数理解析研究所講究録
366巻 1979年 130-136

調和次元について

大同工大　瀬川重男

1. Ω を Heins の意味の end ([2]), 即ち Ω は O_G に属する Riemann 面の相対非compact な部分領域でその相対境界 $\partial\Omega$ は有限個の解析閉曲線から成り, さらに Ω の理想境界成分は唯1つである, とする. P_Ω を Ω 上の非負値調和函数で $\partial\Omega$ 上境界値0を持つもの全体とする. P_Ω の正規化された minimal 函数の集合の濃度を Ω の調和次元 (harmonic dimension) と呼び ([2]) $\dim P_\Omega$ と表わす. 与えられた濃度 $c\ (\leq \aleph)$ に対して $\dim P_\Omega = c$ となる Ω が実際に存在するかどうかが問題になるが, $\dim P_\Omega = n\ (^\forall n \in \mathbb{N})$ となる Ω の存在, $\dim P_\Omega = \aleph_0$ となる Ω の存在, $\dim P_\Omega = \aleph$ となる Ω の存在は, それぞれ, Heins ([2]), Kuramochi ([3]), Constantinescu-Cornea ([1]) によって証明されている. 一方 [2] において Heins はまた, $\dim P_\Omega$ と Ω 上の有界調和函数の性質との関係について次のことを証明している:

<u>定理A</u>. $\dim P_\Omega = 1$ となるための必要十分条件は，$\bar{\Omega}$上の任意の有界調和函数が理想境界で極限を持つことである．

$\bar{\Omega}$上の有界調和函数全体を B_Ω とし，B_Ω の元で理想境界で極限値 0 を持つものの全体を B_0 とする．B_0は B_Ω の線型部分空間であるから商空間 B_Ω/B_0 が考えられ，それを $\mathfrak{B}_\Omega$ と表わし，$\mathfrak{B}_\Omega$ の線型空間としての次元を $\dim \mathfrak{B}_\Omega$ と表わす．$\dim \mathfrak{B}_\Omega$ を使えば定理Aは「$\dim P_\Omega = 1$ となるための必要十分条件は $\dim \mathfrak{B}_\Omega = 1$ となることである．」と言い換えることができる．この様な観点から定理Aは次の様に一般化される：

<u>定理1</u>. $\dim P_\Omega$ または $\dim \mathfrak{B}_\Omega$ が有限ならば，$\dim P_\Omega = \dim \mathfrak{B}_\Omega$ である．

3で定理1の応用について述べる．

2. 定理1の証明に入る前に補題を1つ用意する．$u \in B_\Omega$, $h \in P_\Omega$ に対して $\langle u, h \rangle = -\int_{\partial\Omega} u * dh = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial h}{\partial n} ds$ と定義する．ここで $\partial/\partial n$ は内法線方向微分である．また $Q_\Omega = \{ h \in P_\Omega ;\ -\int_{\partial\Omega} * dh = 1 \}$ とする．このとき次のことがいえる：

<u>補題</u>. u $(\in B_\Omega)$ の理想境界における集積値集合は $\langle u, Q_\Omega \rangle = \{ \langle u, h \rangle ;\ h \in Q_\Omega \}$ である．

証明は [2] (p. 313) を参照されたい．

<u>定理1の証明</u>. $E_\Omega = P_\Omega - P_\Omega = \{ h_1 - h_2 ;\ h_1, h_2 \in P_\Omega \}$ と

おけば $\mathcal{E}_\Omega$ は線型空間で，その線型空間としての次元を $\dim \mathcal{E}_\Omega$ と表わす．先づ，$\mathcal{E}_\Omega$ または $\mathcal{P}_\Omega$ が有限次元であるならば $\dim \mathcal{E}_\Omega = \dim \mathcal{P}_\Omega$ であることを注意しておく．$u \in B_\Omega$，$h \in \mathcal{E}_\Omega$ ($h = h_1 - h_2$; $h_1, h_2 \in \mathcal{P}_\Omega$) に対して $\langle u, h \rangle = \langle u, h_1 \rangle - \langle u, h_2 \rangle$ と定義すれば $(u, h) \longmapsto \langle u, h \rangle$ は $B_\Omega \times \mathcal{E}_\Omega$ 上の双線型汎函数となる．

