

小さな乱雑摂動をうけた力学系の Onsager-Machlup 理論

気象庁 地磁気観測所 伊藤秀美

§1 物理的背景 & モデル

物理でよく使われるモデルから説きおこそう。考える物理系が jump 型の Markov 過程で記述できるとし、かつ空間的に一様だという仮定をおくと、transition density $P_\varepsilon(t, x, y)$ は次の発展方程式 (物理で Master 方程式と呼んでいる) に従う [1]。

$$\frac{\partial}{\partial t} P_\varepsilon(t, x, y) = \frac{1}{\varepsilon} \int dr \{ w(y - \varepsilon r, r) P_\varepsilon(t, x, y - \varepsilon r) - w(y, r) P_\varepsilon(t, x, y) \} \quad (1.1)$$

ここで w は既知函数で、 $1/\varepsilon$ は系の体積である。熱力学的極限 ($\varepsilon \rightarrow 0$) をとると、非平衡熱力学の分野 [2] と交渉をもつと期待される。次に掲げる a) ~ c) は非平衡熱力学の中心課題であり [3]、我々も同じ問題意識をもつてモデル (1.1) (を少し一般化したもの) の $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を調べることにする。

a) 過程の進行の問題

b) 行きつくべき状態の決定

c) 安定性の問題

a)~c)をここでの問題に適切な形に書き直すと次のようになる。

a) 有限時間内の時間発展

b) 十分時間がたつた時, 定常状態におちつくと考えられるか定常分布(不変測度)の $\varepsilon \rightarrow 0$ での振舞.

c) 最初ある領域内にいた時, 時間がたつと他の領域へ移って(緩和して)ゆくか, その緩和の方向, 時間.

このような問題について1次元系ではいくつかの伯別的アプローチがある[4]. この場合はポテンシャルが存在して, 結論はこのポテンシャルを使って述べられる。我々は2次元以上のポテンシャルの存在しない一般の場合も含めて調べたい。以下の話の物理的に最も重要な点は, 一言でいえば, 「一般の場合にポテンシャルの役目を果たすのが Onsager-Machlup の函数である」となる。物理的なまとめを §11 にしておいたので細部に興味のない方はそこを見られたい。

モデル(1.1)は, このままでは余り明らかでないか, カ学系に小さな jump 型摂動を加えたものになっている。そこで以下ではこれをもう少し一般化したものについて議論しよう。

d次元 Euclid 空間でカ学系

$$\dot{x}_t = \phi(x_t), \quad x_0 = x \quad (1.2)$$

が与えられたとし, これに小さな乱雑摂動をつけ加えた,

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon)dt + \varepsilon \sigma(X_t^\varepsilon)dw_t + \varepsilon \int C(X_t^\varepsilon, u) \tilde{\nu}(\frac{dt}{\varepsilon}, du) \\ X_0^\varepsilon = x. \end{cases} \quad (1.3)$$

なる確率微分方程式で記述されるモデルを考察する。ここで

b, C は $R^d \rightarrow R^d$, σ は $R^d \rightarrow R^d \times R^d$, $\tilde{\nu}$ は Poisson random measure

ν からその平均を引いたものである ($\tilde{\nu}([0, t], A) = \nu([0, t], A) - t\pi(A)$)

$E_x[\nu([0, t], A)] = t\pi(A)$, $\pi(du) = du/|u|^{d+1}$ [5] 参照), w_t は d 次元

Wiener過程. w と ν は互いに独立.

モデル (1.1) は (1.3) で

$$\begin{cases} \sigma \equiv 0 \\ b(x) = \int C(x, u) \pi(du) \\ w(x, r) dr = \int_{C(x, u) \in dr} \pi(du) \end{cases} \quad (1.4)$$

とおけば得られる.

方程式 (1.3) にいわゆる Lipschitz 条件を仮定しよう.

