の生成する半群 $\{e^{tA}; t \geqq 0\}$ が $t \to \infty$ のとき

$$e^{tA}x \to 0, \qquad x \in X$$

となるとき，(A, b, C) は asymptotically stable であるという．

次の結果は後の定理の証明に重要である．

定理 2.4 [4]　$\{e^{tA}; t \geqq 0\}$ をヒルベルト空間 X の上の縮小半群であって，任意の $x \in X$ に対して $e^{tA}x \to 0 \ (t \to \infty)$ が成り立つとする．このとき X から $L^2(0, \infty; N)$ （N はあるヒ

ルベルト空間）の閉部分空間 K への等長作用素 R で

$$R e^{tA} = P_K e^{tF} R$$

を満たすものが存在する．ここで $\{e^{tF};\ t\geqq 0\}$ は

$$(e^{tF} f)(s) = f(t+s), \quad f \in L^2(-\infty, \infty; N)$$

で定義される $L^2(-\infty, \infty; N)$ の上の半群，P_K は $L^2(-\infty, \infty; N)$ から K への射影作用素である．

定理2.5　$w(t)$ を $t \geqq 0$ で定義された複素数値関数とする．$w(t)$ が，ヒルベルト空間を状態空間とする asymptotically stable な regular realization を持つならば，$w(t)$ はある可積分な関数 $\hat{f}(\omega)$ によって $t \geqq 0$ で

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega)\, d\omega, \tag{2.1}$$

と書ける．逆に $w(t)$ がある可積分な関数 $\hat{f}(\omega)$ によって上式のように書けるならばヒルベルト空間を状態空間とする regular realization を持つ．

証明　$w(t)$ が asymptotically stable な regular realization (A, b, C) を持つとする．定理2.4によって

$$\begin{aligned} w(t) = C e^{tA} b &= C R^{-1} P_K e^{tF} R b \\ &= C R^{-1} \mathcal{F}^{-1} P_{H^2(N)} e^{i\omega t} (\mathcal{F} R b)(\omega) \end{aligned}$$

となる．ここで $\mathcal{F}$ はフーリエ変換を表わし，$H^2(N) = \mathcal{F}(L^2(0, \infty; N))$

である. $CR^{-1}\mathfrak{F}^{-1}P_{H^2(N)}$ は $H^2(N)$ の上の有界作用素であるから ある $\hat{g}\in H^2(N)$ が存在して

$$w(t) = \left(e^{i\omega t}(\mathfrak{F}Rb)(\omega),\ \hat{g}(\omega) \right)_{L^2(N)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left((\mathfrak{F}Rb)(\omega),\ \hat{g}(\omega) \right)_N d\omega$$

となる. $\left((\mathfrak{F}Rb)(\omega),\ \hat{g}(\omega)\right) \in L^1(-\infty,\infty)$ であり, 従って定理の前半が証明された.

逆にある可積分な関数 $\hat{f}(\omega)$ によって $w(t)$ が (2.1) のように表わされたとする. $\hat{f}(\omega)=\hat{g}_1(\omega)\overline{\hat{g}_2(\omega)}$, $\hat{g}_1, \hat{g}_2 \in L^2$ と書けるから, 次の regular regular realization を持つ.

状態空間 $X = L^2(-\infty,\infty)$, $A = i\omega$, $b = \hat{g}_1(\omega)$

$$C:\ \hat{f}(\omega) \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}_2(\omega)}\, d\omega .$$

従って定理が証明された.

系　$F(\lambda)$ を右半平面で定義された関数とする. $F(\lambda)$ が, ヒルベルト空間を状態空間とする asymptotically stable な regular realization を持つならば $F(\lambda)$ はある可積分な関数のコーシー積分で書ける. すなわち

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{f}(\omega)}{\lambda - i\omega}\, d\omega, \quad \hat{f}(\omega)\in L^1(-\infty,\infty), \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0 \quad (2.2)$$

//

逆に(2.2)で表わされる関数はある regular system の伝達関数である.

3. Helton のシステムにおける実現問題

前章の定理2.3から, regular system の重み関数は連続関数に限られるため, ディラックのδ−関数等の超関数はこのシステムの重み関数とはならない. このため境界制御等を考える場合には regular system ではせますぎる[3].
Heltonは, 状態空間がHilbert空間の場合に, 超関数をも重み関数としてとるようなシステムの定式化を行った. この章ではHeltonの行った定式化を局所凸空間を状態空間とする場合に拡張し, 与えられた複素数値関数$F(\lambda)$がこのシステムの伝達関数となるための必要十分条件を求める.

