数理解析研究所講究録
366巻 1979年 83-100

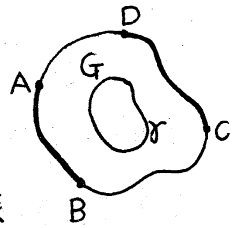
面の動きと挙動空間

京都工繊大　　米谷文男

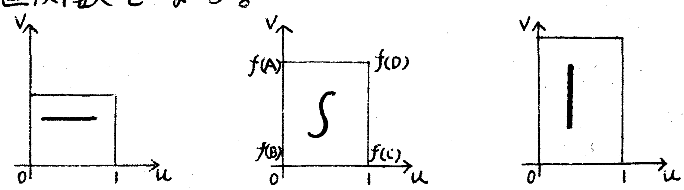
リーマン面がパラメーターに応じて動くときその上の基本的な量がどのように動くかを知ることは興味ある問題である。Ahlfors [1] は種数 g のコンパクトなリーマン面の Teichmüller 空間にリーマンの周期行列の各要素がその空間の点に関して解析関数となるように解析構造を導入し、このような解析構造は一意であることを示した。これに対して楠氏は"擬等角写像とリーマン面"の研究集会（1979年6月）[8] において class O'' の開リーマン面の Teichmüller 空間上リーマンの周期行列の各要素が Bers coordinate に関して Fréchet 微分可能すなわち正則であることを示した。一方柴氏は実数体上の挙動空間の概念を用いて開リーマン面上の理論を種々展開している。ここでは柴氏とは異なる複素数体上の挙動空間に着目し、上記の問題が任意の開リーマン面でも扱われ得ることを示す。概していえば任意の開リーマン面

をとりその上でBeltramiの微分がパラメーターtに関して解析的に変化するときこのBeltramiの微分によって与えられる解析構造をもつ面はtと共に動く。そこでこれらの面上挙動空間によって定義される境界挙動をもって規格化された第1種正則微分に関するリーマンの周期行列の各要素がtに関して解析的に動くことを報告する。

1. コンパクトな面上の理論を開リーマン面に拡張するに際し関数又は微分の境界挙動を制限することが有効な方法となる。最初に我々が必要とする境界挙動を示唆する次の問題を考える。右図のような二重連結領域Gにおいてγを縫い合わせる。縫い合わされて得られた単連結領域において弧$\widehat{AB}$から$\widehat{CD}$に至る曲線族の極値的長さを最大(小)にするようにγを縫い合わせよ。



これは次の様にも考えられる。G上の等角写像$f=u+iv$ ($u=0$ on $\widehat{AB}$, $=1$ on $\widehat{CD}$, $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ on $\widehat{AD}$, $\widehat{BD}$, $V(B)=0$, γはarcに写る) を満足する写像のうちで$u(A)$を最小(大)にせよ。これは容易に推量されるように水平(垂直)截線に写す等角写像が極値関数となる。



2. 任意の開リーマン面R上で上記に対応するものとして次の事実がある。R上2乗可積分な複素微分の作る空間Γ, Γ_h, Γ_{hse}, Γ_{ase}, Γ_{hm}, Γ_{eo} 等の記号はAhlfors Sario [3] に従うものとする。$\{A_j, B_j\}$をR上の標準ホモロジー基底($\mathrm{mod}\ \partial R$)とし、次の性質を満たすとする。(i)各A_j, B_jは解析的な単純閉曲線 (ii) $A_i \times B_j = \delta_{ij}$, $A_i \times A_j = B_i \times B_j = 0$ 但し各A_jとB_jのみが一点で交わりA_jはB_jを右から左に横切るものとする。さてR上に正規微分と呼ばれる次の条件を満足する正則微分ω_{A_j}が存在する。(楠 [7])

(i) $\omega_{A_j} \in \Gamma_{ase}$ (ii) $\int_{A_i} \omega_{A_j} = \delta_{ij}$

(iii) $\mathrm{Im}\,\omega_{A_j} = \omega_j + \omega_0$, $\omega_j \in \Gamma_{hm}$, $\omega_0 \in \Gamma_{eo}$

条件(iii)は上記の水平截線への写像に対応していると考えられ次の極値性をもつ。

命題1. $\|\omega_{A_j}\| = \inf\{\|\varphi_j\| ; \varphi_j \in \Gamma_{ase}, \int_{A_i} \varphi_j = \delta_{ij}\}$
(ノルム$\|\ \|$はヒルベルト空間Γにおけるものである。)

3. 次に有限個の解析曲線γによって囲まれた種数有限の開リーマン面R_0においてγを縫い合わせてR_0をコンパクトな面に埋めこむことを考える。各境界成分γ_iの近傍V_iと媒介変数z_iを固定し

$$V_i = \{P \in R_0 ; r_i < z_i(P) < 1\} \quad \gamma_i = \{P \in \overline{R_0} ; |z_i(P)| = 1\}$$

