数理解析研究所講究録
366巻 1979年 30-47

H^p族の境界値について

京産大　　志賀 啓成

Rを種数gのcompact bordered Riemann面で、境界∂Rはn個の解析的なJordan閉曲線とする。$L^p(\partial R)$で∂R上の調和測度に関するp乗可積な函数空間を表すものとすると、$1<p<\infty$のとき、$L^p(\partial R)$と$H^p(R)=\{f;R$でanalyticで、$|f|^p$が調和優函数をもつ$\}$の境界値との関連については、単位円の結果を拡張する形で与えられている([1],[2],[3])。ここではそれらの結果の別証明を与え、それらを用いて、$L^p(\partial R)$のCauchy積分の境界挙動について考察する。

よく知られているように、$H^p(R)$は∂R上a.e.にnon-tangential limitを持ち、しかも$L^p(\partial R)$になる。この意味で、$H^p(R)\subset L^p(\partial R)$。また、$h^p(R)=\{u;R$でharmonicで、$|u|^p$が調和優函数をもつ$\}$とおく。明らかに、$H^p(R)\subset h^p(R)$。$h^p(R)$, $H^p(R)$に、

(1)　　$\|u\|_p=(\mathrm{L.H.M.}\,|u|^p(a_0))^{\frac{1}{p}}$

でノルムを定義して、Banach空間にすることができる。ここに、L.H.M.は最小調和優函数を表し、a_0はRの固定点とする。基本的な事実として、

<u>補　題　1 ([3])</u>　　Dを単位円、$1<p<\infty$とするとき、$\forall u \in h^p(D)$に対し、その共役調和函数$^*u$も$h^p(D)$で、uに無関係な定数C_pが存在して、

(2)　　$\|{}^*u\|_p \leqq C_p \|u\|_p$

したがって、一般の開Riemann面W($\notin O_G$)に対しても、そのuniversal coveringをDと考え、上記の事実と"D上のL.H.M.とW上のL.H.M.は一致する([6])"を使えば、

<u>補　題　2</u>　　W上の正則函数$f=u+iv$に対し、もし$u \in h^p(W)$なら、$f \in H^p(W)$であり(ただし$1<p<\infty$)、

(3)　　$\|f\|_p \leqq C_p' \|u\|_p$

を満たす定数C_p'が存在する。

更に、$h^p(W)$, $H^p(W)$の境界挙動について、

<u>補　題　3</u>　　調和函数uがW内のあるcompact集合Kの外でh^p (or H^p)なら、$u \in h^p(W)$ (or $H^p(W)$)

証明は$W-K$における$|u|^p$の調和優函数をnormal operatorの方法([4])によって、W上の調和函数に作り変えることで

示される。

さて、compact bordered Riemann面Rについて、実数値函数 $f \in L^p(\partial R)$ $(1<p<\infty)$ をとる。∂Rの連結成分α_j $(j=1,\cdots n)$に対して、α_jをその外周とするannulus U_jがとれて、しかもU_jは$\{r_j<|z|<1\}$と等角で、α_jが単位円と対応するようにできる。したがって$f \in L^p(d\theta)$と考えられる。よってfは、そのPoisson積分を考えて、$\mathfrak{h}^p(U_j)$の元の境界値となる。それをu_jとする。u_jは作り方から、

$$\int_{\beta_j} {}^*du_j = 0 \qquad (j=1,\cdots,n)$$

ここにβ_jは$\beta_j \sim \alpha_j$なる、U_j内の閉曲線。よって存在定理([4])より、U_j上、

(4) $$u = u_j + (I)L_1(u-u_j)$$

をみたすR上の調和函数uが存在する。$(I)L_1$の∂Rにおける値を0と正規化しておけば、uの∂Rにおける値はu_jと同一、すなわち、fになる。normal operatorの性質から、$(I)L_1(u-u_j)$はU_j上有界。したがって$u|_{U_j} \in \mathfrak{h}^p(U_j)$. 補題3から$u \in \mathfrak{h}^p(R)$が従う。

