

非線形系における外部雑音誘起型
相転移の動的側面

東工大・理, 椎野正寿

平衡系における熱ゆらぎの果す役割は、これまで大いに調べられ、特に動的臨界現象の理論においては、マクロ変数の従う Langevin 方程式が多くの場合につき、相転移に伴う各種の臨界異常をきわめて見事に説明することができている¹⁾ことから、ゆらぎの概念が重要視されるようになり、確率過程論が物理現象の理解に欠かすことができないものとなってきた。最近、化学反応系等のような非平衡非線形系において、ある種の分岐パラメータによ、て制御される分岐現象の安定・不安定性について調べることに関心を集めているがなかでも、通常外から制御可能な分岐パラメータにゆらぎが存在する場合には、その外部ゆらぎに伴、て新しい型の転移が起きることが知られ話題をよんでいる^{2,3)}これは生態学や化学反応における系で、環境ゆらぎが存在する場合に相当するものじあると考えると理解しやすい。

ここで先ず次のようなモデル的化学反応系をとりあげてみる。²⁾



Xの濃度 $[X] = x$ は

$$\dot{x} = \tilde{\lambda}x - x^2 \quad (2)$$

$$\tilde{\lambda} \equiv a - b$$

をみたす。但し a, b は $[A], [B]$ に比例した量であり、適当にスケールしてあるものとする。 $\tilde{\lambda}$ は分岐パラメータとなっていて、 $\tilde{\lambda}$ が負から正の値に変化する時、安定な定常解は $x=0$ から $x = \tilde{\lambda} > 0$ に移行する。reservoir a, b がゆらぐ場合には、 $\tilde{\lambda}$ にゆらぎがあることになり $\tilde{\lambda}$ を確率変数と考えねばならない。最も簡単な場合として $\tilde{\lambda}$ が

$$\left. \begin{aligned} \langle \tilde{\lambda} \rangle &= \lambda > 0 \\ \langle (\tilde{\lambda} - \lambda)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} &= \sigma \\ \tilde{\lambda} - \lambda &; \text{白色雑音} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

の性質をもっているとした時には、(2)式を次のような確率微分方程式と考えとりあつかわなければならないことになる。

$$dx = (\lambda x - x^2) dt + \sigma x \circ dB \quad (4)$$

但し、Wong, Zakaiの定理⁴⁾を用いて上式は Stratonovic型であるとしておく。(4)式は Ito型に変換されて

$$dx = \left\{ (\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2)x - x^2 \right\} dt + \sigma x dB \quad (5)$$

と表わされる。従って確率密度関数 $F(x, t)$ のみならず

Fokker-Planck 方程式は

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - (\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2)x)F + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 F) \quad (6)$$

となり、定常分布は (6) 式の左辺を 0 とおいて

$$F_{st}(x) = \frac{\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}}}{\Gamma\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2}\right)} x^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{2x}{\sigma^2}\right) \quad (7)$$

と得られることになる。 $F_{st}(x)$ は $\lambda > \frac{\sigma^2}{2}$, $\lambda < \frac{\sigma^2}{2}$ に
対応して、図 1 のように *most probable value* が定
性的に異なる分布となっており、環境ゆらぎの増加に伴い、
 $\lambda = \frac{\sigma^2}{2}$ を境にして新しい型の転移がおきているものと考
えられるのである。この転移を外部雑音誘起型相転移と呼
んでおくことにする。(7) 式より

$$x_M = \lambda - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (\lambda > \frac{1}{2}\sigma^2)$$

$$\langle x \rangle = \lambda$$

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{2}\lambda\sigma^2$$

(8)