とする。そして $\omega \in \Gamma_{hse}$ を各 V_i 上次のように書く。

$$\omega = C_0^i(\omega) d \log|z_i| + \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^i(\omega) d\frac{z_i^n + \overline{z_i^n}}{2} + d_n^i(\omega) d\left(\frac{z_i^n - \overline{z_i^n}}{2}\right)$$

面 R_0 の標準ホモロジー基底 $(\mathrm{mod}\ \partial R_0)$ $\{A_j, B_j\}$ に応じて実数列 $\{a_j, b_j\}$, $a_j \neq 0$ を固定し、次の微分の族を考える。

$$\Gamma_{E,\{z_i\}} = \left\{ \omega \in \Gamma_{hse} \,;\ \begin{array}{l} \text{(i)}\ a_j \int_{A_j} \omega = b_j \int_{B_j} \omega \quad \text{for } \forall j \\ \text{(ii)}\ d_n^i(\omega) = d_{-n}^i(\omega) \end{array} \right\}$$

これは明らかに Γ_{hse} の部分空間であるが更に次がいえる。

命題 2. $\Gamma_{E,\{z_i\}}$ に属する微分の共役微分が作る空間 $\Gamma^*_{E,\{z_i\}}$ は Γ_E の Γ_h における直交補空間である。即 $\Gamma_{E,\{z_i\}} \dotplus \Gamma^*_{E,\{z_i\}} = \Gamma_h$。

有理型微分 φ が $\Gamma_{E\{z_i\}}$ ー挙動を持つことを φ がある境界近傍において $\varphi = \omega + \omega_0$, $\omega \in \Gamma_{E,\{z_i\}}$, $\omega_0 \in \Gamma_{e0}$ と表わされることと定義すれば、

命題 3. R_0 上の有理型微分 φ が $\Gamma_{E,\{z_i\}}$ ー挙動を持つことと、各 V_i 上 $\varphi = d\{\sum_{n=1}^{\infty} C_n^i (z_i^n + \frac{1}{z_i^n})$ と表わされることとは同値である。

この命題によって $\Gamma_{E,\{z_i\}}$ ー挙動をもつ有理型微分は γ_i を z_i と $\overline{z_i}$ で縫い合わせたコンパクトな面 R_E 上の有理型微分とみなしてよい。又逆にコンパクトな面 R_S があって R_0 がその

有限個の截線を除いた所に埋め込まれていると考えられる時、R_sから決まる局所変数z_iをとればR_s上の有理型微分はR_0上の$\Gamma_{E,\{z_i\}}$－挙動をもつ有理型微分と同一視される。

系　　R_0上の有理型関数f, gに対しdf, dgが$\Gamma_{E,\{z_i\}}$－挙動をもつならば$d(f \cdot g)$も$\Gamma_{E,\{z_i\}}$－挙動をもつ。特にdf^nも$\Gamma_{E,\{z_i\}}$－挙動をもつ。

4．再び任意のリーマン面R上に考察をうつす。今R上に$\Gamma_{E,\{z_i\}}$と同じ性質を持つ微分の空間を考えれば、コンパクトな面上の理論が開リーマン面においても展開できるのではないかと期待される。

命題4.　任意のリーマン面上任意に与えられた実数列$\{a_j, b_j\}$ $(a_j \neq 0)$ に対して次の条件を満足する微分の空間Γ_xが存在する。(i) $\Gamma_x \subset \Gamma_{hse}$　(ii) $\Gamma_x + \Gamma_x^* = \Gamma_h$　(iii) $\Gamma_x = \overline{\Gamma_x}$

$$\text{(iv)}\ a_i \int_{A_i} \omega = b_i \int_{B_i} \omega\ ,\ \omega \in \Gamma_x \text{ for } \forall i$$

このような空間Γ_xを(X, a_i, b_i)－挙動空間又は単に挙動空間と呼び、有理型微分φがΓ_x－挙動をもつことを適当な境界近傍V, $\omega \in \Gamma_x$, $\omega_0 \in \Gamma_{e0}$が存在してV上$\varphi = \omega + \omega_0$なることと定義する。

さて $\{G_n\}$ を $\{A_j, B_j\}$ に介たした標準近似列とする。又 Γ_{se} の元 ω を $R-\bigcup(A_j \cup B_j)$ 上の関数 W によって $dW=\omega$ のように表わす。

補題 1. 挙動空間 Γ_x の任意の微分 $\omega_1 = dW_1$, ω_2 に対して $\lim_{n\to\infty}\int_{\partial G_n} W_1\overline{\omega_2} = 0$

証明　条件(i), (iv) に注意して

$$(\omega_1, \omega_2^*) = \lim_{n\to\infty}\left\{-\int_{\partial G_n} W_1\overline{\omega_2} + \sum_{G_n}\left[\int_{A_i}\omega_1\int_{B_i}\overline{\omega_2} - \int_{B_i}\omega_1\int_{A_i}\overline{\omega_2}\right]\right\}$$
$$= -\lim_{n\to\infty}\int_{\partial G_n} W_1\overline{\omega_2}$$