条件 L: ある定数 C, C_N が存在して,

$$(L-1) |b(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 + \int |C(x, u)|^2 \pi(du) \leq C(1 + |x|^2)$$

$$(L-2) |b(x) - b(y)|^2 + |\sigma(x) - \sigma(y)|^2 + \int |C(x, u) - C(y, u)|^2 \pi(du) \\ \leq C_N |x - y|^2, \quad x, y \in N.$$

ここで N は原点中心半径 N の球, $||$ は通常 Euclid norm (

但し $|\sigma(\cdot)|^2 = \sum_{i,j} |\sigma_{ij}(\cdot)|^2$ etc.)

Lipschitz 条件 L の下で, 時刻 t について右連続な増大する α

代数の列 $\mathcal{F}_t$ がとれ, $\mathcal{F}_t$ について強マルコフな過程 X^ε が $\sup_{0 \leq t \leq T} E_x | \cdot |^2 < \infty$ に一意的に存在する. X^ε は右連続にとれる [5].

確率微分方程式 (1.3) の生成作用素 A_ε は f が 2 階までの連続で有界な微係数をもつ函数のとき

$$\begin{aligned} A_\varepsilon f(x) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{E_x[f(X_t)] - f(x)}{\varepsilon} \\ &= (b(x), \nabla f(x)) + \frac{\varepsilon}{2} \text{tr}(a(x) \nabla \nabla f(x)) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int \{f(x+u) - f(x) - (\nabla f(x), u)\} \mu_x\left(\frac{du}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

ここで

$$\begin{aligned} a_{ij}(x) &= \sum_{k=1}^d \sigma_{ik}(x) \sigma_{jk}(x) \\ \mu_x(A) &= \int_{c(x,u) \in A} \pi(du) \end{aligned} \quad (1.6)$$

§2. 有限時間内の時間発展

Lipschitz 条件 L-2) の C_N が N によらない場合 (一様 Lipschitz) に次のことが成立.

定理 1 :

$$X_t^\varepsilon \rightarrow \varphi_t \quad (\text{弱収束})$$

φ_t は

$$\dot{\varphi}_t = b(\varphi_t), \quad \varphi_0 = x$$

の解. さらに b が $C^2(\mathbb{R}^d)$ に属し,

$$\int |c(x; u)|^3 \pi(du) < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

ならば

$$\xi_t^\varepsilon = (X_t^\varepsilon - p_t)/\sqrt{\varepsilon}$$

は

$$d\xi_t = \tilde{b}(p_t)\xi_t dt + \tilde{\sigma}(p_t)dw_t, \quad \xi_0 = 0$$

を満たす Gauss 過程 ξ_t に弱収束する。ここで

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{b}_{ij}(x) &= \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_j} \\ \sum_k \tilde{\sigma}_{ik}(x) \tilde{\sigma}_{jk}(x) &= \sum_k \sigma_{ik}(x) \sigma_{jk}(x) + \int c_i(x; u) c_j(x; u) \Pi(du). \end{aligned} \right.$$

この結果は實際上よく使われる[1]。ここでは確率微分方程式の解の漸近的振舞に関する一般論 ([5] p338 Th3 & p273) を用いて証明した，他にも semigroup を使うやり方 [6] とか，もっと直接的に transition density の極限を調べるやり方 [7] 等がある。

§3 Onsager-Machlup 汎関数 $S_T(p)$

次の量を導入する：

$$\begin{aligned} H^\varepsilon(x; z) &= \lim_{t \downarrow 0} E_x[\exp(z, X_t^\varepsilon - x) - 1] / t \\ &= (b(x), z) + \frac{\varepsilon}{2} (z, a(x)z) + \frac{1}{\varepsilon} \int \{e^{(z, u)} - 1 - (z, u)\} \mu_x\left(\frac{du}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで E_x は $X_0^\varepsilon = x$ という条件の下に期待値をとることを意味する。(3.1)の収束は各 $z \in \mathbb{R}^d$ に対して x について compact 集合上で一様とする。以下では $\varepsilon=1$ に対応する量は肩の ε をおとして表わすことにする。例えば $X_t = X_t^{\varepsilon=1}$ ， $H(x; z) = H^{\varepsilon=1}(x; z)$ 。