が得られる。

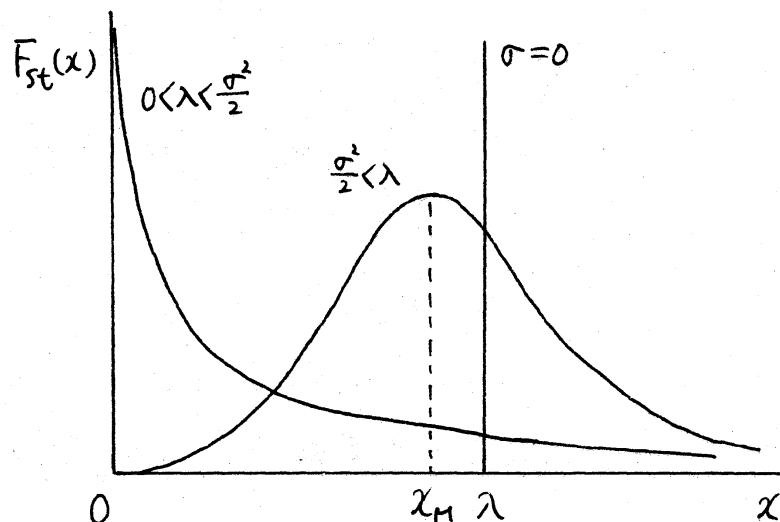


図 1. 定常分布 $F_{st}(x)$ と σ^2 の関係。

上に述べたような型の転移を示す系の動的な性質を調べることは、非常に興味深いものであるが、系が本質的に非線形であり、ため相関関数やパワー・スペクトル等を求めることは困難をきわめ、実際にそのような計算が行なわれた例はないようである。ここでは外部雑音の大きさを表わすパラメータの展開パラメータにとって $\sigma \ll \lambda$ についての時間相関関数を σ^2 のオーダーまでの近似で求めてみることにする。この方法はシステム・サイズ展開⁵⁾と本質的に同じものであると見受けられる。 $\frac{1}{2}\sigma^2 \ll \lambda$ であるとして先ず(6)式に対して、変数変換

$$\begin{aligned} x &= X(t) + \sigma \xi \\ F(x, t) &\longrightarrow P(\xi, t) \end{aligned} \quad (9)$$

を行えば $P(\xi, t)$ の従う方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial \xi} \sigma^{-1} \dot{X}(t) + \sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (X + \sigma \xi)^2 - (\lambda + \frac{\sigma^2}{2})(X + \sigma \xi) \right\} P \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (X + \sigma \xi)^2 P \end{aligned} \quad (10)$$

となる。 σ^{-1} の項は

$$\dot{X}(t) + X(t)^2 - \lambda X(t) = 0 \quad (11)$$

とすることにより消去できる。(11)式は外部雑音のない時の決定論的方程式となっている。 $X(t)$ として

$$\dot{X}(t) = 0 \quad (12)$$

と置いて得られる安定な解

$$X = \lambda \quad (13)$$

を選ぶと (10) 式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \xi - \frac{\sigma^2}{2} \xi - \frac{\sigma}{2} \lambda + \sigma \xi^2 \right) P \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\lambda^2 + 2\sigma \lambda \xi + \sigma^2 \xi^2 \right) P \end{aligned} \quad (14)$$

となる。 ξ のモーメント

$$\langle \xi^n \rangle = \int \xi^n P(\xi, t) d\xi \quad (15)$$

の従う方程式は (14) 式を用いて部分積分を行うことにより、次のように求まる。ただし ξ の定義域は $x > 0$ に対応して (9) 式より決まる領域であるとし、その両端で P のとる値は任意の t に対し 0 になっているとする。

$$\frac{d\langle \xi \rangle}{dt} = -\left(\lambda \langle \xi \rangle - \frac{\sigma^2}{2} \langle \xi \rangle - \frac{\sigma}{2} \lambda + \sigma \langle \xi^2 \rangle \right)$$

$$\frac{d\langle \xi^2 \rangle}{dt} = -\left(2\lambda \langle \xi^2 \rangle - 2\sigma^2 \langle \xi^2 \rangle - 3\sigma \langle \xi \rangle \lambda + 2\sigma \langle \xi^3 \rangle - \lambda^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi^3 \rangle}{dt} = & -3\lambda \langle \xi^3 \rangle + \frac{9}{2} \sigma^2 \langle \xi^3 \rangle + \frac{15}{2} \sigma \lambda \langle \xi^2 \rangle \\ & + 3\lambda^2 \langle \xi \rangle - 3\sigma \langle \xi^4 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi^4 \rangle}{dt} = & -4\lambda \langle \xi^4 \rangle + 8\sigma^2 \langle \xi^4 \rangle + 14\sigma \lambda \langle \xi^3 \rangle \\ & + 6\lambda^2 \langle \xi^2 \rangle - 4\sigma \langle \xi^5 \rangle \end{aligned}$$

.....