ところで条件(ii)から $(\omega_1, \omega_2^*)=0$ となり結論を得る。

更に ω_1 が正則ならば $\omega_1 = i\omega_1^*$ であるから次を得る。

命題 5. 挙動空間 Γ_x に属する正則微分は 0 に限る。

又上と同様にして次を得る。

補題 2. $df_0 \in \Gamma'_{e0}$, $\sigma \in \Gamma'_c$ に対して $\lim_{n\to\infty}\int_{\partial G_n} f_0\overline{\sigma} = 0$

$dS \in \Gamma'_{se}$, $\sigma_0 \in \Gamma'_{e0}$ に対して $\lim_{n\to\infty}\int_{\partial G_n} S\overline{\sigma_0} = 0$

これを用いて

命題 6. Γ_x 一挙動を持つ有理型微分 $\varphi_1 = d\Phi_1$, φ_2 に対し

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial G_n}\Phi_1\overline{\varphi_2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\partial G_n}\Phi_1\varphi_2 = 0.$$

ここで Γ_x－挙動をもつ才1種正則微分の存在を示す。

命題 7.　Γ_x－挙動をもつtrivialでない正則微分が存在し次のように規格化すればその微分 $\varphi_{j,x}$ $(\varphi'_{j,x})$ は唯一つである。

$$a_i \int_{A_i} \varphi_{j,x} = b_i \int_{B_i} \varphi_{j,x} - a_i \delta_{ij} \quad \text{for } {}^\forall i$$

$$\left(a_i \int_{A_i} \varphi'_{j,x} = b_i \int_{B_i} \varphi'_{j,x} - b_i \delta_{ij} \quad \text{for } {}^\forall i\right)$$

証明　サイクル B_j の左側で1 右側で0そして境界近傍で0をとる $R-B_j$ 上の C^∞ 関数を f_j とすれば $\int_{A_i} df_j = \delta_{ij}$, $\int_{B_i} df_j = 0$ となる。df_j を $\Gamma = \Gamma_x + \Gamma_x^* \dotplus \Gamma_{e0} \dotplus \Gamma_{e0}^*$ によって直交分解して

$$df_j = \sigma_j + \tau_j^* + \sigma_0 \qquad \sigma_j,\ \tau_j \in \Gamma_x \qquad \sigma_0 \in \Gamma_{e0}$$

と表わせば ある境界近傍Vと $df_j = 0$ だから V上で $\tau_j^* = -(\sigma_j + \sigma_0)$ となる。従って $\tau_j^* - i\tau_j$ は Γ_x－挙動をもつ。又、

$$a_i \int_{A_i} \tau_j^* = a_i \int_{A_i} (df_j - \sigma_j - \sigma_0) = -a_i \delta_{ij} - a_i \int_{A_i} \sigma_j$$
$$= -a_i \delta_{ij} - b_i \int_{B_i} \sigma_j = b_i \int_{B_i} \tau_j^* - a_i \delta_{ij} \quad ,$$

$$a_i \int_{A_i} i\tau_j = b_i \int_{B_i} i\tau_j$$

であるから、$\varphi_{j,x} = \tau_j^* - i\tau_j$ は条件を満足する。

一意性は命題5から得られる。($\varphi'_{j,x}$ についても同様である。)

この証明内の $(\sigma_j + \tau_j^*)^*$ は Γ_h の B_j に対する周期再生微分

$$(\omega, (\sigma_j + \tau_j^*)^*) = \int_{B_j} \omega \quad \text{for } {}^\forall \omega \in \Gamma_h$$

であり $\|\sigma_j + \tau_j^*\|^2$ は B_j にホモローグな曲線族の極値的長さ $\lambda(B_j)$ に等しい (cf. [7])。　又、命題1を考慮して

$$0 < \|\omega_{A_j}\|^2 \leq \|\varphi_{j,x}\|^2 = 2\|\tau_j\|^2 \leq 2\lambda(B_j) < \infty$$

を得る。有限個の解析曲線によって囲まれた種数有限のリーマン面においては、$\int \omega_{A_j}$ は各境界成分を正確に水平截線に写し、これによって定まる媒介変数から作られる $\Gamma_{E,\{z_i\}}$ を Γ_{x_0} とすれば $\omega_{A_j} = \varphi_{j,x_0}$ となる。一般のリーマン面において

$$\|\varphi_{j,x_1}\| = \sup\{\|\varphi_{j,x}\| : \Gamma_x \text{ は } (x, a_i, b_i)\text{-挙動空間}\}$$

$$\|\varphi_{j,x_0}\| = \inf\{\|\varphi_{j,x}\| : \Gamma_x \text{ は } (x, a_i, b_i)\text{-挙動空間}\}$$