こうすると,

$$H^\varepsilon(x; z) = \frac{1}{\varepsilon} H(x; \varepsilon z).$$

$H(x; \cdot)$ の Legendre 変換を $L(x; \cdot)$ とする:

$$L(x; u) = \sup_{z \in \mathbb{R}^d} \{ (z, u) - H(x; z) \} \quad (L^\varepsilon(x; u) = \frac{1}{\varepsilon} L(x; u)) \quad (3.2)$$

Onsager-Machlup 汎関数 $S_T(\varphi)$ を

$$S_T(\varphi) = \begin{cases} \int_0^T L(\varphi; \dot{\varphi}) dt & (\varphi; \text{絶対連続}) \\ \infty & (\text{その他}) \end{cases} \quad (3.3) \quad (S_T^\varepsilon(\varphi) = S_T(\varphi)/\varepsilon)$$

で定義する。 $L(\varphi; \dot{\varphi})$ が Onsager-Machlup 関数と呼ぶべきものである。拡散過程の場合 (3.3) は簡単になる。

$$L(\varphi; \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}^{-1}(\varphi_t) (\dot{\varphi}_t^i - b^i(\varphi_t)) (\dot{\varphi}_t^j - b^j(\varphi_t)). \quad (3.4)$$

K を compact 集合とし,

$$H_K(z) = \sup_{x \in K} \{ H(x; z) \vee 0 \},$$

H_K の Legendre 変換を L_K とおく。ひとつ記号を導入する。 $f; \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, \infty]$ とするとき, 有効定義域

$$\text{dom } f \equiv \{x \in \mathbb{R}^d; f(x) < \infty\}.$$

基本的な条件を $H(x; \cdot)$ に課そう。

条件 A:

A-1) $\text{dom } H(x; \cdot) = \mathbb{R}^d, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

A-2) $H(x; z)$ は $C^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ かつ z について狭義凸。

A-3) D を $\mathbb{R}^d$ のある凸集合とする時,

$$\text{dom } L(x; \cdot) = \text{dom } L_K = D, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \text{ compact 集合 } K.$$

A-4)

$$K = \sup_{\substack{|x-x'| < \delta \\ x, x' \in K \\ u \in D}} \frac{L(x; u) - L(x'; u)}{1 + L(x; u)} \rightarrow 0 \quad \text{as } \delta \downarrow 0$$

A-5) $\{0\} \in \bar{D}$

A-6) $\bar{D} \setminus D$ は閉集合

A-7) $\tilde{K} \subset D$, $K \subset \mathbb{R}^d$ を compact 集合とする. このとき $L(x; u)$ は $K \times \tilde{K}$ 上で一様連続で

$$\sup_{x \in K} \sup_{\substack{u, u' \in \tilde{K} \\ |u-u'| < \delta}} |\nabla_u L(x; u), u-u'| \rightarrow 0 \quad \text{as } \delta \downarrow 0$$

いろいろ条件がついてわずらわしいが, それは次のような事情による. $\text{dom } H = \mathbb{R}^d$ であっても $\text{dom } L = \mathbb{R}^d$ とは限らない.

例えば一次元で

$$H(z) = e^z$$

$$L(u) = \begin{cases} u \ln u - u & (u \geq 0) \\ \infty & (u < 0) \end{cases}$$

$\text{dom } L$ の内部では $L(x; u)$ はなめらかさについて好ましい性質をもっているが, 境界を含めると一般に悪くなる. $\text{dom } L$ が開集合なら A-6), A-7) は不要. 特に $|\nabla_z H(x; z)| \rightarrow \infty$ as $|z| \rightarrow \infty$ なら $\text{dom } L = \mathbb{R}^d$ で A-3), A-5) ~ A-7) は不要. 条件 A をゆるめたりも, と check しやすい形に書くことは可能だが省略する.