(16)

時間相関関数 $\langle \xi(t) \xi(0) \rangle_{eq}$ は

$$\langle \xi(t) \xi(0) \rangle_{eq} = \langle \xi_0 \langle \xi \rangle_t \rangle_{eq} \quad (17)$$

の関係を利用して求めることが出来る。但し $\langle \xi \rangle_t$ は、

$t=0$ のとき $\xi = \xi_0$ の下での、時刻 t における条件付平均値である。(16)式より

$$\langle \xi \rangle_t = e^{-\lambda t} \xi_0 + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \left(\frac{\sigma^2}{2} \langle \xi \rangle_s + \frac{\sigma}{2} \lambda - \sigma \langle \xi^2 \rangle_s \right) ds \quad (18)$$

と積分形であらわせるので相関関数は

$$\begin{aligned} \langle \xi_0 \langle \xi \rangle_t \rangle_{eq} &= e^{-\lambda t} \langle \xi_0^2 \rangle_{eq} \\ &+ e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \left(\frac{\sigma^2}{2} \langle \langle \xi \rangle_s \xi_0 \rangle_{eq} + \frac{\sigma}{2} \lambda \langle \xi_0 \rangle_{eq} - \sigma \langle \langle \xi^2 \rangle_s \xi_0 \rangle_{eq} \right) ds \end{aligned} \quad (19)$$

と書きあらわせる。これを σ^2 までの近似で、以下において求めようとする。従って、(19)式の形から積分記号の中は

$$\langle \langle \xi \rangle_s \xi_0 \rangle_{eq} \doteq e^{-\lambda s} \langle \xi_0^2 \rangle_{eq} \quad (20)$$

と近似し、 $\langle \xi^2 \rangle_t$ については σ^1 までとせばよいことがわかる。

$$\begin{aligned} \langle \xi^2 \rangle_t &= e^{-2\lambda t} \xi_0^2 + e^{-2\lambda t} \int_0^t e^{2\lambda s} \left(2\sigma^2 \langle \xi \rangle_s + 3\sigma\lambda \langle \xi \rangle_s \right. \\ &\quad \left. - 2\sigma \langle \xi^3 \rangle_s + \lambda^2 \right) ds \\ &\doteq e^{-2\lambda t} \xi_0^2 + e^{-2\lambda t} \int_0^t e^{2\lambda s} \left(\lambda^2 + 3\sigma\lambda e^{-\lambda s} \xi_0 - 2\sigma \langle \xi^3 \rangle_s \right) ds \end{aligned} \quad (21)$$

ここで $\langle \xi^3 \rangle_s$ については σ^0 まででよいので

$$\begin{aligned}\langle \xi^3 \rangle_t &= e^{-3\lambda t} \xi_0^3 + e^{-3\lambda t} \int_0^t e^{3\lambda s} 3\lambda^2 \langle \xi \rangle_s ds \\ &= e^{-3\lambda t} \xi_0^3 + \frac{3}{2} \lambda \xi_0 (e^{-\lambda t} - e^{-3\lambda t})\end{aligned}\quad (22)$$

とあいて

$$\begin{aligned}\langle \langle \xi^2 \rangle_s \xi_0 \rangle_{eq} &= e^{-2\lambda s} \langle \xi_0^2 \rangle_{eq} + \frac{\lambda}{2} (1 - e^{-2\lambda s}) \langle \xi_0 \rangle_{eq} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} (2\sigma \langle \xi_0^4 \rangle - 3\sigma \lambda \langle \xi_0^2 \rangle) (e^{-3\lambda s} - e^{-2\lambda s})\end{aligned}\quad (23)$$