となる挙動空間 Γ_{x_1}, Γ_{x_0} は存在するだろうか。又このような Γ_{x_0} の中から $\Gamma_{E,\{z_i\}}$ に関し命題3系に示されたように微分が Γ_x-挙動をもつ有理型関数の族で積によって閉じているものが存在しているであろうか。挙動空間 Γ_{x_1}, Γ_{x_0} の存在を仮定し、$\Gamma_P = \{\omega \in \Gamma_{hse} \,;\, a_i \int_{A_i} \omega = b_i \int_{B_i} \omega\}$ とおけば任意の (x, a_i, b_i)-挙動空間 Γ_x は Γ_P に含まれ次を得る。

命題 8. $\|\varphi_{j,x_1}\| = \sup\{\|\varphi_{j,x}\| \,;\, \Gamma_x \text{ は } (x, -a_i, b_i)\text{-挙動空間}\}$

$\Rightarrow -1 \leq {}^\exists y_1 \leq 1$ s.t. $\Gamma^*_{x_1} \cap \Gamma_P \ni \omega$ に対し $i y_1 \int_{B_i} \omega^* = \int_{B_i} \omega$

$\|\varphi_{j,x_0}\| = \inf\{\|\varphi_{j,x}\| \,;\, \Gamma_x \text{ は } (x, -a_i, b_i)\text{-挙動空間}\}$

$\Rightarrow -1 \leq {}^\exists y_0 \leq 1$ s.t. $\Gamma^*_{x_0} \cap \Gamma_P \ni {}^\forall\omega$ に対し $i \int_{B_i} \omega^* = y_0 \int_{B_i} \omega$

又は $\int_{B_i} \omega^* = 0$

次に命題6と挙動空間の定義を用いて内積 $(\varphi_{i,x}, \overline{\varphi_{j,x}^*})$, $(\varphi_{j,x}, \varphi_{j,x})$ を計算すれば

命題 9.　$\int_{B_i}\varphi_{j,x} = \int_{B_j}\varphi_{i,x}$ ，$\|\varphi_{j,x}\|^2 = 2\,\mathrm{Im}\int_{B_j}\varphi_{j,x}$

ここで $\int_{B_i}\varphi_{j,x} = t_{ij}(x)$ とおく。
今前記 R_0 上で与えられた媒介変数 z_i がパラメーター t と共に動くとし、それに応じて $\Gamma_{x,(t)}$ $\varphi_{j,x}$ も t と共に動くとする。そこで t_{ij} を変数 t の関数と考える。R_0 上に Γ_{x_0} は存在するから $\mathrm{Im}\,t_{jj}$ はここで最小値をとり、どのようなパラメーター t をと，ても t_{ij} はこの点で t に関し正則に動くことはない。

才1種正則微分と同様に

命題10.　任意のリーマン面上に次のように規格化された Γ_x—挙動をもつ才2種、才3種の有理型微分 $\varphi_{p,n,x}$ $(n\geq 1)$ $\varphi_{p,q,x}$ が一意に存在する。
$\varphi_{p,n,x}$ は P にのみ特異性 $d\left(\frac{1}{\zeta^n}\right)$（$\zeta$ は P の周りの局所変数）をもち

$$a_i\int_{A_i}\varphi_{p,n,x} = b_i\int_{B_i}\varphi_{p,n,x} \quad \text{for } \forall i$$

$\varphi_{p,q,x}$ は P, q にのみ特異性 $\frac{d\zeta}{\zeta}, -\frac{d\eta}{\eta}$（$\eta$ は q の周りの局所変数）をもち

$$a_i\int_{A_i}\varphi_{p,q,x} = b_i\int_{B_i}\varphi_{p,q,x} \quad \text{for } \forall i$$

又 $\Phi_j^x(s,t) = \int_t^s\varphi_{j,x}$ ，$\Phi_{p,n}^x(s,t) = \int_t^s\varphi_{p,n,x}$ ，$\Phi_{p,q}^x(s,t) = \int_t^s\varphi_{p,q,x}$
（p, q, s, t は $U(A_j\cup B_j)$ 上にないとし、積分路は $R-U(A_j\cup B_j)$ でとるものとする。）とおけば、これらは $R-U(A_j\cup B_j)$ 上の有理

型関数となり、更に次の関係がある。

命題 11.
(1) $\int_{B_j}\varphi_{p,q,x} = 2\pi i\int_q^p \varphi_{j,x} = 2\pi i\,\Phi_j^x(p,q)$

(2) $\int_{B_j}\varphi_{p,n,x} = \dfrac{2\pi i}{n!}\dfrac{d^n}{d\zeta^n}\Phi_j^x(\zeta,t)\Big|_{\zeta=0}$