$S_T(\varphi)$ から誘導される量をいくつか定義する:

$$\Psi_T = \{\varphi; \varphi_0 = x, \varphi_T = y\},$$

$$S(x, y) = \inf_{T \geq 0} \inf_{\varphi \in \Psi_T} S_T(\varphi) \quad (3.5)$$

$$S(x, \Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} S(x, y)$$

条件 A の下に $S(x, y)$, $S(x, \Gamma)$ は compact 集合上一様 Lipschitz 連続になる。又

$$S_T(\varphi) \geq 0, \quad = 0 \iff \varphi_t = b(\varphi_t). \quad (3.6)$$

(3.5) を用いて「遠方には出ていきにくい」という条件を課すことにしよう。

条件 B : N を原点中心半径 N の球とするとき

$$S(0, \partial N) \rightarrow \infty \quad \text{as } N \uparrow R^d.$$

(注) 原点から出発したとき時刻 T までに球 N の外へと出る確率は $\sim \exp(-S(0, \partial N)/\varepsilon)$ for $\varepsilon < \varepsilon_0(T)$. である。

§4 Ventsel-Freidlin の評価

§1 の a', c)' に答えるための出発点は Ventsel と Freidlin によって得られた 2 つの評価式である [8], [9]。唯彼らは確率微分方程式 (1.3) の係数の一様有界性を仮定しており、我々はそのかわりに条件 B を課しているので、彼らの証明に少々手を加える必要がある。(係数が一様有界だと不変測度を考える時に実際のモデルとかけ離れてまずいと思われる。)

定理2 : 条件 L, A, B が成立. このとき,

$$\forall h > 0, \forall \delta > 0, \exists \varepsilon_0 > 0$$

$$P_x(P_T(X^\varepsilon, \varphi) < \delta) \geq \exp\left(-\frac{S_T(\varphi) + h}{\varepsilon}\right) \quad (\text{第一評価式})$$

$$P_x(P_T(X^\varepsilon, \varphi_x) > \delta) \leq \exp\left(-\frac{S - h}{\varepsilon}\right) \quad (\text{第二評価式})$$

$$\text{for } 0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_0$$

ここで

$$\varphi_x = \{\varphi; S_T(\varphi) \leq S, \varphi_0 = x\},$$

$$P_T(f, g) = \sup_{0 \leq t \leq T} |f_t - g_t|,$$

であり, ε_0 は h, δ, T に依存するが, x については compact 集合に一樣にされる。

§5 Onsager-Machlup 汎関数 $S_T(\varphi)$ の特徴付け

定理2の形では第2評価式の直観的把握が少し困難だが, 殆んど同様に次のことが示せる。

定理3 : 条件 L, A, B 成立. $S_T(\varphi) < \infty$ とする。

$$\forall h > 0, \exists \delta > 0, \exists \varepsilon_0 > 0$$

$$\exp\left(-\frac{S_T(\varphi) + h}{\varepsilon}\right) \leq P_x(P_T(X^\varepsilon, \varphi) < \delta) \leq \exp\left(-\frac{S_T(\varphi) - h}{\varepsilon}\right) \quad (5.1)$$

$$0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_0$$

この定理は曲線 φ のまわりのある tube の中を動く確率が

$\sim \exp\left(-\frac{S_T(\varphi)}{\varepsilon}\right)$ ($\sim$ は(5.1)の意味, 普通の漸近展開より粗い) であることを意味する。tubeの中を動く確率で Onsager-Machlup 函数を決めようという立場[10]を認めれば, $S_T(\varphi)$ を Onsager-Machlup 汎函数と呼んで差支えないと思われる。

§6 $S_T(\varphi)$ の対称性

少し寄道をして詳細釣合の成り立つ(対称Markov過程の場合)に $S_T(\varphi)$ がある種の対称性をもつことを示そう。対称条件より

$$P_\varepsilon(t, x, y) g_\varepsilon(y) = P_\varepsilon(t, x, y) g_\varepsilon(x), \quad \exists g_\varepsilon(x) \geq 0. \quad (6.1)$$