Xを列的完備な局所凸空間, X'をその双対空間とする. X'に$*$弱位相を入れたものをX'_{w*}で表わし, 強位相を入れたものをX'_sで表わす. X'_sもまた列的完備であるとする.

Xの上の(C_0)級の同等連続な半群$\{e^{tA}; t\geq 0\}$の生成作用素Aの双対作用素をA^*と書き, その定義域を$\mathcal{D}(A^*)$と書く. $\mathcal{D}(A^*)$にセミノルム系$\{\|\cdot\|_{A^*,M}; M\in\Sigma\}$ (ΣはXの有界集合の全体)を

$$\|f\|_{A^*,M}=\|f\|_M+\|A^*f\|_M,\quad f\in\mathcal{D}(A^*)$$

で定義する．ここで $\|f\|_M = \sup_{x \in M} |\langle f, x \rangle|$，$\langle f, x \rangle = f(x)$．この位相を持った $\mathcal{D}(A^*)$ を $\mathcal{D}(A^*)_s$ と書く．$\mathcal{D}(A^*)_s$ は列的完備である．$\mathcal{D}(A^*)_s$ の双対空間を $(\mathcal{D}(A^*)_s)'$ と書く．$\mathcal{D}(A) \subset X = (X'_{w^*})' \subset (X'_s)' \subset (\mathcal{D}(A^*)_s)'$ が（集合として）成りたつ．

$(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ を A^* のレゾルベントとする．任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{D}(A^*)$ の上の線形作用素 $\hat{A}x$ を

$$\langle \hat{A}x, f \rangle = \langle x, A^*f \rangle, \qquad f \in \mathcal{D}(A^*)$$

で定義する．また任意の $\ell \in (\mathcal{D}(A^*)_s)'$ に対して X' の上の線形作用素 $\widehat{(\lambda I - A)^{-1}}\ell$ を

$$\langle \widehat{(\lambda I - A)^{-1}}\ell, f \rangle = \langle \ell, (\lambda I^* - A^*)^{-1} f \rangle, \qquad f \in X'$$

で定義する．次の補題が成立する．

<u>補題3.1</u>　(1)　$\mathrm{Im}\,\hat{A} \subset (\mathcal{D}(A^*)_s)'$ かつ $\mathcal{D}(A)$ の上で $\hat{A} = A$．

(2)　$\mathrm{Im}\,\widehat{(\lambda I - A)^{-1}} \subset (X'_s)'$ かつ X の上で $\widehat{(\lambda I - A)^{-1}} = (\lambda I - A)^{-1}$

(3)　$\widehat{(\lambda I - A)^{-1}}(\lambda I - \hat{A}) = I_X$

$$(\lambda I - \hat{A})\widehat{(\lambda I - A)^{-1}} = I_{\mathfrak{M}}, \qquad \mathfrak{M} = (\lambda I - \hat{A})X$$

(4)　$\widehat{(\lambda I - A)^{-1}}$ に対してレゾルベント方程式

$$\widehat{(\lambda I - A)^{-1}} - \widehat{(\lambda' I - A)^{-1}} = (\lambda' - \lambda)\widehat{(\lambda I - A)^{-1}}\widehat{(\lambda' I - A)^{-1}}$$

が成りたつ．

<u>証明</u>　(1)　M を x を含むような X の有界集合とする．任

意の $f \in \mathcal{D}(A^*)$ に対して

$$|\langle \hat{A}x, f \rangle| = |\langle x, A^* f \rangle| = |\langle A^* f, x \rangle| \leqq \|A^* f\|_M$$
$$\leqq \|f\|_{A^*, M}$$

となるから $\hat{A}x \in (\mathcal{D}(A^*)_s)'$ となる．また $x \in \mathcal{D}(A)$ ならば、任意の $f \in X'$ に対して

$$\langle \hat{A}x, f \rangle = \langle x, A^* f \rangle = f(Ax) = \langle Ax, f \rangle$$

となるから $\hat{A}x = Ax$ を得る．

(2)　任意の $\ell \in (\mathcal{D}(A^*)_s)'$ と $f \in X'$ に対してある X の有界集合 M と $\beta > 0$ が存在して

$$|\langle \widehat{(\lambda I - A)^{-1}}\ell, f \rangle| = |\langle \ell, (\lambda I^* - A^*)^{-1} f \rangle| \leqq \beta \|(\lambda I^* - A^*)^{-1} f\|_{A^*, M}$$
$$= \beta \{ \|(\lambda I^* - A^*)^{-1} f\|_M + \|A^*(\lambda I^* - A^*)^{-1} f\|_M \}$$

