数理解析研究所講究録
366巻 1979年 150-155

$H^p(\mathbb{R}^n)$についての一注意

茨城大学理学部 薮田公三

$\mathbb{C}_+=\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z>0\}$とするとき，$f\in H^p(\mathbb{C}_+)$とは$f$が$\mathbb{C}_+$で正則で$\|f\|_{H^p}^p=\sup_{t>0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+it)|^p dx<+\infty$ということである。同様に$\mathbb{C}_-$, $H^p(\mathbb{C}_-)$を定義する。$f\in H^p(\mathbb{C}_+)$のとき$\lim_{t\to 0} f(x+it)$はa.e.存在して$L^p(\mathbb{R})$に属する($p\geq 1$)。そこで$H^p(\mathbb{R})=\{f=u+iv;\ u, v$はそれぞれ$H^p(\mathbb{C}_+)$函数の実数部分$\}$とおくと

(1) $H^p(\mathbb{R})\cong\{f(x+iy)=f_1(x+iy)+f_2(x-iy);\ f_1\in H^p(\mathbb{C}_+), f_2\in H^p(\mathbb{C}_-)\}$

($\cong$は左辺にノルム$\|\ \|_{H^p}$，右辺に$\|f_1\|_{H^p(\mathbb{C}_+)}+\|f_2\|_{H^p(\mathbb{C}_-)}$を入れたとき，ノルム同型になるという意味である。)

この小論では，近年活発に解析されたStein-Weiss流の$H^p(\mathbb{R}^n)$ ($H^p(\mathbb{R})$の高次元への一般化)が(1)のように$\mathbb{C}^n$のあるtube domain上の函数空間として特徴付けられることを見ると同時に，そのtube domainのPoisson核による$L^p(\mathbb{R}^n)$函数，あるいは$\mathbb{R}^n$上の有界測度の像の特徴付けを与える。

1. $H^p(\mathbb{R}^n)$の定義

以下，簡単のため $1 \leqq p < \infty$ とする。$f \in H^p(\mathbb{R}^n)$とは，次のような $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) ; x_0 \in (0, \infty), (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ 上の $n+1$個の函数 $u_j(x_0, x)$ が存在することである。

$$(2) \quad \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (j, k = 1, \cdots, n)$$

$$(3) \quad \| f \|_{H^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x_0 > 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{n} |u_j(x_0, x)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{1/p} < \infty \quad \text{かつ}$$

$$f(x) = \lim_{x_0 \to 0} u_0(x_0, x) \quad \text{a.e.}$$

$H^p(\mathbb{R}^n)$は(3)の左辺をノルムとするBanach空間になる。よく知られているように，

$1 < p < \infty$ のとき $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ （ノルム同値）であり

$R_j f = \left(\frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi) \right)^{\vee}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ （$\wedge$, $\vee$ はFourier変換及び逆変換）とすると

$H^1(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) ; R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n), j = 1, \cdots, n \}$ で

右辺に $\|f\| = \|f\|_1 + \Sigma \|R_j f\|_1$ でノルムを入れると，$H^1(\mathbb{R}^n)$とノルム同値になる。

2. Tube domain 上のH^p.

$\Gamma (\subset \mathbb{R}^n)$ が open cone であるとは (i) $\Gamma \ni 0$ (ii) $\alpha, \beta > 0$, $x, y \in \Gamma$ なら $\alpha x + \beta y \in \Gamma$ となること。

$\Gamma^* = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ x\cdot t = \sum_{j=1}^{n} x_j t_j \geqq 0,\ t \in \Gamma\}$ とおく。Γ の dual cone と呼ばれる。Γ^* がある open cone の closure になるとき、Γ は regular open cone と呼ばれる。以下、常に Γ は regular open cone を表わし、Γ^* はその dual cone を表わすものとする。

Γ 上の tube domain $\{x+iy = (x_1+iy_1, \cdots, x_n+iy_n) \in \mathbb{C}^n ;\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \Gamma\}$ を T_Γ で表わす。

$$h^p(T_\Gamma) = \{f : \text{harmonic in } T_\Gamma,\ \|f\|_{h^p(T_\Gamma)} = \sup_{y\in\Gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty\}$$

$$H^p(T_\Gamma) = \{f \in h^p(T_\Gamma) ;\ f \text{ holomorphic in } T_\Gamma\}$$

と定義すると、共に Banach 空間になる。

また、

$$K_\Gamma(z) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z\cdot t} dt \quad \text{は Cauchy kernel}$$

$$\mathcal{P}_\Gamma(x,y) = \frac{|K(x+iy)|^2}{K(2iy)} \quad \text{は Poisson kernel}$$

と呼ばれ、

(i) $\mathcal{P}_\Gamma(x,y) \geqq 0$,

(ii) $\int \mathcal{P}_\Gamma(x,y)\,dx = 1 \qquad y \in \Gamma$,

(iii) $\delta > 0$ なら $\int_{|x|>\delta} \mathcal{P}_\Gamma(x,y)\,dx \longrightarrow 0$ as $y \in \Gamma \to 0$,

(iv) $y \in \Gamma$ fix すると、$\mathcal{P}_\Gamma(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ で $\lim_{x\to\infty} \mathcal{P}_\Gamma(x,y) = 0$.