(3) $\Phi_{p,q}^x(s,t) = \Phi_{s,t}^x(p,q)$

(4) $\dfrac{d^m}{d\eta^m}\Phi_{p,n}^x(\eta,t)\Big|_{\eta=0} = \dfrac{d^m}{d\zeta^m}\Phi_{q,n}^x(\zeta,t)\Big|_{\zeta=0}$

(5) $\dfrac{1}{n!}\dfrac{\partial^n}{\partial\zeta^n}\Phi_{s,t}^x(\zeta,q)\Big|_{\zeta=0} = \Phi_{p,n}^x(s,t) = \int_t^s \varphi_{p,n,x}$

以上のΓ_x-挙動をもつ才1種、才2種、才3種の有理型微分を用いて、任意のリーマン面上で Riemann-Roch, Abel の定理を定式化することができる。

δ_p, δ_q をR上の互に素で有限な整因子とし因子 δ_p/δ_q を δ と書く。このようなδに関し次の複素ベクトル空間を考える。

$S(X;1/\delta)=\{f$; (i) df はΓ_x-挙動をもつ有理型微分。(ii) f は一価有理型関数 (iii) f の因子は $1/\delta$ の倍元である。$\}$

$M(X;1/\delta_p)=\{f$; (i) df はΓ_x-挙動をもつ有理型微分で $a_i\int_{A_i}df \equiv b_i\int_{B_i}df$ for $\forall i$ を満足する。(ii) f の因子は $1/\delta_p$ の倍元である。$\}$

$D(X;\delta)=\{\varphi$; (i) φ はΓ_x-挙動をもつ有理型微分。(ii) φ の因子はδの倍元である。$\}$

$D(X;1/\delta_q)=\{\varphi$; (i) φ はΓ_x-挙動をもつ有理型微分。(ii) φ の因子は $1/\delta_q$ の倍元である。$\}$

(但し$\delta_q \neq 1$ならば$M(X; 1/\delta_p)$の2元f_1, f_2は$f_1 - f_2$が定数のとき同一視する。)

命題12. (Riemann-Roch Theorem)

$$\dim S(X; 1/\delta) = \deg \delta_p + 1 + \min(\delta_q, 1) - \dim \frac{D(X; 1/\delta_q)}{D(X; \delta)}$$

特にRの種数gが有限ならば

$$\dim S(X; 1/\delta) = \dim D(X; \delta) + \deg \delta - g + 1$$

因子δの次数が0のとき$\delta = P_1 \cdots P_n / Q_1 \cdots Q_n$と表わし

命題13. (Abel's Theorem)

δを因子とする有理型関数fで$d \log f$が反一挙動をもち

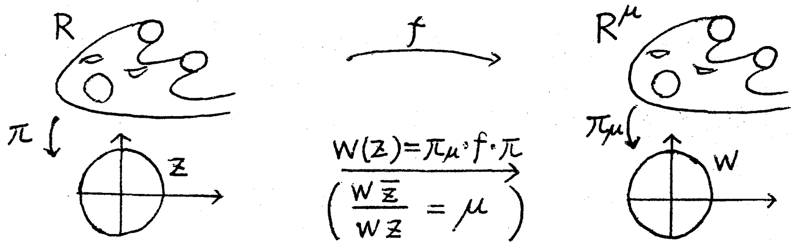
$$a_i \int_{A_i} d \arg f = b_i \int_{B_i} d \arg f \quad \text{for } \forall i$$

を満足する関数が存在するための必要十分条件は、

1チェインγ, $\partial \gamma = \sum_{i=1}^{n} P_i - Q_i$があって$\int_\gamma \varphi_{j,x}$, $\int_\gamma \varphi'_{j,x}$がすべて整数となることである。(但し$\varphi_{j,x}$, $\varphi'_{j,x}$は命題7で与えられた才1種正則微分である。)

注 これらのRiemann-Roch, Abelの定理をある種の制限の下にδが無限因子である場合にも定式化することができる。

5. 任意の閉リーマン面R上で Beltrami の微分 $\mu \dfrac{d\bar{z}}{dz}$ $(\mu \in C^2, |\mu| \leq k < 1)$ を考え $ds = |dz + \mu d\bar{z}|$ によって等角構造が導入されたリーマン面を R^μ とする。



上の図式において $\mu \in C^2$ とすれば、$f \in C^2$ (cf. [4]) となり R 上の調和微分 ω (i.e. $\omega \in \Gamma_h(R)$) は R^μ 上の閉微分とみなせるから、直交分解 $\Gamma_c(R^\mu) = \Gamma_h(R^\mu) \dotplus \Gamma_{eo}(R^\mu)$ によって

$$\omega = \omega^\mu \dotplus \omega_0^\mu, \quad \omega^\mu \in \Gamma_h(R^\mu), \ \omega_0^\mu \in \Gamma_{eo}(R^\mu)$$

と表現される。又明らかに

$$\int_{A_j} \omega = \int_{A_j} \omega^\mu \ \text{for} \ {}^\forall A_j, \quad \int_{B_j} \omega = \int_{B_j} \omega^\mu \ \text{for} \ {}^\forall B_j$$