$g_\varepsilon(x) \sim \exp\left(-\frac{U_\varepsilon(x)}{\varepsilon}\right)$ ($U_\varepsilon \sim 0(1)$) の漸近形をもつとし, (4.6)の μ_x が density $w(x, u)$ をもつとする ($\mu_x(du) = w(x, u)du$) と, (6.1)は

条件 P

$$\begin{cases} 2(\psi(x) - \int u w(x, u) du) = - \sum_j a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(x) \\ w(x, u) = w(x, -u) \exp[-(u, \nabla \psi(x))] \quad \exists \psi(x), \end{cases}$$

となる。($U_\varepsilon \rightarrow \psi$ が適当になめらかに行くことを仮定している)

定理 4: 条件 L, A, B, P 成立. $w(x, u)$ は u について compact support をもつとする. φ_t は絶対連続, $\dot{\varphi}_t \in D$ ($0 \leq t \leq T$), $\varphi_0 = \varphi_T$ なる閉じた曲線とする. $\hat{\varphi}_t = \varphi_{T-t}$ とおく. このとき

$$S_T(\varphi) = S_T(\hat{\varphi})$$

定理 3, 4 を組み合わせると, 詳細釣り合の成り立つ場合, 曲線 φ にそって動く確率と逆向き $\hat{\varphi}$ にそって動く確率は, ε についての最低次の近似で一致することかゝいえる。これは拡散過程での Motoo-Watanabe の結果の類似物といえる。[11] 参照。

§7 $S(x, y)$ から導かれる同値類

同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow S(x, y) = S(y, x) = 0$$

で定義する。同値な点を集めた最大同値類 K を次の様に定義する。

$$x \sim y \text{ if } x, y \in K \quad \& \quad x \not\sim y \text{ if } x \in K, y \notin K.$$

条件 A, B の下で最大同値類は compact で連結かゝいえる。点 x の ω -limit set $L^+(x)$ に属する点は互いに同値だが $L^+(x)$ は最大性を満たすとはいえない。力学系 (1.2) に制限を加えよう。

条件 C: ω -limit set の数は有限個。

各 ω -limit set を含む最大同値類を $K_1, \dots, K_\ell$ とする (もし重複があればとり除いておく)。もし欲すれば $\{K_i\}$ の中に一点だけからなる集合をさらに追加してもよい。

さて $x \in K_m, y \in K_n$ に対して

$$S_{mn} = S(x, y)$$

を考える。これは代表点のとりかによらない。 $K_1 \sim K_\ell$ に対応して数の集合 $L = \{1, 2, \dots, \ell\}$ を考える。 L の各点に矢印を他の点

に向けてつけて得られるグラフのうち $L \setminus \{i\}$ から一本ずつ矢印が出ており (i から矢印は出ていない), $\square$ 矢印による閉 loop はないものを $\{i\}$ -グラフと呼ぶことにし, その全体を G_i と書くことにする.

例 $l=3$ で $G_3 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 2 \rightarrow 3 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 2 \rightarrow 3 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 2 \rightarrow 3 \end{array} \right\}$

点 m と n を結ぶ矢印に $S_{mn} (= \langle 0, 1 \rangle)$ を対応させ, $g \in G_i$ に対して和 $\sum_{(m \rightarrow n) \in g} S_{mn}$, 各 k_i に対して

$$S_i = \min_{g \in G_i} \sum_{(m \rightarrow n) \in g} S_{mn}$$

を対応させる.

例 $l=3$ で

$$S_3 = \min (S_{12} + S_{23}, S_{21} + S_{13}, S_{23} + S_{13}).$$

§8 不変測度 μ^E の漸近的振舞

不変測度 μ^E ($\mu^E(A) = \int \mu^E(dx) P(x, A)$) が存在するための条件を仮定しよう. G を空でない任意の開集合とする. τ_G を G の hitting time ($\inf \{t \geq 0, X_t^E \in G\}$) とする.