$\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g+n-1}$ をRのホモロジー基底として、

$$a_j = \int_{\gamma_j} {}^*du \qquad (j=1,\cdots,2g+n-1)$$

とおく。一方、$R \cup \partial R$ の近傍での調和函数 $v_1,\cdots,v_{2g+n-1}$ で、

(5) $$\int_{\gamma_k} {}^*dv_j = \delta_{jk} \qquad (j,k=1,\cdots,2g+n-1)$$

なるものが見出せるが、これに対し、$v = u - \sum_{1}^{2g+n-1} a_j v_j$ とおくと、$v \in \mathfrak{h}^p(R)$で、しかもその共役調和函数$^*v$は一価。よって補題2から、

$$g = u + i{}^*u \in H^p(R) \quad (1<p<\infty)$$

特に、$^*v(a_0) = 0$としておくと、

(6) $$u = \frac{1}{2}\{g + g(a_0) + \overline{g - g(a_0)}\} + \sum_{1}^{2g+n-1} a_j v_j$$

ここでは、fを実数値としたが、複素数値でも同様の議論が成り立つことは明らかである。空間Nを$\{v_j\}_{j=1}^{2g+n-1}$の境界値によって$\mathbb{C}$上張られる空間、$H_0^p(R) = \{g \in H^p(R);\ g(a_0) = 0\}$とおく。

<u>定理 1</u>　　$1<p<\infty$ のとき、

(7) $$L^p(\partial R) = H^p(R) \oplus \overline{H_0^p}(R) \oplus N \quad (\text{直和})$$

$$\dim N = 2g + n - 1$$

しかも、$L^p(\partial R)$から、各空間への projection は有界線型作用素である。

証明　(6)によって、$L^p(\partial R)$が、$H^p(R)$, $H_0^p(R)$, Nで表現できることが分かる。また、$H^p(R)$と$\overline{H_0^p}(R)$の直和性は明らかだし、Nとの直和性についても、共役微分のγ_j-周期をみれば分かる。Nの次元も、$\{v_j\}_{j=1}^{2g+n-1}$が境界函数として一次独立であることを示せば十分であるが、

$$\sum_{1}^{2g+n-1} c_j v_j = 0$$

ならば、最大値の原理から、$\sum_{1}^{2g+n-1} c_j v_j$ は境界函数のみならず、R上の調和函数と考えても、$\equiv 0$。よって両辺の γ_k-周期を考えると、(5)から $c_k = 0$ となる。

projectionの有界性を示す為に、まず、$u \in \mathfrak{h}^p(R)$ に対し、

(8) $$\|u\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\partial R_n} |u|^p *dg_{a_0}^{R_n} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial R}|u|^p *dg_{a_0} = (L.H.M.\,|u|^p)(a_0)$$

に注意する。ここに $\{g_{a_0}^{R_n}\}$ はRの正則近似列 $\{R_n\}$ に関して、極を a_0 にもつGreen函数で、g_{a_0} はRに関するそれである。

(8)の証明はGreen函数に対するRの正則性と、$\mathfrak{h}^p(R)$ の境界挙動による。次に、

<u>補　題　4</u>　　$1<p$ のとき、$u \in \mathfrak{h}^p(R)$ に対し、

$$u \longmapsto \int_{\gamma_j} *du \quad (j=1,\cdots,2g+n-1)$$

は有界線型汎函数である。しかも σ_{γ_j} を γ_j についての Γ_h-周期再成微分とすると、

(9) $$\int_{\gamma_j} *du = \int_{\partial R} u\,\sigma_{\gamma_j}$$

証明　uの境界値 $u^* \in L^p(\partial R)$ を、∂R の近傍での調和函数列 $\{u_n\}$ の ∂R への制限 $\{u_n^*\}$ で L^p-近似する。ただし、ここでいう、∂R の近傍とは、Rを部分領域として含む十分広い $\hat{R}$ における ∂R の近傍という意味である。u_n^* を境界値として持つ、$\mathfrak{h}^p(R)$ の元を h_n とすると(4)より、各 U_j 上、

$$h_n = u_n + (I)L_1(h_n - u_n)$$

よって、h_nは$\overline{R}$の近傍で調和で、$^*dh_n \in \Gamma_E(R)$。

(10) $$\int_{r_j} {}^*dh_n = \iint_R {}^*dh_n \wedge {}^*\sigma_{r_j} = \iint_R dh_n \wedge \sigma_{r_j}$$
$$= \int_{\partial R} h_n \sigma_{r_j} = \int_{\partial R} h_n \frac{\sigma_{r_j}}{(-{}^*dg_{a_0})}(-{}^*dg_{a_0})$$