となる．$(\lambda I^* - A^*)^{-1}$, $A^*(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ は X'_s の上の連続な線形作用素であるから $\widehat{(\lambda I - A)^{-1}}\ell \in (X'_s)'$ となる．とくに $\ell \in X$ ならば、任意の $f \in X'$ に対して，

$$\langle \widehat{(\lambda I - A)^{-1}}\ell, f \rangle = \langle \ell, (\lambda I^* - A^*)^{-1} f \rangle = \langle (\lambda I - A)^{-1}\ell, f \rangle$$

であるから $\widehat{(\lambda I - A)^{-1}}\ell = (\lambda I - A)^{-1}\ell$ となる．

(3)　$x \in X$ とする．任意の $f \in X'$ に対して

$$\langle \widehat{(\lambda I - A)^{-1}}(\lambda I - \hat{A})x, f \rangle = \langle (\lambda I - \hat{A})x, (\lambda I^* - A^*)^{-1} f \rangle$$
$$= \langle x, (\lambda I^* - A^*)(\lambda I^* - A^*)^{-1} f \rangle = \langle x, f \rangle$$

となることから $\widehat{(\lambda I - A)^{-1}}(\lambda I - \hat{A}) = I_X$ を得る．

$(\lambda I - \hat{A})\widehat{(\lambda I - A)^{-1}} = I_{\mathfrak{M}}$ も同様に証明できる．

(4) $$((\lambda I - A)^{-1} - (\lambda' I - A)^{-1})^*$$
$$= (\lambda' - \lambda)((\lambda' I - A)^{-1})^*((\lambda I - A)^{-1})^*$$

が成り立つから，任意の $l \in (\mathcal{D}(A^*)_s)'$ に対して

$$\langle (\widetilde{(\lambda I - A)^{-1}} - \widetilde{(\lambda' I - A)^{-1}}) l, f \rangle$$
$$= \langle l, (\lambda' - \lambda)((\lambda' I - A)^{-1})^*((\lambda I - A)^{-1})^* f \rangle$$
$$= \langle (\lambda' - \lambda)\widetilde{(\lambda I - A)^{-1}}\,\widetilde{(\lambda' I - A)^{-1}} l, f \rangle, \qquad f \in \mathcal{D}(A^*)$$

となりレゾルベント方程式を得る．

<u>定義3.1</u>　Xを列的完備な局所凸空間，$\{e^{tA}; t \geq 0\}$ をXの上の同程度連続な半群とする．システムの組(A, B, C)において，$B : \mathbb{C}^m \to (\mathcal{D}(A^*)_s)'$，$\mathrm{Im}\,\widetilde{(\lambda I - A)^{-1}} B \subset X$ および C $(C : X \to \mathbb{C}^n)$ が $\mathcal{D}(A)_A$ の上で連続であるとき <u>Heltonのシステム</u>という．$F(\lambda) = C\widetilde{(\lambda I - A)^{-1}} B$ をHeltonのシステム(A, B, C)の伝達関数という．

複素数λの複素数値関数$F(\lambda)$があるHeltonのシステム(A, B, C)の伝達関数であるとき(A, B, C)を$F(\lambda)$の実現という．

<u>注意</u>　Xが準回帰的の場合には $(X'_{w^*})' = X = (X'_s)'$ となる．したがってXがヒルベルト空間の場合には，ここで定義したHeltonのシステムはHeltonの定義と一致する．

Heltonのシステムを実現として持つ伝達関数の全体を$\widehat{\mathbb{F}}_X$で表わす．とくにバナッハ空間あるいはヒルベルト空間を状態空間とする$F \in \widehat{\mathbb{F}}_X$の全体を$\widehat{\mathbb{F}}_B$，あるいは$\widehat{\mathbb{F}}_H$と書く．定理2.1と同様の証明法により$\widehat{\mathbb{F}}_X$，$\widehat{\mathbb{F}}_B$，$\widehat{\mathbb{F}}_H$は線形空間であり，$\widehat{\mathbb{F}}_H \subset \widehat{\mathbb{F}}_B \subset \widehat{\mathbb{F}}_X$となる．以下に伝達関数が$\widehat{\mathbb{F}}_X$，（あるいは$\widehat{\mathbb{F}}_B$，$\widehat{\mathbb{F}}_H$）に属するための必要十分条件を述べる．なお2章の場合と同様に$\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n = \mathbb{C}$とし，従って$B: \mathbb{C}^n \to (\mathcal{D}(A^*)_s)'$は$(\mathcal{D}(A^*)_s)'$の元bとする．