D-1) X^E は再帰的 ($\tau_G < \infty$ P_x -a.s.)

D-2) f を $\bar{G}$ 上の有界 Borel 函数とするとき, $E_x[f(X_{\tau_G}^E)]$ は $x \in G$ について連続.

$L, A, B, D-1), D-2)$ からの有限な不変測度 μ^E が乗数因子を除

いて一意的に存在する。これが規格化できる, 即ち

$$D-3) \quad \mu^\varepsilon(\mathbb{R}^d) = 1$$

と仮定する。又技術的な仮定として,

E)(1.6) の μ_x は compact support をもつ: $\forall$ compact set $K, \exists$ compact set

$$\tilde{K}, \sup_{x \in K} \mu_x(\tilde{K}^c) = 0.$$

を仮定する。

定理 5: 条件 L, A ~ E 成立. さらに $\exists r > 0$

$$\sup_{x \in \partial_r(K)} E_x[\tau_K] < \infty \quad (\varepsilon \text{ について一様})$$

とする。

$$M = \{i \in L; S_i \text{ の最小値を与える } i\}$$

$$\bar{H}; \text{閉集合で } \bar{H} \cap \left(\bigcup_{i \in M} K_i\right) = \emptyset$$

このとき

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon(\bar{H}) = 0$$

ここで τ_K は K の hitting time, $K = \bigcup_{i \in L} K_i$, $\partial_r(K)$ は K の r 近傍.

エルゴード定理 [13]

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x_t^\varepsilon) dt = \int f(x) \mu^\varepsilon(dx) \quad P_x\text{-a.s.}$$

が成り立つことも考えに入れると, 「 S_i の最小値を与える K_i に
おちつく」と云ってよい。

Corollary: 定理 5 の条件に加えてポテンシャル条件 P が成り立
つとする。このとき定理の結論で $S_i \rightarrow U_i$ ($U_i = U(x), x \in K_i$)

としたものが成立。

証明は不変測度の構成定理[13]と§4 組みあわせて行う。
大体[8]にならうてやればよい。

§9 緩和の問題 I (緩和の方向)

最初 k_i という最大同値類の近くにいたとして、次にどの k_m ($m \neq i$) へ移、て行くか、その時間はいくらにか調べよう。
§9と§10で k_i は $S(x, y) > 0 \quad \forall x \in k_i, \forall y \notin k_i$ という意味で安定であるとし、 $S_{i,m}(m \neq i)$ の最小値を与える m が一意的に定まるとしよう (それを $m = j$ とする)。 k_m 自体は一実だけから成り立、ていることもあるのでそれ自体の hitting time を考えるのは具合が悪い。そこで $\gamma > 0$ を適当に定めて各 k_m のまわりに帯状の集合

$$Y_m = U_\gamma(k_m) \setminus \overline{U_\gamma(k_m)}$$

$$P_m = U_\gamma(k_m) \setminus \overline{U_{\gamma r}(k_m)} \quad (U_\delta(k_m) \text{ は } k_m \text{ の } \delta \text{ 近傍})$$

を定める。stopping time の列 τ_n, σ_n を $(Y = \bigcup_{i \in L} Y_i, P = \bigcup_{i \in L} P_i)$

$$\tau_0 = 0$$

$$\sigma_n = \inf \{t > \tau_{n-1}; X_t^\varepsilon \in P\}$$

$$\tau_n = \inf \{t > \sigma_n; X_t^\varepsilon \in Y\}$$

とし Y 上の Markov 連鎖 $y_n = X_{\tau_n}^\varepsilon$ をつくる。

直観的描像は次のようになる：最初 Y_i にいれば X_t^ε は $Y_i \rightarrow P_i$

$\rightarrow Y_i \rightarrow \dots$ のくり返しと殆んどいつも行っているだけだが、ごくまれに Γ_i から $Y_m (m \neq i)$ への transition をおこす。このとき K_m に緩和したと考えてよからう。もう少し正確に述べると次のようになる。 $\delta_i(x, Y_m) (m \neq i, x \in Y_i)$ で Markov 連鎖 $y_n (y_0 = x)$ が $Y \setminus Y_i$ を初めて hit した時それが Y_m である確率を表わすことにする。この $\delta_i(x, Y_m)$ を K_m への緩和の確率と理解しようというわけである。