$\sigma_{r_j}/(-{}^*dg_{a_0})$は$\partial R$上連続だから、$\widetilde{M} \geqq \max_{\partial R} |\sigma_{r_j}/(-{}^*dg_{a_0})|$とおくと、$-{}^*dg_{a_0}$は$\partial R$上正の微分より、

(11) $$\left|\int_{r_j} {}^*dh_n\right| \leqq 2\pi\widetilde{M}\frac{1}{2\pi}\int_{\partial R}|h_n|(-{}^*dg_{a_0})$$
$$\leqq 2\pi\widetilde{M}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial R}|h_n|^p(-{}^*dg_{a_0})\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= 2\pi\widetilde{M}\,\|h_n\|_p$$

ここで、$\widetilde{M}$はuに依存しない。

$\{h_n\}$の取り方、及び(8)より、$\|h_n - u\|_p^p \to 0\ (n \to \infty)$。

したがって、$\{h_n\}$はuに広義一様収束し([6])、

(12) $$\int_{r_j} {}^*dh_n \longrightarrow \int_{r_j} {}^*du$$

一方、$\|h_n - u\|_p \geqq \big|\|h_n\|_p - \|u\|_p\big|$ から、

(13) $$\|h_n\|_p \longrightarrow \|u\|_p$$

(11), (12), (13) より、

(14) $$\left|\int_{r_j} {}^*du\right| \leqq 2\pi\widetilde{M}\,\|u\|_p$$

また、(10)において、$n \to \infty$ として

$$\int_{r_j} {}^*du = \int_{\partial R} u\,\sigma_{r_j}$$ を得る。　　　(証終)

さて、実数値$u \in L^p(\partial R)$を、(7)にしたがって、

$$u = f + \overline{g} + v \quad (f \in H^p(R),\ g \in H_0^p(R),\ v \in N)$$

とおいたとき、(6)、(14)から、

$$(15)\qquad \|v\|_p = \Big\|\sum_1^{2g+n-1} a_j v_j\Big\|_p \leq 2\pi\tilde{M}\,\|u\|_p \sum_1^{2g+n-1}\|v_j\|_p$$

$v_1, \cdots, v_{2g+n-1}$ は固定してあるから、projection $u \longmapsto v$ についてその有界性は示された。projection $u \mapsto f$ については、(6)から、 $f = \frac{1}{2}(u-v) + \frac{i}{2}{}^*(u-v) + \frac{1}{2}(u(a_0) - v(a_0))$

ただし、${}^*(u-v)$ は $(u-v)$ の共役調和函数で、a_0 で 0 としておく、また、各 v_j も a_0 で 0 としておけば、$v(a_0) = 0$。すると、補題2－(3)より、

$$\begin{aligned}\|f\|_p &\leq C_p' \Big\|\frac{1}{2}(u-v) + \frac{1}{2}u(a_0)\Big\|_p \\ &\leq \frac{1}{2}C_p'(\|u\|_p + \|v\|_p + \|u\|_p) \\ &\leq \frac{1}{2}C_p'\Big(2 + 2\pi\tilde{M}\sum_1^{2g+n-1}\|v_j\|_p\Big)\|u\|_p \quad (\because (15)\text{より})\end{aligned}$$

projection $u \longmapsto \bar{f}$ についても同様である。　（証終）

さて、定理1の(7)の分解において、空間Nは、ある種の条件を満たす調和函数よりなる空間であった。これを[1], [2], [3]で見られるような、有理型函数の境界値の空間に置き換えて、のちの議論に応用したい。

<u>定　理　2</u>　　$\hat{R}$ で ∂R に関する R のダブルを表わし、δ_1, $\delta_2 = 1$ or a_0 を R 内の互いに素な整因子とし、$\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2$ をその鏡像、$\delta = \delta_2/\delta_1$, $\hat{\delta} = \hat{\delta}_2/\hat{\delta}_1$ とおく。$1 < p < \infty$ のとき、

$$(16)\qquad L^p(\partial R) = H^p(R) \oplus \overline{H_0^p(R)} \oplus M_{\hat{R}}(\delta\hat{\delta})|_{\partial R} \quad (\delta_2 \neq 1)$$