$\mathcal{D}_{L^2}^k$（kは整数）をソボレフ空間とする．$u(t)$ $(\in \mathcal{D}_{L^2}^k)$のフーリエ変換を$\hat{u}(\omega)$と書く．$\mathcal{D}_{L^2}^k$は内積：

$$(u_1, u_2)_k = \left((1+|\omega|)^k \hat{u}_1(\omega),\ (1+|\omega|)^k \hat{u}_2(\omega)\right)_{L^2}, \qquad (3.1)$$

を持つヒルベルト空間である．$\mathcal{D}_{L^2}^k$のフーリエ変換を$\widehat{\mathcal{D}}_{L^2}^k$と書く．$\widehat{\mathcal{D}}_{L^2}^k$も内積(3.1)を持つヒルベルト空間であって

$$\widehat{\mathcal{D}}_{L^2}^1 \subset \widehat{\mathcal{D}}_{L^2}^0 = \widehat{L}_2 \subset \widehat{\mathcal{D}}_{L^2}^{-1} = (\widehat{\mathcal{D}}_{L^2}^1)'$$

となる．

<u>補題 3.2</u>　ディラックのδ－関数のラプラス変換は，Hilbert空間を状態空間とするHeltonのシステムで実現可能である．

<u>証明</u>　$1 = C\widetilde{(\lambda I - A)^{-1}} b$となるようなHeltonのシステム

(A, b, C) が存在することを示す．$\hat{\mathcal{D}}_{L^2}$ の上の半群 $\{e^{tA}: t\geq 0\}$ を

$$(e^{tA}\hat{u})(\omega) = e^{i\omega t}\hat{u}(\omega), \qquad \hat{u} \in \hat{\mathcal{D}}_{L^2}$$

で定義する．この半群の生成作用素 A は，$A = i\omega$ であり，$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}_{L^2}^{1}$，$(\mathcal{D}(A^*)_S)' = \mathcal{D}_{L^2}^{-1}$，かつ $\|\cdot\|_{\mathcal{D}(A)_A}$ と $\|\cdot\|_1$ とは同等なノルムである．次のような実現を考える．

状態空間 $X = \mathcal{D}_{L^2}^{0}$，$A = i\omega$，$b = 1$

$C : \hat{\mathcal{D}}_{L^2}^{-1} \to \mathbb{C}$

$$C(\hat{u}) = \lim_{t\uparrow 0}\left(1+\frac{d}{dt}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{u}(\omega)}{1+i\omega}e^{i\omega t}d\omega$$

明らかに $1 \in \hat{\mathcal{D}}_{L^2}^{-1}$，また $\hat{u} \in \hat{\mathcal{D}}_{L^2}^{1}$ ならば

$$|C(\hat{u})| = \left|\lim_{t\uparrow 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right| \leqq \frac{1}{2}\|\hat{u}\|_1$$

であるから (A, b, C) は Helton のシステムの条件を満たしている．また $\left(\widehat{(\lambda I-A)^{-1}}\hat{u}\right)(\omega) = \hat{u}(\omega)/(\lambda - i\omega)$ であるから

$$C\widehat{(\lambda I-A)^{-1}}b = C\left(\frac{1}{\lambda - i\omega}\right)$$

$$= \lim_{t\uparrow 0}\left(1+\frac{d}{dt}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\lambda-i\omega)(1+i\omega)}d\omega = 1$$

となり $1 = C\widehat{(\lambda I-A)^{-1}}b$ を得る．

複素平面上の半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda \geqq \varepsilon > 0$ で定義された解析関数

$F(\lambda)$ が

$$\sup_{\omega} |F(\sigma+i\omega)| \to 0, \quad \sigma\to\infty$$

となるとき，<u>$F(\lambda)\to 0$ in the positive direction</u> という．(A, b, c) を regular system とする．このとき

$$F(\lambda) = c(\lambda I - A)^{-1}b - \frac{cb}{\lambda+\lambda_0}, \qquad \lambda_0 > 0$$

は $\lambda F(\lambda)\to 0$ in the positive direction である．

伝達関数 $F(\lambda)$ が Helton のシステムの実現であるための必要十分条件を示す．

<u>定理3.1</u>　$F(\lambda)$を右半平面上の関数とする．$F(\lambda)$が局所凸空間を状態空間とする Helton のシステムの伝達関数であるための必要十分条件は $F(\lambda)$ が次のように書けることである．

$$F(\lambda) = \lambda^2 F_0(\lambda) + \lambda F_1(\lambda) + F_2(\lambda) \tag{3.2}$$