と得られる。 $\langle \xi_0^m \rangle_{eq}$ は一般に (16) 式にあいて

$$\frac{d\langle \xi^m \rangle}{dt} = 0\quad (24)$$

とあいてにより

$$\begin{aligned}\langle \xi_0 \rangle_{eq} &= a_0 + a_1 \sigma + a_2 \sigma^2 + \dots \\ \langle \xi_0^2 \rangle_{eq} &= b_0 + b_1 \sigma + b_2 \sigma^2 + \dots \\ \langle \xi_0^3 \rangle_{eq} &= c_0 + c_1 \sigma + c_2 \sigma^2 + \dots \\ \langle \xi_0^4 \rangle_{eq} &= d_0 + d_1 \sigma + d_2 \sigma^2 + \dots\end{aligned}\quad (25)$$

の形で順次求めることができる。

$$\begin{aligned}a_0 = a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 = b_2 = 0 \\ b_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = 2\lambda, \quad d_0 = \frac{3}{4} \lambda^2, \dots\end{aligned}\quad (26)$$

等と得られるので、 ξ についての相関関数は (19), (20), (23), (26) 式より σ^2 までの近似で

$$\langle \xi(t) \xi(0) \rangle_{eq} = \frac{1}{2} e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \frac{\lambda}{4} \sigma^2 t + \frac{\sigma^2}{2} (e^{-2\lambda t} - e^{-\lambda t})\quad (27)$$

となる。

t が十分小の short time approximation では (27) 式は

$$\langle \xi(t) \xi(0) \rangle_{eq} \doteq \frac{\lambda}{2} e^{-(\lambda + \frac{\sigma^2}{2})t} \quad (28)$$

と近似されるが、特に注目すべきことはあきない。しかし long time approximation を行くと興味ある結果が導かれる。今

$$\langle \xi(t) \xi(0) \rangle_{eq} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} G(t) \quad (29)$$

と置いて $\sigma^2 t$ を一定に保ち $t \rightarrow \infty$, $\sigma^2 \rightarrow 0$ とすると

$$G(t) \longrightarrow 1 + \frac{1}{2} \sigma^2 t \quad (30)$$

となるので相関関数の long time tail は十分小な σ^2 に対し

$$\langle \xi(t) \xi(0) \rangle_{eq} \sim \frac{\lambda}{2} e^{(-\lambda + \frac{\sigma^2}{2})t} \quad (31)$$

と近似できるであろう。これより緩和時間は、 σ の増大に伴

$$\frac{1}{\lambda - \frac{\sigma^2}{2}} \quad (\sigma^2 \ll 1) \quad (32)$$

の型の変化をすることがわかる。(8)式で表わされる most probable value の変化に伴うこの緩和時間の異常は、最近の A. Schenzle et al.⁶⁾ による固有値を求める方法で得られた結果と一致して興味深い。彼等は (4) 式における非線形部分を一般化した

$$dx = (\lambda x - x^n) dt + \sigma x \circ dB \quad (33)$$

に対応した Fokker - Planck 演算子の固有値を求めてい

るが、それによつて離散固有値の最小のもの γ_1 は

$$\gamma_1 = (n-1)\lambda - \frac{1}{2}(n-1)^2\sigma^2 \quad (34)$$

と与えられている。 $n=2$ とすると $\frac{1}{\gamma_1}$ は (32) 式に一致しているのがわかる。 さらに、(34) 式で表わされる一般の結果はこれまで述べてきた展開の方法で同様に求めることができるのである。 詳細は省略するが、この場合には (27) 式の代わりに