$K_1 = \{ u \in B_\Omega ; \langle u, h \rangle = 0 \ (\forall h \in \mathcal{E}_\Omega) \}$ とおけば，$u \in K_1$ に対して $\langle u, Q_\Omega \rangle \subset \langle u, \mathcal{E}_\Omega \rangle = \{0\}$ だから補題より $u \in B_0$ となる．一方 $u \in B_0$ とすると，任意の $h \in \mathcal{E}_\Omega$ ($h = c_1 h_1 - c_2 h_2$; $h_1, h_2 \in Q_\Omega$; $c_1, c_2 > 0$) に対して再び補題を適用して，$\langle u, h \rangle = c_1 \langle u, h_1 \rangle - c_2 \langle u, h_2 \rangle = 0$ だから，$u \in K_1$ となる．すなわち，$K_1 = B_0$ である．また，$K_2 = \{ h \in \mathcal{E}_\Omega ; \langle u, h \rangle = 0 \ (\forall u \in B_\Omega) \}$ に対して，$0 \in K_2$ は明らか．$h \in K_2$ とすると，$\langle u, h \rangle = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial h}{\partial n} ds = 0$ ($\forall u \in B_\Omega$) であるから，これは $\partial\Omega$ 上 $\frac{\partial h}{\partial n} \equiv 0$ を意味し，$\partial\Omega$ 上 $h \equiv 0$ であることより $h \equiv 0$ となる．故に $K_2 = \{0\}$．これより $B_\Omega / B_0 = \mathcal{B}_\Omega$，$\mathcal{E}_\Omega$ はそれぞれ $\mathcal{E}^*_\Omega$，$\mathcal{B}^*_\Omega$ ($\mathcal{E}^*_\Omega$, $\mathcal{B}^*_\Omega$ は $\mathcal{E}_\Omega$, $\mathcal{B}_\Omega$ の共役空間) の部分空間と看做せるから

$$\dim \mathcal{B}_\Omega \leqq \dim \mathcal{E}^*_\Omega \ , \quad \dim \mathcal{E}_\Omega \leqq \dim \mathcal{B}^*_\Omega .$$

従って，もし $\dim \mathcal{B}_\Omega$ が有限なら $\dim \mathcal{B}_\Omega = \dim \mathcal{B}^*_\Omega$ で $\dim \mathcal{E}_\Omega$ も有限になり，$\dim \mathcal{E}^*_\Omega = \dim \mathcal{E}_\Omega$ であるから $\dim \mathcal{B}_\Omega =$

$\dim \mathcal{E}_\Omega = \dim \mathcal{P}_\Omega$ が得られる．$\dim \mathcal{P}_\Omega$ が有限としても同様である．（証終）

3．定理Aの応用として，Heins は $\dim \mathcal{P}_\Omega = 1$ となるための十分条件を次の様に，modulus に関する3条件で，与えている；

定理B．Ω を end とし，Ω の subend の列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ で次の条件を満たすものがあるとする；

(i) $\Omega_n \supset \overline{\Omega}_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$,

(ii) $A_n = \overline{\Omega}_{2n-1} - \Omega_{2n}$ は閉円環領域 $(n=1,2,\cdots)$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{mod}\, A_n = +\infty$ ($\mathrm{mod}\, A_n$ は A_n の modulus).

このとき $\dim \mathcal{P}_\Omega = 1$ となる．

定理1を応用すれば，上の定理を次の様に一般化できる；

定理2．Ω を end とし，自然数 N に対して，Ω の subend の列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ で次の条件を満たすものがあるとする：

(i) $\Omega_n \supset \overline{\Omega}_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$,

(ii) $A_n = \overline{\Omega}_{2n-1} - \Omega_{2n}$ は互いに素な N 個の閉円環領域 A_{n1}, $A_{n2}, \cdots, A_{nN}$ の合併である $(n=1,2,\cdots)$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{mod}\, A_n = +\infty$.

このとき $\dim \mathcal{P}_\Omega \leqq N$ となる．

証明．$\mathrm{mod}\, A_n = \mu_n$ とおく．ω_n を $\partial\Omega_{2n-1}$ 上で 0，$\partial\Omega_{2n}$

上で μ_n を境界値として持つ A_n 上の調和函数とする．このとき，$z_n = x_n + iy_n = \omega_n + i\bar{\omega}_n$（$\bar{\omega}_n$ は ω_n の共役）によって A_n は $\{x_n + iy_n ; 0 \leqq x_n \leqq \mu_n, 0 \leqq y_n < 2\pi\}$ へ1対1に写像される．

