数理解析研究所講究録
367巻 1979年 47-49



# 散逸過程における確率論的取扱い

名大教養　豊田利幸, 柏村昌平

開放系の統計力学を扱う方法の一つとして，われわれは保存系が二つの開放系に分離されると假定して，両系を相互に関連させることにより，散逸過程の dynamics を考察した[1]。そこでは拡散係数を定数とする近似を用いたが，″粘性″あるいは″摩擦″をとり入れた Ornstein-Uhlenbeck 過程がモデルとして有効であることが示された。すなわち保存的な Hamiltonian から″ゆらぎの効果″的なものを導くさい，Kolmogorov の前進および後退方程式の解を同時に考えることにより，開放系を保存系の枠組にくみこむことができた。

ところで拡散係数が定数でない場合について，最近，物理学者の間で，出発点となる基礎方程式（確率微分方程式）をめぐって Itô 型（以下(I)と略記）か Stratonovich 型（以下(S)と略記）かの議論が行われている。なかにはある種の物理現象の dynamics の記述として(I)は不適当で(S)がよいという意見も出されている。これについてわれわれは次のように考える。

確率積分を(I)では $\int_s^t Y\cdot dX$，(S)では $\int_s^t Y\circ dX$ とあらわすことにすれば，よく知られているように

$$y \circ dX = y \cdot dX + \frac{1}{2} dy \cdot dX \qquad (1)$$

が一般的になりたつ［2］。X, Y の厳密な数学的条件については［2］を参照されたい。

さて(I)の基礎方程式を

$$dX = a\,dt + b \cdot dB \qquad (2)$$

$$\langle (dB)^2 \rangle = \sigma^2 dt \qquad (3)$$

とすれば，簡単な計算で(1)を用いて(2)は次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned} dX &= \left(a - \frac{1}{2} b b' \sigma^2\right) dt + b \circ dB \\ &\equiv a^* dt + b \circ dB \end{aligned} \qquad (4)$$

明らかに $b' \fallingdotseq 0$ の場合 $a \fallingdotseq a^*$ である。

当然，(I)，(S)の変換公式はそれぞれ次のようになる。

$$(\mathrm{I}) : \quad df(X) = \left(f'a + \frac{1}{2} f'' b^2 \sigma^2\right) dt + f' \cdot dB \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{S}) : \quad df(X) &= f'\left(a - \frac{1}{2} b b' \sigma^2\right) dt + f' b \circ dB \\ &= f'\left(a^* dt + b \circ dB\right) \end{aligned} \qquad (6)$$

(5)と(6)は全く同じもので表わし方が異なっているに過ぎない。

要するに物理現象の確率論的な取扱いにおいて，(I)と(S)

が異なる結果を与えるのではなくて，　$a$ あるいは　$a^*$ をどう設定するかが問題であると思われる。

文献

[1]　Toyoda, T. and Kashiwamura, S., An Approach to Dynamical Description of Dissipative Systems, to be published.

[2]　Itô, K. and Watanabe, S., Introduction to Stochastic Differential Equations, Proc. of Intern. Symp. SDE Kyoto 1976 pp. i-xxx.