$$\begin{aligned} R(t) &\equiv \langle (\xi(t) - \langle \xi \rangle)(\xi(0) - \langle \xi \rangle) \rangle \\ &= e^{-\lambda t} \left[b_0 + b_2 \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} b_0 t - \frac{\sigma^2 \lambda^{\frac{1}{n-1}}}{2 \lambda} - \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{\frac{n-2}{n-1}} \sigma^2 \left\{ \frac{c_1 (e^{-\lambda t} - 1)}{-\lambda} \right. \right. \\ &\quad + \frac{\lambda^{\frac{2}{n-1}}}{2\lambda} a_1 \left(\frac{e^{-\lambda t} - 2}{\lambda} \right) + \frac{\lambda^{\frac{1}{n-1}}}{\lambda} b_0 \left(3 - \frac{3}{2} n(n-1) \frac{\lambda}{\lambda} \right) \left(t + \frac{e^{-\lambda t} - 1}{\lambda} \right) \\ &\quad \left. \left. + n(n-1) \frac{\lambda^{\frac{n-2}{n-1}}}{\lambda} \left(d_0 - \frac{3}{2} \frac{\lambda^{\frac{2}{n-1}}}{\lambda} b_0 \right) \left(\frac{e^{-2\lambda t} - 1}{-2\lambda} + \frac{e^{-\lambda t} - 1}{\lambda} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{16} \lambda^{\frac{n+1}{n-1}} \sigma^2 \frac{1}{\lambda^3} (2\lambda t) \right] \quad (35) \end{aligned}$$

が得られる。 ⁷⁾ ここで a_i, b_i, c_i は (35) 式より求まる定数であり $\lambda = (n-1)\lambda$ である。 (35) 式において $\sigma^2 t = \text{一定}$, $t \rightarrow \infty, \sigma \rightarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned} R(t) &\rightarrow \frac{\lambda^{\frac{2}{n-1}}}{2(n-1)\lambda} e^{-(n-1)\lambda t} \left(1 + \frac{(n-1)^2}{2} \sigma^2 t \right) \\ &\sim \frac{\lambda^{\frac{2}{n-1}}}{2(n-1)\lambda} e^{-\left\{ (n-1)\lambda - \frac{(n-1)^2}{2} \sigma^2 \right\} t} \quad (36) \end{aligned}$$

が得られ (34) 式に相当していることがわかる。このことより一般の n (自然数) の場合でも緩和時間向に *slowing down* の傾向があることがわかった。

Fokker-Planck 方程式における固有値展開により、 $R(t)$ が

$$R(t) = \sum_p e^{-\gamma_p(\sigma^2)t} f_p(\sigma^2) \quad (37)$$

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$$

と表わされるとして

$$\gamma_1 = (n-1)\lambda + g_1(\sigma^2) \quad (38)$$

とおいて

$$R(t) = e^{-(n-1)\lambda t} \left[e^{-g_1(\sigma^2)t} f_1(\sigma^2) + \sum_{p' \neq 1} e^{-s_{p'} t - g_{p'}(\sigma^2)t} f_{p'}(\sigma^2) \right] \quad (39)$$

$$s_{p'} > 0$$

となつていふ場合には、 $\sigma^2 t = \text{一定}$, $\sigma \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ の極限操作により、最低固有値の寄与の部分を選ばせられ、

$$R(t) \sim e^{-\{(n-1)\lambda + g_1'(0)\sigma^2\}t} f_1(0) \quad (40)$$

となる。このようにした $R(t)$ における σ^2 までの近似は

$$R(t) \approx f_1(0) e^{-(n-1)\lambda t} (1 - g_1'(0)\sigma^2 t) \quad (41)$$

と書けることとなるのである。

このような意味で、本研究の σ 展開による相関関数を求める方法は、最低固有値に対する良い近似を与えることにな

るが、そればかりでなく時間相関関数の実際の形を近似ではあるが、あらゆる形で知ることもできる利点をも、持っているであろう。

参考文献

- 1) K. Kawasaki : *Ann. Phys. (N.Y.)* 61 (1970) 1.
- 2) W. Horsthemke and M. Malek-Mansour :
Z. Physik B24 (1976) 307
- 3) L. Arnold, W. Horsthemke and R. Lefever :
Z. Physik B29 (1978) 367
- 4) E. Wong and M. Zakai : *Ann. Math. Stat.*
36 (1965) 1560
- 5) N. G. van Kampen : *Can. J. Phys.* 39 (1961)
551
- 6) A. Schenzle and H. Brand : *Phys. Lett.* 69A
(1979) 313
- 7) M. Shiino : to be submitted.