または、

$$(17)\qquad L^p(\partial R) = H_0^p(R) \oplus \overline{H_0^p(R)} \oplus M_{\hat{R}}(\delta\hat{\delta})|_{\partial R} \quad (\delta_2 = 1)$$

と直和分解できるための必要十分条件は、

$$(18)\qquad \dim M_{\hat{R}}(\delta\hat{\delta}) = \begin{cases} 2g+n-1 & (\delta_2 \neq 1) \\ 2g+n & (\delta_2 = 1) \end{cases}$$

かつ、

$$(19)\qquad \dim M_{\hat{R}}(\hat{\delta}) = \begin{cases} 0 & (\delta_2 \neq 1) \\ 1 & (\delta_2 = 1) \end{cases}$$

しかも、(16)または(17)の分解において、$L^p(\partial R)$ から各空間への projection は有界である。

ここに、$M_{\hat{R}}(\delta) = \{f ; \hat{R}$ 上の有理型函数で、$(f) > \delta\}$, で $M_R(\delta)|_{\partial R}$ は、その ∂R 上への制限からなる空間で、ノルムは、$\frac{-1}{2\pi}{}^*dg_{a_0}$ に関する L^p-ノルムをとる。

証　明　$\delta_2 = 1, \neq 1$ のときの表現、次元の相違は、定数の取捨によるものであるから、$\delta_2 \neq 1$ として示す。

必要性；定理１の N の基底 $v_1, \cdots, v_{2g+n-1}$ について、(16)にしたがって、

$$(20)\qquad v_j = f_j + \overline{g_j} + m_j \qquad (j = 1, \cdots, 2g+n-1)$$

と表現する。ただし、$f_j \in H^p(R)$, $g_j \in H_0^p(R)$, $m_j \in M_{\hat{R}}(\delta\hat{\delta})|_{\partial R}$.

もし、$^\exists a_j \in \mathbb{C}$ $(j=1, \cdots, 2g+n-1)$ に対し、$\sum_1^{2g+n-1} a_j m_j = 0$ とすると、(20)から、$\sum_1^{2g+n-1} a_j v_j = \sum_1^{2g+n-1} (a_j f_j + a_j \overline{g_j})$、すると、定理１の直和性と$\{v_j\}$の一次独立性より、$^\forall a_j = 0$. すなわち、$m_1, \cdots, m_{2g+n-1}$ は一次独立. $\therefore \dim M_{\hat{R}}(\delta\hat{\delta}) \geqq 2g+n-1$

もし、$\dim M_{\hat{k}}(\delta\hat{\delta}) = k > 2g+n-1$ とすると、その基底 m_1, $\cdots$, m_k に対し、逆に定理1を用いて、

$$m_j = f_j' + \overline{g_j'} + \hat{v}_j \qquad f_j' \in H^p(R),\ g_j' \in H_0^p(R),\ \tilde{v}_j \in N$$

とすると、上の議論と同様にして、$\hat{v}_1, \cdots, \tilde{v}_k$ が一次独立となり、$\dim N = 2g+n-1$ に反す。

また、もし $\exists g \in M_{\hat{k}}(\hat{\delta})$, $g \neq 0$ なら、$g|_{\partial R} \in H^p(R) \cap M_{\hat{k}}(\delta\hat{\delta})|_{\partial R}$ となり、(16)の直和性に反す。以上により、(18),(19)が示された。

十分性；まず直和性を示す。$\exists m \in M_{\hat{k}}(\delta\hat{\delta})$ で、$H^p(R)$ と $\overline{H_0^p(R)}$ で張られる空間の元であるものが存在したとすると、

$$m^* = f^* + \overline{g}^* \qquad f \in H^p(R),\ g \in H_0^p(R)$$

ただし $*$ は境界値を示す。ダブル $\hat{R}$ を作る際の間接的等角写像を考えれば、$\overline{g}^*$ は、$\hat{R}-\overline{R}$ での H^p 函数で、$\hat{a}_0$ で 0 になるものの境界値であることがわかる。それを $\hat{g}$ とおく。すると、$f^* = m^* - \hat{g}^*$ で、明らかに $m^* - \hat{g}^*$ は $\hat{R}-\overline{R}$ のある compact set の外で H^p-class であるから、