である。今 $\Gamma_h(R)$ から $\Gamma_h(R^\mu)$ への写像 L を $L(\omega) = \omega^\mu$ によって定義する。このとき $L(0) = 0$, $L(\omega_1 + \omega_2) = L(\omega_1) + L(\omega_2)$, $L(\bar{\omega}) = \overline{L(\omega)}$ は明らかである。又 $\Gamma_h(R^\mu)$ から $\Gamma_h(R)$ への写像 L_μ を同様にして定義すれば

$$L_\mu \circ L(\omega) - \omega = L_\mu(\omega^\mu) - \omega = L_\mu(\omega - \omega_0^\mu) - \omega = 0$$

によって、$L_\mu \circ L(\omega) = \omega$ 同様に $L \circ L_\mu(\omega') = \omega'$ が示される。従って L が $\Gamma_h(R^\mu)$ の上への写像であることを知る。

さて $\Gamma_x(R)$ を R 上の (x, a_i, b_i) ―挙動空間として、

$$\Gamma_{x^\mu} = \{\omega^\mu \in \Gamma_h(R^\mu) \,;\, \omega \in \Gamma_x(R)\}$$

とおく。明らかに $\Gamma_{x\mu} \subset \Gamma_{hse}(R^{\mu})$ であり、次の補題に注意したい。

補題 3. 挙動空間 $\Gamma_x(R)$ の任意の2元 ω_1, ω_2 に対して

$$(L(\omega_1)^*,\ L(\omega_2^*))_{R^{\mu}} = (\omega_1,\ \omega_2)_R$$

(但し、$(\ ,\ )_{R^{\mu}}$ は R^{μ} 上の $(\ ,\ )_R$ は R上のデリクレの内積を表わす。)

証明 補題1, 2, そして挙動空間の条件iv に留意して

$$\begin{aligned}
(\omega_1^{\mu}, (\omega_2^*)^{\mu *})_{R^{\mu}} &= \lim_{n\to\infty}\Big\{-\int_{\partial G_n} W_1^{\mu}\overline{(\omega_2^*)^{\mu}} + \sum_{G_n}\Big[\int_{A_i}\omega_1^{\mu}\int_{B_i}\overline{(\omega_2^*)^{\mu}} - \int_{B_i}\omega_1^{\mu}\int_{A_i}\overline{(\omega_2^*)^{\mu}}\Big]\Big\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big\{-\int_{\partial G_n}(W_1-(W_1)_0^{\mu})\overline{(\omega_2^*-(\omega_2^*)_0^{\mu})} + \sum_{G_n}\Big[\int_{A_i}\omega_1\int_{B_i}\overline{\omega_2^*} - \int_{B_i}\omega_1\int_{A_i}\overline{\omega_2^*}\Big]\Big\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big\{-\int_{\partial G_n} W_1\overline{\omega_2^*} + \sum_{G_n}\Big[\int_{A_i}\omega_1\int_{B_i}\overline{\omega_2^*} - \int_{B_i}\omega_1\int_{A_i}\overline{\omega_2^*}\Big]\Big\}\\
&= (\omega_1,\ \omega_2^{**})_R \qquad (dW_1 = \omega_1,\ d(W_1)_0^{\mu} = (\omega_1)_0^{\mu})
\end{aligned}$$

即ち $(\omega_1^{\mu *}, (\omega_2^*)^{\mu})_{R^{\mu}} = (\omega_1, \omega_2)_R$ となり結論を得る。

又上の証明と同様にして

$$\begin{aligned}
(\omega_1^{\mu}, \omega_2^{\mu *}) &= \lim_{n\to\infty}\Big\{-\int_{\partial G_n} W_1^{\mu}\overline{\omega_2^{\mu}} + \sum_{G_n}\Big[\int_{A_i}\omega_1^{\mu}\int_{B_i}\overline{\omega_2^{\mu}} - \int_{B_i}\omega_1^{\mu}\int_{A_i}\overline{\omega_2^{\mu}}\Big]\Big\}\\
&= \lim_{n\to\infty} -\int_{\partial G_n}(W_1-(W_1)_0^{\mu})\overline{(\omega_2-(\omega_2)_0^{\mu})} = 0
\end{aligned}$$

従って Γ_x^{μ} と $\Gamma_x^{\mu *}$ は直交する。次に $\widetilde{\omega} \in \Gamma_h(R^{\mu})$ を $\Gamma_x^{\mu} \dot{+} \Gamma_x^{\mu *}$ に直交する微分とし、更に $L_{\mu}(\widetilde{\omega}) \in \Gamma_h(R)$ を

$$L_{\mu}(\widetilde{\omega}) = \omega_1 + \omega_2^*,\quad \omega_1, \omega_2 \in \Gamma_x(R)$$