ここで $F_1(\lambda), F_2(\lambda)$ はある regular system の伝達関数，$F_0(\lambda)$は $\sigma\to\infty$ $(\lambda=\sigma+i\omega)$ のとき $\lambda F_0(\lambda)\to 0$ in the positive direction であるような regular system の伝達関数である．

<u>証明</u>　$F(\lambda)\in \widehat{\mathbb{F}_X}$ とする．(A, b, C)を$F(\lambda)$の実現とする．$\widehat{(\lambda I-A)^{-1}b} \in X$ であるから補題3.1 (3) により

$$F(\lambda) = \lambda^2 F_0(\lambda) + \lambda F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$$

$$F_1(\lambda) = \frac{Cb_0}{\lambda+\lambda_0} - 2\lambda_0\hat{C}(\lambda I-A)^{-1}b_0, \quad F_2(\lambda) = \frac{\lambda_0 Cb_0 + \lambda_0^2\hat{C}b_0}{\lambda+\lambda_0} + \lambda_0^2\hat{C}(\lambda I-A)^{-1}b_0$$

$$F_0(\lambda) = \tilde{C}\left\{(\lambda - A)^{-1}b_0 - \frac{b_0}{\lambda_0 + \lambda}\right\},\quad \lambda_0 > 0,\quad b_0 = \widehat{(\lambda_0 - A)^{-1}b} \in X$$

となる．ここで $\hat{C} = C(\lambda_0 I - A)^{-1} \in L(X, \mathbb{C}^n)$ である．$F_0(\lambda)$ は $\lambda F_0(\lambda) \to 0$ in the positive direction である．$F_1(\lambda), F_2(\lambda)$ の右辺の才2項は regular system の伝達関数であり，才1項は定理2.5系により regular system の伝達関数である．

逆に $F_0(\lambda)$ を $\lambda F_0(\lambda) \to 0$ in the positive direction であるような $\mathbb{E}_X$ の元とする．定理2.2により $F_0(\lambda)$ は balanced realization (A_1, b_1, C_1) を持つ．従って

$$\lambda F_0(\lambda) = \lambda C_1(\lambda I - A_1)^{-1}b_1 = C_1(\lambda I - A_1)^{-1}A_1 b_1 + C_1 b_1$$

となるが仮定から $C_1 b_1 = 0$ となる．さらに補題3.1 (4) より

$$\begin{aligned}(\lambda_0 - \lambda)\lambda F_0(\lambda) &= (\lambda_0 - \lambda)\, C_1(\lambda - A)^{-1}A_1 b_1 \\ &= \hat{C}_1(\lambda I - A_1)^{-1}(\lambda_0 I - \hat{A}_1)A_1 b_1 - \hat{C}_1 A_1 b_1\end{aligned}$$

となる．C_1 の定義域は X の上の拡張できることに注意する．補題3.2により上式の右辺は $\widehat{\mathbb{E}_X}$ に属する．

<u>系</u>　$F(\lambda) \in \widehat{\mathbb{F}_B}$ （あるいは $\in \widehat{\mathbb{F}_H}$）となるための必要十分条件は (3.2) において $F_0(\lambda), F_1(\lambda), F_2(\lambda) \in \mathbb{F}_B$ （あるいは $\in \mathbb{F}_H$）となることである．

<u>例</u>　ディラックの δ-関数 $\delta(t)$ のラプラス変換は補題2.2から Helton のシステムの伝達関数であるが，その微分 $\dot{\delta}(t)$

のラプラス変換はそうではない

実際，もしHeltonのシステムの伝達関数であれば

$$\lambda = \lambda^2 F_0(\lambda) + \lambda F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$$

となる．$\lambda F_0(\lambda) \to 0$ in the positive direction であるから $\mathrm{Re}\,\lambda \to \infty$ とすると

$$1 = \lambda F_0(\lambda) + F_1(\lambda) + \frac{1}{\lambda} F_2(\lambda) \longrightarrow 0$$

となり不合理である．

1. J. S. Baras and R. W. Brockett, H^2-functions and infinite-dimensional realization theory, SIAM J. Control 13 (1975), 211-241.
2. J. B. Baras and P. Dewilde, Invariant subspace methods in linear multi variable-distributed systems and lumped-distributed network synthesis, Proc. IEEE, 64 (1976), 160-178.
3. J. W. Helton, Systems with infinite-dimensional state-space: the Hilbert space approach, Proc. IEEE, 64 (1976), 145-160.
4. P. D. Lax and R. S. Phillips, Scattering Theory, New York, Academic Press, 1967.