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \overline{R} \\ m(z) - \hat{g}(z) & z \in \hat{R}-\overline{R} \end{cases}$$

とおいたものは $\hat{R}$ での有理型函数 (cf. [5] LEMMA 7)、しかも $M_{\hat{k}}(\hat{\delta})$ の元である。よって(19)から、$F \equiv 0$. よって $m \equiv \hat{g}$ 再び(19)より、$m \equiv 0$、即ち、直和性が示された。

(16)の表現についても、上に示した直和性と必要性の論法に

よって、容易に示される。

projection の有界性については、$\forall v \in N$ を

(21) $$v = f' + \overline{g'} + m \qquad f' \in H^p(R),\ g' \in H^p_0(R),\ m \in M_R(\hat{\delta})$$

と分解したとき、v に無関係な $K > 0$ があって、

(22) $$\|f'\|_p,\ \|g'\|_p,\ \|m\|_p \leqq K\|v\|_p$$

である。実際、$v \longmapsto f'$, $v \longmapsto g'$, $v \longmapsto m$ は、有限次元ノルム空間上の線型写像だから、有界である。すると $u \in L^p(\partial R)$ が定理1の分解で、$u = f + \overline{g} + v$ のとき、

$$u = (f + f') + \overline{(g + g')} + m$$

と分解される。さらに、(22)と定理1より、

$$\|f + f'\|_p \leqq \|f\|_p + \|f'\|_p \leqq C_p'\Big(1 + \pi\tilde{M}\sum_1^{2g+n-1}\|v_j\|_p\Big)\|u\|_p + K\|v\|_p$$
$$\leqq \Big\{C_p'\Big(1 + \pi\tilde{M}\sum_1^{2g+n-1}\|v_j\|_p\Big) + K\cdot 2\pi\tilde{M}\sum_1^{2g+n-1}\|v_j\|_p\Big\}\|u\|_p$$

$\|g + g'\|_p$ も同様、

$$\|m\|_p \leqq K\|v\|_p \leqq \Big(2\pi K\tilde{M}\sum_1^{2g+n-1}\|v_j\|_p\Big)\|u\|_p$$

よって、projection の有界性も示された。 (証終)

<u>系 2-1 ([1], [2])</u> $b \in R$ を $\hat{R}$ における non-Weierstraß 点とする。$\hat{b}$ をその鏡像とし、$\hat{g} = 2g + n - 1$ とおく。

(23) $$L^p(\partial R) = H^p_0(R) \oplus \overline{H^p_0(R)} \oplus M_{\hat{R}}(b^{-\hat{g}}\hat{b}^{-\hat{g}})|_{\partial R}$$

証明 定理2の(18)、(19)を $M_{\hat{R}}(b^{-\hat{g}}\hat{b}^{-\hat{g}})$ について験証すればよいが、それは古典的な Riemann-Roch の定理から、容易である。

系 2-2 ([1],[2],[3]) $\delta g_{a_0} = dg_{a_0} + i * dg_{a_0}$ の $\hat{R}$ での因子を δ とすると、

(24) $$L^p(\partial R) = H^p(R) \oplus H_0^p(R) \oplus M_{\hat{R}}(\delta^{-1})|_{\partial R}$$

証 明 (18)は Riemann-Roch の定理から容易に分かる。(19)は $L^2(\partial R)$ の直交分解([2])(Read の定理から示される)

$$L^2(\partial R) = H^2(R) \dotplus H^2(R\,;\delta g_{a_0})$$

ここで、$H^2(R, \delta g_{a_0}) = \{f\,;\,R$ で有理型で、∂R の近傍で H^2, $f\delta g_{a_0}$ が R で正則$\}$ である，を用いればよい。 (証終)