ここで，$N+1$ 個の $u_1, \cdots, u_{N+1} \in B_\Omega$ を任意にとり，これらに対して

$$\delta_n = \min_{1 \leqq x \leqq \mu_n} \left(\sum_{j=1}^{N+1} \int_{x_n = x} \left| \frac{\partial u_j}{\partial y_n} \right| dy_n \right)$$

を考える．右辺の最小値は $x = t_n$ のとき達成されるものとする．$l_{ni} = \{p \in A_{ni} ; x_n(p) = t_n\}$（$l_{ni}$ は A_{ni} 上の閉曲線で $l_n = \cup_{i=1}^{N} l_{ni}$ は $\partial\Omega_{2n-1}$ と $\partial\Omega_{2n}$ を分離することに注意）とおき，u_j の l_{ni} 上での最大値と最小値の差を $Osc(u_j, l_{ni})$ と表わせば

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N+1} Osc(u_j, l_{ni}) \leqq \delta_n .$$

Schwarz の不等式より（$0 \leqq x_n \leqq \mu_n$）

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &\leqq \left(\sum_{j=1}^{N+1} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_j}{\partial y_n} \right| dy_n \right)^2 \\ &\leqq (N+1) \sum_{j=1}^{N+1} \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_j}{\partial y_n} \right| dy_n \right)^2 \\ &\leqq 2\pi(N+1) \sum_{j=1}^{N+1} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_j}{\partial y_n} \right|^2 dy_n . \end{aligned}$$

x_n で 0 から μ_n まで積分して

$$\delta_n^2 \mu_n \leqq 2\pi(N+1) \sum_{j=1}^{N+1} \int_0^{\mu_n} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_j}{\partial y_n} \right|^2 dx_n dy_n$$

$$\leqq 2\pi(N+1)\sum_{j=1}^{N+1}\int_0^{\mu_n}\int_0^{2\pi}\left(\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_n}\right|^2+\left|\frac{\partial u_j}{\partial y_n}\right|^2\right)dx_n dy_n$$
$$= 2\pi(N+1)\sum_{j=1}^{N+1} D_{A_n}(u_j),$$

ここで $D_{A_n}(u_j)$ は u_j の A_n における Dirichlet 積分を表わす.

n について和をとって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\mu_n \leqq 2\pi(N+1)\sum_{j=1}^{N+1}\sum_{n=1}^{\infty} D_{A_n}(u_j) \leqq 2\pi(N+1)\sum_{j=1}^{N+1} D_\Omega(u_j).$$

従って, 条件 (iii) と $\sum_{j=1}^{N+1} D_\Omega(u_j) < +\infty$ であることより

$$\liminf_{n\to\infty}\delta_n = 0$$

となる. (*) より, これは $\{A_n\}$ の適当な部分列 $\{A_{n_k}\}$ をとれば

$$\lim_{k\to\infty}\left(\max_{p\in l_{n_k i}}|u_j(p)-c_{ij}|\right)=0$$

となる c_{ij} $(1\leqq i\leqq N,\ 1\leqq j\leqq N+1)$ が存在することを意味する.

N 次元ベクトル $\mathfrak{u}_j=(c_{1j},\cdots,c_{Nj})$ $(1\leqq j\leqq N+1)$ に対して, $\sum_{j=1}^{N+1}\alpha_j\mathfrak{u}_j=\mathbf{0}$ を満たす様な N+1 次元ベクトル $(\alpha_1,\cdots,\alpha_{N+1})$ $(\neq\mathbf{0})$ をとる. このとき

$$\lim_{k\to\infty}\max_{p\in l_{n_k}}\left|\sum_{j=1}^{N+1}\alpha_j u_j(p)\right|=0$$

となる. l_n は $\partial\Omega$ と理想境界を分離するから, $\sum_{j=1}^{N+1}\alpha_j u_j$ は理想境界で極限値 0 を持つ, すなわち $\sum_{j=1}^{N+1}\alpha_j u_j\in B_0$ である.

従って $\dim \mathfrak{B}_\Omega\leqq N$ で, 定理 1 によって $\dim P_\Omega\leqq N$ となる.

(証終)

参考文献

[1] C. Constantinescu - A. Cornea : Über einige Probleme von M. Heins, Rev. Math. Pures Appl., 4(1959), 277-281.

[2] M. Heins : Riemann surfaces of infinite genus, Ann. of Math., (2) 55 (1952), 296-317.

[3] Z. Kuramochi : An example of a null-boundary Riemann surface, Osaka Math. J., 6(1954), 83-91.