

開放系の作用素代数による一考察

東京理科大学 大矢雅則

平衡状態にある有限系が、平衡状態にある無限系（熱浴）に結合してゐる場合、その系が平衡へ近接するための条件を、系の Hamiltonian の スハートンとの関連の下で、 C^* -代数の方法によつて調べてみる。

有限力学系 S は、三つ組 $(\mathcal{A}^S, \mathcal{G}^S, \alpha_t^S)$ ($t \in \mathbb{R}$) で与えられ、無限熱浴 R は、三つ組 $(\mathcal{A}^R, \mathcal{G}^R, \alpha_t^R)$ で与えられているとする。ここで、 \mathcal{A}^S は可分の Hilbert Space \mathcal{H}^S 上の有界線形作用素の全体であり ($B(\mathcal{H}^S)$ と表す)、 \mathcal{A}^R は無限自由度をもつ熱浴 R を記述する恒算元 I^R をもつ、 C^* -代数である。又、 $\mathcal{G}^S, \mathcal{G}^R$ をそれぞれ、 C^* -代数 $\mathcal{A}^S, \mathcal{A}^R$ 上の状態 (states) の集合とする。 α_t^S, α_t^R は系 S 及び R の時間発展を記述する、 $\mathcal{A}^S, \mathcal{A}^R$ の $*$ -自己同型群である。特に、 α_t^S は系 S の Hamiltonian H^S によつて生成される。

$$\alpha_t^S(A) = e^{itH^S} A e^{-itH^S} \quad (\forall A \in \mathcal{A}^S)$$

ここで、カギ系 \mathcal{A} を \mathbb{C} 上の \ast -組 $(\mathcal{A}, \mathbb{C}, \alpha_t)$ に関して、簡単に復習しておこう。

\mathcal{A} が \mathbb{C}^* -代数であるとは、

(i) \mathcal{A} は代数である。

(ii) \mathcal{A} から \mathcal{A} の上への写像 $A \in \mathcal{A} \mapsto A^* \in \mathcal{A}$ が定義され、 $(A^*)^* = A$ (b) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$

(c) $(AB)^* = B^* A^*$ が満たされる。(ここで λ は複素数 λ の共役数を表し、 A, B は \mathcal{A} の任意の元である。)

(iii) \mathcal{A} 上には norm $\|\cdot\|$ が定義され、その norm に伴って \mathcal{A} は完備である。

(iv) 任意の \mathcal{A} の元 A, B に対して、 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

及び $\|A^* A\| = \|A\|^2$ が成立。

を満すものをいう。

$\varphi \in \mathbb{C}$ が \mathcal{A} 上の状態であるとは、

(i) φ は \mathcal{A} から \mathbb{C} 上への線形汎函数

(ii) $\varphi(A^* A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

(iii) $\varphi(I) = 1$ (\mathcal{A} は恒等元 I を含むとしてある)

を満すものをいう。

特に、 $\varphi(A^* A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ であるとき、状態 φ は忠実 (faithful) であるという。

最後に、 α_t ($t \in \mathbb{R}$) が \mathcal{A} の $*$ -自己同型群であるとは、

$$(i) \quad \alpha_t(AB) = \alpha_t(A)\alpha_t(B) \in \mathcal{A} \quad \forall A, B \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad \{\alpha_t \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ は群である。}$$

$$(iii) \quad \alpha_t(A)^* = \alpha_t(A^*)$$

を満すものという。

更に、 α_t が t に関して、強連続であるとは、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\alpha_t(A) - A\| = 0$$

のことであり、これを α_t の性質を以下仮定しよう。

ここで、熱浴 R の平衡状態として、Kubo-Martin-Schwinger 条件を採用しよう。

忠実な状態 $\varphi^R \in \mathcal{O}^R$ が、温度の逆数 $\beta (= 1/kT)$ で、時間発展 α_t^R に関して、K.M.S. 条件を満すとは、 \mathcal{A} の任意の要素 A, B に対して、開区間 $-\beta < \text{Im} z < 0$ で解析的、閉区間 $-\beta \leq \text{Im} z \leq 0$ で連続な複素数 z の有界関数 $F_{A,B}(z)$ が存在して、次の境界条件を満すことをいう。

$$F_{A,B}(t) = \varphi(\alpha_t(A)B),$$

$$F_{A,B}(t-i\beta) = \varphi(B\alpha_t(A)).$$

K.M.S. 条件を満す状態を、K.M.S. 状態とよび、これは Gibbs 状態の一般化であり、現在、物理系の平衡状態を記述していく上で最も自然なものと考えられている。