ここで注意として、定理1と定理2の関連性について述べておく。すなわち、N の基底(それは(5)を満たすだけでよい)の取り方の任意性の範囲内に $M_{\hat{R}}(\delta\hat{\delta})|_{\partial R}$ が入ってしまう、そしてその意味で $N = M_{\hat{R}}(\delta\hat{\delta})|_{\partial R}$ ということである。実際それを示すのには、$M_{\hat{R}}(\delta\hat{\delta})|_{\partial R}$ のある基底 $m_1, \cdots, m_{2g+n-1}$ に対して、$h_j\ (j=1, \cdots, 2g+n-1)$ を $h_j|_{\partial R} = m_j$ なる、R の調和函数とする。それらの γ_k-周期 $\int_{\gamma_k} *dh_j = a_{kj}$ によってできる行列 (a_{kj}) が正則であればよい。$b_j = (a_{1j}, \cdots, a_{2g+n-1,j})$ とおくと、ベクトル $b_j\ (j=1, \cdots, 2g+n-1)$ が一次独立であればよい。もし $\sum_1^{2g+n-1} \alpha_j b_j = 0$ ($\alpha_j \in \mathbb{C}$) なら、$\sum_1^{2g+n-1} \alpha_j h_j \in H^p(R) \oplus \overline{H_0^p(R)}$、直和性から $\sum_1^{2g+n-1} \alpha_j h_j|_{\partial R} = \sum_1^{2g+n-1} \alpha_j m_j = 0$、$\{m_j\}$ の一次独立性から、$\forall \alpha_j = 0$。したがって (a_{kj}) が正則となり、求める結論が得られた。

さて、定理2の結果を利用して、∂R上のCauchy積分について考察する。ただし、ここで言うCauchy積分は、$f \in L^p(\partial R)$ $(1<p<\infty)$に対して、ϕ_{pp_0} $(p \in R, p_0 \in \hat{R} \setminus \bar{R})$を$\hat{R}$の第三種微分で、$p$で$+1$、$p_0$で$-1$の留数を持つものとしたとき、

$$\int_{\partial R} f \phi_{pp_0}$$

のことである。

<u>補　題　5</u>　　Wを種数gの閉Riemann面とし、p_0をW上の固定点、$\{p_{1,n}\}, \{p_{2,n}\}$をW上の点列で、$p_{1,n} \neq p_{2,n}$, $p_{i,n} \to p_0$ $i=1,2$ととる。このような点列に対し、以下の条件を満たすW上の第2種又は第3種Abel微分φ_nを与える。

(i) φ_nは$p_{1,n}, p_{2,n}$以外では正則

(ii) $\alpha_j(n) = \int_{A_j} \varphi_n$ $(j=1,\cdots,g)$とおいたとき、

$\exists \alpha_j$ s.t. $\alpha_j(n) \longrightarrow \alpha_j$ $(n \to \infty)$

(iii) φ_nの$p_{1,n}, p_{2,n}$の特異性の極限値が存在して、その和が0である。i.e. $p_{1,n}, p_{2,n} \longrightarrow p_0$だから、$\varphi_n$は$p_0$の局所円板$V_0$内に極を持つとしてよい。$V_0$の局所変数$\zeta$に関して、$p_{i,n}$の座標を$b_{i,n}$ $(i=1,2)$としたとき、φ_nの主要部は

$$(25)\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{l_1(n)} C_{1,n}^{(k)} (\zeta - b_{1,n})^{-k} \, d\zeta \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{l_2(n)} C_{2,n}^{(k)} (\zeta - b_{2,n})^{-k} \, d\zeta \end{cases}$$

の形になるが、その時、十分大なるnについて、$l_1(n) = l_2(n)$

であり、$\lim_{n\to\infty} C_{i,n}^{(k)}$ $(i=1,2)$ が任意の k $(1\leq k\leq l_i(n))$ に対して存在し、$\lim_{n\to\infty} C_{1,n}^{(k)} = -\lim_{n\to\infty} C_{2,n}^{(k)}$ である。

そのとき、P_0、$P_{j,n}$ $(j=1,2)$ と異なる W 上の任意の Q_0 での φ_n の展開

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k dz \qquad z; Q_0 \text{の局所変数}$$

を考えると、

$$a_k^{(n)} \longrightarrow a_k \quad (n\to\infty ; k=0,1,2,\cdots\ )$$

ここに、a_k は $\int_{A_j}\omega = \alpha_j$ $(j=1,\cdots,g)$ なる W 上の第1種Abel微分 ω の Q_0 での展開

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k dz$$

による Taylor 級数

特に、$P_{1,n}, P_{2,n}$ についての W 上の第三種正規微分 $\phi^*_{P_{1,n},P_{2,n}}$ に関して、$a_k^{(n)} \longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$.