定理 6: 条件 L, A~C, E 成立. r を十分小さくすると

$$\delta_i(x, Y_j) \rightarrow 1 \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0 \quad (7.1)$$

つまり $\varepsilon \rightarrow 0$ でいくらでも 1 に近い確率で $S_{im} = \min$ を与える K_m に緩和する。(7.1) の収束の速さは $\exp\{-\frac{1}{\varepsilon}(S_{ij} - S_{im})\} (m \neq j)$ の order である。 $S_T(\varphi) \approx S_{ij}$ なる φ は $K_m (m \neq i, j)$ に入れないので $\Gamma_r(K_m) (m \neq i, j)$ がそのような curve φ にさわらない程度に r を小さくすればよい。

§10 緩和の問題 II (緩和時間)

$A_i = \{x \in \mathbb{R}^d; L^+(x) \in K_i\}$ とおく。 K_j は A_i の外側にあると仮定して $(K_j \cap A_i = \emptyset)$ 差支えない。 A_i を出てしまえば条件 C より力学系だけで運動できるので、移動に要する時間は $O(1)$ である。したがって緩和時間としては A_i の脱出時間を考えたらよ

い。今のところ A_i 自体の脱出時間の漸近評価はうまく出来ていないので A_i から δ だけ削った領域 A_i^δ について行う: ∂A_i の各点に法線をたて δ だけ内側にい、た点によって囲まれる領域を A_i^δ とする。

条件 F: $\bar{A}_i$ は compact であり C^2 boundary をもち、

F-1) $(\phi(x), \nu(x)) < 0$ on ∂A_i^δ for 十分小さい任意の $\delta > 0$.

F-2) $D = \mathbb{R}^d$ で

$$\sup_{\substack{x \in N \\ u \in \mathbb{R}^d}} \frac{L(x; \frac{x}{\lambda}) - L(x; u)}{1 + L(x; u)} \rightarrow 0 \quad \text{as } \lambda \uparrow 1.$$

ここで ν は ∂A_i^δ 上の外向き法線, N は半径 N 原点中心の球.

(注) $H(x; z)$ が $|z|^{1+\alpha}$ ($\alpha > 0$) より早く ∞ にいけばよい (F-2).

定理 7: $L, A \sim C, E, F$ が成立

τ_δ を A_i^δ の first exit time とする.

$\forall h > 0, \exists \delta > 0, \exists \varepsilon_0(h, \delta) > 0$

$$\exp\left(\frac{S_{ij} - h}{\varepsilon}\right) < E_x[\tau_\delta] < \exp\left(\frac{S_{ij} + h}{\varepsilon}\right) \quad \begin{matrix} 0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \\ x \in K_i \end{matrix}$$

つまり rough にいって緩和時間 $\sim \exp\left(\frac{S_{ij}}{\varepsilon}\right)$.

$\delta \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon_0 > 0$ かどうかわからないので, A_i の脱出時間の評価は出きていない.