この状態 φ^R に対し $Gelfand-Naimark-Segal$ (G.N.S.) 構成定理により、四つ組 $(\mathcal{H}^R, \pi^R, \Xi^R, U_t^R)$ がユニタリ同値性を除いて一意に決定される。ここで \mathcal{H}^R は φ^R により構成された Hilbert space であり、 π^R は \mathcal{A}^R から $B(\mathcal{H}^R)$ への表現であり、 Ξ^R は \mathcal{H}^R の元で、 $\varphi^R(A) = \langle \Xi^R, \pi^R(A) \Xi^R \rangle$ 、 $\pi^R(\mathcal{A}^R)^- = \mathcal{H}^R$ を満たすものである。又、 U_t^R はユニタリ単位群で、 $\pi^R(\alpha_t^R(A)) \Xi^R = U_t^R \pi^R(A) U_t^{R*} \Xi^R = U_t^R \pi^R(A) \Xi^R$ となる。Stone の定理によつて、自己共役作用素 H^R が存在して、 $U_t^R = \exp(itH^R)$ と表わせる。

今、系 S の任意の状態 $\phi^S \in \mathcal{G}^S$ を考え、 ϕ^S が α_t^S の下で不変でない (i.e., $\phi^S(\alpha_t^S(A)) \neq \phi^S(A)$ for $\exists A \in \mathcal{A}^S$) 場合は、Schrödinger 方程式の解同変性に対する不変性と、系 S の有限性より、 $\phi^S(\alpha_t^S(A))$ ($\forall A \in \mathcal{A}^S$) は t に関して、ほとんど周期的な関数である。従つて、 $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \phi^S(\alpha_t^S(A))$ ($\forall A \in \mathcal{A}^S$) は存在しない。そこで、平衡への近接を議論するためには、熱浴からの影響を考慮しなくてはならなくなる。

S と R の初期 (non-interacting) の結合系は、次のように表わすことができる。

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^S \otimes \mathcal{A}^R$$

$$\phi = \phi^S \otimes \phi^R \quad (\forall \phi^S \in \mathcal{G}^S)$$

$$\alpha_t^0 = \alpha_t^S \otimes \alpha_t^R \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$$\pi = i^S \otimes \pi^R \quad (i^S \text{ は } \mathcal{A}^S \text{ 上の恒等写像})$$

S と R との間の相互作用を $V = V^* \in \mathcal{A}$ で与えたと.

いわゆる摂動の下に、時間発展 α_t は一様収束する Dyson series で与えられる。 $t \geq 0$ のとき,

$$\alpha_t(A) = \sum_{n \geq 0} \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t} dt_1 \dots dt_n [\alpha_{t_1}^0(V), [\dots, [\alpha_{t_n}^0(V), \alpha_t^0(A)] \dots]]$$

$t < 0$ の場合は、上の積分領域で、 0 と t を交換すればよい。

$\lambda = 2$ の問題は (i) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \phi(\alpha_t(A)) \equiv \psi(A)$ が存在し、 ψ が平衡状態となる条件を求めるときと、
(ii) ψ を \mathcal{A}^S 上に制限したとき、 λ が R と同じ温度 T かつ S の Hamiltonian H^S より作られる Gibbs state となる条件を求めるときである。

主たる結果は.

(R-1): Hamiltonian $H = H^S + H^R + \pi(V)$ のスペクトルが

非縮退正固有値 $\{0\}$ と絶対連続なスペクトルから

成り立つとき、極限 $\psi(A) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \phi(\alpha_t(A))$ が存在

し、 ψ は熱浴 R の β で、 α_t に関して K.M.S. 条件を満たす。

(R-2) : (R-1) と同じ条件の下で

$$\lim_{\|V\| \rightarrow 0} \lim_{\|t\| \rightarrow \infty} \phi(\alpha_t(A)) = \phi^S(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}^S$$

$$\Rightarrow \tau. \quad \phi^S(A) = \tau e^{-\beta H^S} A / \tau e^{-\beta H^S} \quad \tau \text{ あり}。$$

以上の結果は、拙論 "On Open System Dynamics
— An Operator Algebraic Study —" (to be published)
において得られたものである。