証明 φ_n の代わりに、$\varphi_n-\omega$ を考えることにより、$\alpha_j=0$ $a_k=0$ として、補題を示せば十分である。

ψ_{Q_0} を Q_0 での オ $(k+2)$ 位の pole を持ち、そこでの主要部が、$z^{-(k+2)}dz$ であり、かつ A-周期が0になる第二種Abel微分とする。いま、$\Psi_{Q_0}(p)=\int^p\psi_{Q_0}$ とおくと、周期関係式より、

$$2\pi i\sum_W \mathrm{Res}\, \Psi_{Q_0}\varphi_n = \sum_{j=1}^{g}\int_{A_j}\psi_{Q_0}\int_{B_j}\varphi_n - \int_{B_j}\psi_{Q_0}\int_{A_j}\varphi_n$$
$$= -\sum_{j=1}^{g}\alpha_j(n)\int_{B_j}\psi_{Q_0}$$

一方、Φ_{a_0} は a_0 での $-(k+1)$ 位の極をもつ。また、$P_{1,n}$, $P_{2,n}$ での展開を、

$$(26)\begin{cases}\Phi_{a_0}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{1,n}^{(k)}(\zeta - b_{1,n})^k \\ \Phi_{a_0}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2,n}^{(k)}(\zeta - b_{2,n})^k\end{cases}$$

とすると、(25), (26) より、

$$(27)\quad 2\pi i \sum_{W} \mathrm{Res}\, \Phi_{a_0}\varphi_n = 2\pi i \Big\{ a_k^{(n)} + \sum_{k=1}^{l_1(n)} C_{1,n}^{(k)}\beta_{1,n}^{(k-1)} + \sum_{k=1}^{l_2(n)} C_{2,n}^{(k)}\beta_{2,n}^{(k-1)} \Big\} = -\sum_{j=1}^{g}\alpha_j(n)\int_{B_j}\varphi_{a_0}$$

仮定より、$\lim_{n\to\infty} C_{1,n}^{(k)} + \lim_{n\to\infty} C_{2,n}^{(k)} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_j(n) = 0$

また、Φ_{a_0} は P_0 で正則だから、$\lim_{n\to\infty} \beta_{1,n}^{(k-1)} = \lim_{n\to\infty} \beta_{2,n}^{(k-1)}$

したがって(27)の両辺の極限から、$\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 0$ (証終)

さて、compact bordered Riemann 面 R に対し、$a_0 \in \hat{R}\setminus\overline{R}$ を固定する。ϕ_{P,a_0} を P で $+1$, a_0 で -1 の留数をもつ $\hat{R}$ 上の第三種 Abel 微分で、$\int_{A_j}\phi_{P,a_0} = \alpha_j$ と固定する。

<u>定 理 3</u> $\forall f \in L^p(\partial R)$ $(1<p)$ の、ϕ_{P,a_0} による Cauchy 積分 $\Phi(P) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f\phi_{P,a_0}$ $(P \notin \partial R)$ に対して、P を R から ∂R へ non-tangential に近づけたときの limit Φ^+, P を $\hat{R}\setminus\overline{R}$ から ∂R へ non-tangential に近づけたときの limit Φ^- がともに ∂R 上 a.e. に存在して、$\Phi^+, \Phi^- \in L^p(\partial R)$ で、

$$(28)\qquad \Phi^+ - \Phi^- = f$$

が成り立つ。

証明　$f \in L^p(\partial R)$ は定理2またはその系によって、

$$f = f_1 + \overline{f_2} + v \qquad \text{とかける。}$$

ここで、f_2 は，φ を $\hat{R} \to \hat{R}$ anti-conformal とすると，$\varphi(a_0)$ で 0 になる $H^p(R)$ の元である。そして v は、ある特異性を持った $\hat{R}$ 上の有理型函数である。$p \in R$ のとき、

(29)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f\,\phi_{p,a_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}(f_1 + \overline{f_2} + v)\,\phi_{p,a_0}$$
$$= f_1(p) + \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial R}\overline{f_2}\,\phi_{p,a_0} + \int_{\partial R} v\,\phi_{p,a_0}\right)$$

ここで、$F_2 = \overline{f_2 \circ \varphi}$ とおくと、F_2 は a_0 で 0 になる $H^p(\hat{R} \backslash \overline{R})$ の元で、∂R でのその境界値は $\overline{f_2}$ に等しい。したがって