と表現する。補題3と $\widetilde{\omega} = L\circ L_{\mu}(\widetilde{\omega}) = L(\omega_1) + L(\omega_2^*)$ に注意すれば、

$$0 = (\widetilde{\omega},\ L(\omega_2)^*) = (L(\omega_1) + L(\omega_2^*),\ L(\omega_2)^*)$$
$$= (L(\omega_2^*),\ L(\omega_2)^*) = (\omega_2,\ \omega_2)$$

これは $\widetilde{\omega} = L(\omega_1)$ であることを示し、$(\widetilde{\omega},\ L(\omega_1)) = 0$ から結局 $\widetilde{\omega} = 0$ となる。以上により次の命題を得る。

命題 14. $\Gamma_{\chi^\mu} \dotplus \Gamma_{\chi^\mu}^* = \Gamma_h(R^\mu)$

Γ_{χ^μ} は R^μ 上の一つの挙動空間である。

6. ここで Rauch [6], Ahlfors [1] の Hadamard variation の方法により、周期行列の各要素の解析性に関する問題を扱うことができる。微分 φ_{j,χ^μ} を命題7に与えられたような R^μ 上の Γ_{χ^μ}-挙動をもつ才1種正則微分とすれば

$$a_i \int_{A_i} (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x}) = b_i \int_{B_i} (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x}) \quad \text{for } {}^\forall i$$

であるから

$$(\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x},\ (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x})^*)_R$$
$$= \lim_{n\to\infty} \Big\{ -\int_{\partial G_n} (\Phi_j^{x^\mu} - \Phi_j^{x}) \overline{(\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x})}$$
$$+ \sum_{G_n} \Big[\int_{A_i} (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x}) \int_{B_i} \overline{(\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x})} - \int_{B_i} (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x}) \int_{A_i} \overline{(\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x})} \Big] \Big\}$$
$$= 0$$

又一方

$$(\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x},\ (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x})^*)_R$$
$$= -\iint_R \left\{ \left| \frac{d\Phi_j^{x^\mu}}{dW} \cdot W_z - \frac{d\Phi_j^{x}}{dW} \right|^2 - \left| \frac{d\Phi_j^{x^\mu}}{dW} \cdot W_{\bar z} \right|^2 dz\, d\bar z \right\}$$

となり、次の補題を得る。

補題 4. $\iint_R |(\Phi_j^{\chi^\mu})_w W_z - (\Phi_j^{\chi})_z|^2 dz\,d\bar{z} = \iint_R |(\Phi_j^{\chi^\mu})_w \mu W_z|^2 dz\,d\bar{z}$

$(W_{\bar{z}}/W_z = \mu)$

又、この補題と

$$(\varphi_{j,\chi^\mu} - \varphi_{j,\chi},\ \varphi_{j,\chi^\mu} - \varphi_{j,\chi})$$
$$= i\iint_R \left\{\left|\frac{d\Phi_j^{\chi^\mu}}{dw} W_z - \frac{d\Phi_j^{\chi}}{dz}\right|^2 + \left|\frac{d\Phi_j^{\chi^\mu}}{dw} W_{\bar{z}}\right|^2 dz\,d\bar{z}\right.$$

を用いて次を得る。

命題 15. $|\mu| \le k < 1 \Rightarrow \|\varphi_{j,\chi^\mu} - \varphi_{j,\chi}\| \le \frac{k}{1-k}\|\varphi_{j,\chi}\|$

今、$\mu(z,0)\frac{d\bar{z}}{dz} = 0$ として $\mu(z,t)\frac{d\bar{z}}{dz}$ は t を固定すれば $|\mu(z,t)| \le k < 1$ の C^2-Beltrami の微分となり、z を固定すれば t に関し解析的であるとする。又 $\mu_t(z,t)$ は z,t に関し有界連続であるとする。$\mu(z,t)$ による Riemann 面 $R^{\mu(z,t)}$ は t をパラメーターとして動く。

命題 6. 挙動空間の条件 iv から

$$(\varphi_{j,\chi^{\mu(z,t)}},\ \overline{(\varphi_{j,\chi^{\mu(z,t)}} - \varphi_{j,\chi^{\mu(z,t)}})^*})_{R^{\mu(z,t)}}$$
$$= \int_{B_i} \varphi_{j,\chi^{\mu(z,t)}} - \int_{B_i} \varphi_{j,\chi^{\mu(z,t)}}$$

を得、

$$t_{ij}(\mu) = t_{ij}(\mu(z,t)) = \int_{B_i} \varphi_{j,\chi^{\mu(z,t)}}$$

とおいて次を得る。

命題16.　$t_{ij}(\mu)_t = \iint_{R^\mu} (\Phi_i^x)_z (\Phi_j^x)_z \, \mu_t \, dz \, d\bar{z}$