をみたし，$\mathcal{P}_\Gamma(x,y)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ での approximate identity である。さらに，$f \in H^p(T_\Gamma)$ なら $\lim_{y \in \Gamma \to 0} f(x+iy) = f(x)$ (in $L^p(\mathbb{R}^n)$) が存在し，

(4) $f(x+iy) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}_\Gamma(x-t, y) f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} K_\Gamma(x-t+iy) f(t)\, dt$

となる。(より精しくは，Stein-Weiss [3] を参照).

さて，$A \in SO(n)$ (: 行列式が 1 の実 n 次正方行列) とし，$A\Gamma = \{Ax : x \in \Gamma\}$ 等とすると，容易に計算できるように，

(5) $(A\Gamma)^* = A\Gamma^*$

(6) $\mathcal{P}_{A\Gamma}(x, Ay) = \mathcal{P}_\Gamma(x, y) \qquad y \in \Gamma$

を得る。最後に $f \in A^{-1}H^p(T_{A\Gamma})$ とは，ある $g \in H^p(T_{A\Gamma})$ に対して $f(x, y) = g(x+iAy)$ となることをいう。

3. 結果

定理．Γ : regular open cone とする。$A_k \in SO(n)$ で $\bigcup_{k=1}^{j} \mathrm{interior}(A_k\Gamma^*) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とする。すると

$$\left\{ f(x,y) = \int \mathcal{P}_\Gamma(x-t, y) f(t)\, dt \;;\; f \in H^p(\mathbb{R}^n) \right\}$$

$$= \left\{ f = f_{A_1} + \cdots + f_{A_j} \;;\; f_{A_k} \in A_k^{-1} H^p(T_{A_k\Gamma}),\ k=1,\cdots,j \right\}$$

で，左辺に複素関数 f の $H^p(\mathbb{R}^n)$ ノルム，右辺に $p>1$ のときは $\|f\|_{h^p(T_\Gamma)}$ ノルム，$p=1$ のとき $\|f\| = \inf\{\sum\|f_{A_k}\|_{h^1(T_\Gamma)}$; $f=\sum f_{A_k}$ の表現 $\}$ とすると，左右は共に $H^p(\mathbb{R}^n)$ にノルム同型になる。

注．までの注意 $H^p(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ を用いれば，L^p 関数の Poisson 積分の特徴付けが得られたことになる。

同じく，

系 (i) $\{f(x,y)=\int \mathcal{P}_\Gamma(x-t,y)\,d\mu(t)\,;\ \mu\in M(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{R}^n$ 上の有界測度 $\}$

$=\{f=f_{A_1}+\cdots+f_{A_j}\,;\ f_k\in A_k^{-1}H^1(T_{A_k\Gamma})\}$ の $h^1(T_\Gamma)$ 閉包

(ii) $\{f(x,y)=\int \mathcal{P}_\Gamma(x-t,y)f(t)\,dt\,;\ f\in L^1(\mathbb{R}^n)\}$

$=\{f(x,y)=\lim_{l\to\infty} g_l(x,y)$ (in $h^1(T_\Gamma)$); $g_l\in\sum_{k=1}^{j} f^l_{A_k}$ ($f^l_{A_k}\in A_k^{-1}H^1(T_{A_k\Gamma})$) かつ $\{\lim_{y\to 0} g_l(x,y)\}$ は $L^1(\mathbb{R}^n)$ の uniformly integrable family をなす $\}$

定理の証明は，Carleson の結果[1]のほんの少しのひねと§2で述べた Poisson kernel の性質の組み合せに過ぎないが，少しふれると，まず，[1]あるいは[2]と同じようにして，次のような有界作用素が存在する．

$T_k : H^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^p(T_{A_k\Gamma})$ $(k=1,2,\cdots,j)$

(7) $$f(x)=\lim_{y\to 0}\sum_{k=1}^{j} T_k f(x+iy) \quad (\text{limit in } L^1) \quad \text{かつ}$$

$$\|f\|_{H^p} \approx \sum_{k=1}^{j} \|T_k f\|_{H^p(T_{A_k\Gamma})}.$$

又，$f(x,y)\in A_k^{-1}H^p(T_{A_k\Gamma})$ ならある $g\in H^p(T_{A_k\Gamma})$ に対して $f(x,y)=g(x+iAy)$ であり，$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} g(x+iAy)\in H^p(\mathbb{R}^n)$ となるので，

(8) $$\int P_\Gamma(x-t,y)f(t)\,dt \underset{(6)}{=} \int P_{A\Gamma}(x-t,Ay)g(t)\,dt$$

$$\underset{(4)}{=} g(x+iAy) = f(x,y).$$

これら(7),(8)より定理でいう2つの集合は同じものであることがわかる。又，ノルム同値も§1(§2)での注意と組み合せれば明らかであろう。

系は定理と$P(x,y)$の性質(i)→(iv)より，普通の議論でできる。

4．$0<p<1$のときも同様な$H^p(\mathbb{R}^n)$の特徴付けができるが，ここでは触れないことにする。

参考文献

1. L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO , Advances in Math. 22(1976), 269-277.
2. R.R.Coifman and G.Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull.Amer.Math.Soc. 83(1977), 569-645.
3. E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1971.