§11. 物理的まとめ

1) Onsager-Machlup 函数 $L(\varphi; \dot{\varphi})$ は (3.1) ~ (3.3) で定義される。それを $[0, T]$ で積分した $S_T(\varphi)$ を Onsager-Machlup 函数と呼ぶことにする。その確率論的な意味は §5 定理 3. で、これを根拠に $S_T(\varphi)$ に Onsager-Machlup の名を冠する。

2) 有限時間内の時間発展は

$$S_T(\varphi) = \min = 0$$

で特徴付けられる。

3) ω -limit set を $K_1, \dots, K_k$ (正確には最大同値類) とし各 K_i に対して S_i を §7 のやり方で対応させる。十分時間かた、た時 $S_i = \min$ のところに落ち着く。特にポテンシャル条件 P が満たされると $U_i = \min$ (U : ポテンシャル) のところにおちつく。 S_i は U_i を一般化したものといえる。 S_i が Onsager-Machlup 函数から誘導された量である事が重要で、Prigogine の熱力学の拡張になっている。

4) 最初 K_i にいたとき $S_{i,j} = \min$ とする K_j に緩和しその後和時間 $\sim \exp\left(\frac{S_{i,j}}{\varepsilon}\right)$ 。

5) 一般化された循環量 (確率流の)。

$$I = \int_0^T \{L(\varphi; \dot{\varphi}) - L(\varphi; -\dot{\varphi})\} dt$$

が定義され、詳細釣り合 $\rightarrow I = 0$ 。[12] の循環量が small deviation に対するものであるのに対し、ここは large deviation に対する

ものである。

§12 文献

- [1] R. Kubo, K. Matsuo & K. Kitahara, Fluctuation and Relaxation of Macrovariables J. Stat. Phys. 9 ('73) 51-94.
- [2] P. Glansdorff & I. Prigogine, 構造安定性ゆらぎ (みづほ松本訳)
- [3] 橋爪夏樹, 熱平衡から遠い状態の熱力学 科学 44 ('74) 458
- [4] H. Tomita, A. Ito & H. Kidachi, Stochastic Decay Processes of Metastable State Prog. Theor. Phys.
- I. Oppenheim, K. E. Shuler & G. H. Weiss, Stochastic Theory of Nonlinear Rate Processes with Multiple Stationary States, Physica 88A ('77) 191
- G. Nicolis & J. W. Turner, Stochastic Analysis of a Non-equilibrium Phase Transition preprint.
- [5] I. I. Gihman & A. V. Skorohod, Stochastic Differential Equations, Springer ('72)
- [6] T. G. Kurtz, Solutions of Ordinary Differential Equations as Limits of Pure Jump Markov Processes, J. Appl. Prob. 7 ('70) 49
- T. G. Kurtz, Limit Theorems for Sequences of Jump Markov Processes. Approximating Ordinary Differential Processes, J. Appl. Prob. 8 ('71) 344.
- [7] M. Suzuki, Statistical Mechanics of Non-equilibrium Systems II.

Prog. Theor. Phys. 55 ('76) 383.

[8] A.D. Ventsel & M.I. Freidlin, On Small Random Perturbation of Dynamical Systems, Russian Math. Surveys 25 ('70) 1.

[9] A.D. Ventsel, Rough Limit Theorems on Large Deviations for Markov Stochastic Processes I, II. Theor. Prob. its Appl. 21 ('76) 227-242, 499-512.

[10] R.L. Stratonovich, On the Probability Functional of Diffusion Processes. selected. Transl. in Math. Statist. & Prob. 12 ('70) 273.

S. Watanabe, 文献[11]

D. Dürr & A. Bach, The Onsager-Machlup Function as Lagrangian for the Most Probable Path of Diffusion Processes I, II. Comm. math. Phys. 60 ('78) 153.

H. Ito, Probabilistic Construction of Lagrangian of Diffusion Processes, Prog. Theor. Phys. 59 ('78) 725.

Y. Takehashi, 本研究会講演

[11] 渡辺信三, 拡散過程の対称性についての注意.

[12] K. Tomita & H. Tomita, Irreversible Circulation of Fluctuation Prog. Theor. Phys. 51 ('74) 1731.

[13] G. Maruyama & H. Tanaka, Ergodic Properties of N -dimensional Recurrent Markov Processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 23 A 13 ('59) 152.