即ち $t_{ij}(\mu)$ は t に関して正則である。

注　μに関する仮定を弱めて議論すれば、例えば複素平面上2葉に被覆された種数無限のリーマン面において、無限に多くの分岐点が正則に動くとき上記のように規格化された第1種正則微分の周期行列の各要素も正則に動くことが導びけるのではないかと思われる。

反一挙動をもつ第2種第3種の有理型微分についても同様のことが成立する。

補題5.　Beltrami の微分 μ の台は p, q を含むある領域 V と交わらないとし、$\Phi^{x^\mu}_{p,n}$ と $\Phi^{x}_{p,n}$, $\Phi^{x^\mu}_{p,q}$ と $\Phi^{x}_{p,q}$ はそれぞれ同じ特異性をもつとする。このとき

$$\iint_R \left| (\Phi^{x^\mu}_{p,n})_w W_z - (\Phi^{x^\mu}_{p,n})_z \right|^2 dz \, d\bar{z} = \iint_R \left| (\Phi^{x^\mu}_{p,n})_w \mu W_z \right|^2 dz \, d\bar{z}$$

$$\iint_R \left| (\Phi^{x^\mu}_{p,q})_w W_z - (\Phi^{x^\mu}_{p,q})_z \right|^2 dz \, d\bar{z} = \iint_R \left| (\Phi^{x^\mu}_{p,q})_w \mu W_z \right|^2 dz \, d\bar{z}$$

命題17.　補題5と同じ仮定の下に、$|\mu| \leq k < 1$ ならば

$$\| \varphi_{p,n,x^\mu} - \varphi_{p,n,x} \| \leq \frac{k}{1-k} \| \varphi_{p,n,x} \|_{R-V}$$

$$\| \varphi_{p,q,x^\mu} - \varphi_{p,q,x} \| \leq \frac{k}{1-k} \| \varphi_{p,q,x} \|_{R-V}$$

$$S_{j,p,n}(\mu) = S_{j,p,n}(\mu(z,t)) = \int_{B_j} \varphi_{p,n,\chi^{\mu(z,t)}}$$
$$R_{j,p,q}(\mu) = R_{j,p,q}(\mu(z,t)) = \int_{B_j} \varphi_{p,q,\chi^{\mu(z,t)}}$$

とおけば、

$$S_{j,p,n}(\mu(z,t')) - S_{j,p,n}(\mu(z,t)) = -(\varphi_{j,\chi^{\mu(z,t)}}, \overline{(\varphi_{p,n,\chi^{\mu(z,t')}} - \varphi_{p,n,\chi^{\mu(z,t)}})^{*}})$$
$$R_{j,p,q}(\mu(z,t')) - R_{j,p,q}(\mu(z,t)) = -(\varphi_{j,\chi^{\mu(z,t)}}, \overline{(\varphi_{p,q,\chi^{\mu(z,t')}} - \varphi_{p,q,\chi^{\mu(z,t)}})^{*}})$$

を得る。そこで

命題 18. Beltrami の微分 $\mu(z,t)$ の台は p, q を含む領域 V と交わらないとする。そのとき

$$S_{j,p,n}(\mu)_t = \iint_{R^\mu} (\Phi_i^{\chi^\mu})_z (\Phi_{p,n}^{\chi^\mu})_z \mu_t \, dz d\bar{z}$$
$$R_{j,p,q}(\mu)_t = \iint_{R^\mu} (\Phi_i^{\chi^\mu})_z (\Phi_{p,q}^{\chi^\mu})_z \mu_t \, dz d\bar{z}$$

命題 11 によって

$$S_{j,p,n}(\mu(z,t)) = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} \Phi_j^{\chi^\mu}(\zeta,t)\Big|_{\zeta=0}$$
$$R_{j,p,q}(\mu(z,t)) = 2\pi i \int_q^p \varphi_{j,\chi^{\mu(z,t)}}$$

であるから μ の台には含まれない点における $\Phi_j^{\chi^{\mu(z,t)}}$ の Taylor 展開の係数は t に関して解析的であることが導びかれる。

参照文献

[1] Ahlfors, L.V. : The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces, Analytic Function, Princeton 1960, p.45-66 .

[2] ____________ : Lecture on Quasiconformal mappings, Van Nostrand, Princeton 1966 .

[3] Ahlfors, L.V. & Sario L. : Riemann surfaces, Princeton 1960 .

[4] Bers, L. : Riemann Surfaces. New York Uni. 1957-1958 .

[5] Earle, C.J. : Teichmüller Theory, Discrete Groups and Automorphic Functions, Academic Press, 1977, p.143-162 .

[6] Rauch, H.E. : Weierstrass Points, Branch Points, and Moduli of Riemann Surfaces, Commu. of pure and app. Math., 1959, p.543-560 .

[7] Kusunoki, Y. : Riemann surfaces and conformal mappings, Asakura, 1973 .

[8] ____________ : Variation of period matrices for quasi-conformal deformations, Seminar Reports, Res. Inst. Math Sci. (to appear) .