(30)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\overline{f_2}\,\phi_{p,a_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} F_2\,\phi_{p,a_0} = F_2(a_0) = 0$$

一方 v の R 内での極を $s_1, \cdots, s_k$，その位数を $n(1), \cdots, n(k)$ として、s_j の近傍で（局所変数を z_j とする）

$$v(z_j) = \sum_{l=1}^{n(j)} d_{l,j}\, z_j^{-l} + \sum_{l=0}^{\infty} d_{l,j}^{+}\, z_j^{l}$$

また、ϕ_{p,a_0} は s_j の近傍で、

$$\phi_{p,a_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{l,j}(p)\, z_j^{l}\, dz_j \qquad \text{とすると、}$$

(31)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} v\,\phi_{p,a_0} = \sum_{R} \operatorname{Res} v\,\phi_{p,a_0}$$
$$= v(p) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n(j)} d_{l,j}\,\alpha_{l-1,j}(p)$$

ところが、補題5より $\alpha_{l-1,j}(p)$ は ∂R の近傍で連続。(29), (30) (31) より、Φ^{+} が存在して $L^p(\partial R)$ の元である。Φ^{-} についても、

(32)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f\,\phi_{q,a_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}(f_1 + \overline{f_2} + v)\,\phi_{q,a_0}$$

容易に、

(33) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f_1\phi_{q,a_0}=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\overline{F_2}\,\phi_{q,a_0}=-F_2(q)$$

が分かる。$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\mathfrak{v}\,\phi_{q,a_0}$ に関しては前段と同様の議論を行なえばよい。したがって Φ^- が存在して $L^p(\partial R)$ の元。

(28)については、(29), (30), (32), (33) より

$$\Phi(p)-\Phi(q)=f_1(p)+F_2(q)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\mathfrak{v}\,\phi^*_{p,q}$$

前の2項は p, q を non-tangentially に ∂R へ近づけた時、a.e. に極限値 $f_1+\overline{F_2}$ をもつ。

第3項については、$\phi^*_{p,q}$ の極でない点における Taylor 係数が0に近づく（p, q が ∂R 上の同じ点に近づく）ことと、(31)のような議論を行えば、$p, q \longrightarrow b\in\partial R$ のとき、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\mathfrak{v}\,\phi^*_{p,q}\longrightarrow \mathfrak{v}(b)$$

よって(28)が示された。（証終）

注意 1) $R=\{|z|<1\}$ のとき、$a_0=\infty$ と考えて、通常の Cauchy 積分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-a}dz$ に対して、定理の結果が成り立つ。

2) 定理の証明から分かるように、p, q の収束が non-tangential でなければならないのは、f の分解で $f_1, \overline{F_2}$ が現われるからである。一方、もし f が、連続で、しかも、f に対して(4)のようにして作った調和函数の共役調和函数が、局所的に ∂R まで連続になるならば（例えば、R で正則で、$\overline{R}$ で連続な

函数の実部の境界値や、$\hat{R}$上の有理型函数の境界値など)、(6)より、定理1(7)のH^p-part, $\overline{H_0^p}$-partも∂Rまで連続にのびる。一方、系2-2の後の注意より、それは定理2、またはその系における分解のH^p-part, $\overline{H_0^p}$-partも∂Rまで連続にのびることを意味する。したがって、そのような境界値$f \in L^p(\partial R)$ $(1<p)$については、non-tangentialの条件は不要になる。

参考文献

[1] Earle, C. and Marden, A., On Poincaré series with applications to H^p spaces on bordered Riemann surfaces. Illinois J. Math. 13 (1969), 202-219.

[2] Heins, M. Symmetric Riemann surfaces and boundary problems. Proc. London. Math. Soc. 14a (1965) 129 − 143.

[3] Heins, M. Hardy classes on Riemann surfaces. Lecture notes in Math. 98. Springer. (1969)

[4] Rodin, B. and Sario, L. Principal functions. Van Nostrand (1966).

[5] Royden, H. L. Boundary values of analytic and harmonic functions. Math. Z. 78 (1962), 1 − 24.

[5] Rudin, W. Analytic functions of class H^p.
Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 46–66