数理解析研究所講究録
368巻 1979年 224-240

位相群のΠ_n空間へのUnitary表現の特性関数について

鹿児島大学教養部　酒井幸吉

任意の位相群G上にQuasi-positive definite関数及びQuasi-negative definite関数を導入し，これらの関数とGのΠ_n空間へのCyclic unitary表現の特性関数との関連についてのべる．

はじめに本文中で断りなく使用する記号を宣言しておく．Gの単位元はe，一般の元はg又はhで表わす．G上の連続関数全体の集合をC(G)とする．$\varphi(g)\in C(G)$に対して，$\varphi^*(g)$は$\varphi^*(g)=\overline{\varphi(g^{-1})}$はよってきまる関数．線形空間の部分集合Aが生成する線形部分空間を$ls\{A\}$と略記する．$\mathbb{C}$，$\mathbb{R}$はそれぞれ複素数体，実数体を表わす．nはいつも任意に固定されたnon-negative integerとする．

§1　GのΠ_n空間へのCyclic unitary表現

まずΠ_n空間の定義からはじめる．いま非退化Hermitian sesqui-linear form $\langle\,,\,\rangle$をもつ線形空間$\mathfrak{H}$にて，これの極大負定値部

分空間($\langle , \rangle$に関する)の次元がnのとき,$\{\mathfrak{H}, \langle , \rangle\}$はpre Π_n空間であるという.この空間の極大負定値部分空間を$\mathfrak{N}$(次元はn),その直交補空間$\mathfrak{N}^\perp$を$\mathfrak{P}$とすると,$\mathfrak{P}$は正定値部分空間となり$\mathfrak{H}$は$\mathfrak{N}$と$\mathfrak{P}$の直交直和に分解できる:

(1) $\mathfrak{H} = \mathfrak{N} (+) \mathfrak{P}$ ($\mathfrak{H}$の基本分解という).

$\mathfrak{H}$から$\mathfrak{N}$,$\mathfrak{P}$への射影作用素をそれぞれN,Pとし,$J=P-N$とおくと,基本分解(1)に対応して$\mathfrak{H}$に正定値内積$(,)_J$が

(2) $(x, y)_J = \langle Jx, y \rangle$ ($x, y \in \mathfrak{H}$)

で定義できる.$\mathfrak{H}$には$(,)_J$より定まるノルムによって位相を与える.いま$\{\mathfrak{H}, (,)_J\}$がHilbert空間になるとき,$\{\mathfrak{H}, \langle , \rangle\}$は$\Pi_n$空間(Pontrjagin space with negative rank n)という.なおΠ_0空間はHilbert空間と考えてよい.任意のpre Π_n空間は完備化によって,Π_n空間の中に至る所稠密に埋め込むことができる.[2],[4]にΠ_n空間についての詳しい解説がある.

さて(pre)Π_n空間$\mathfrak{H}$上の線形作用Tが全単射で$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ ($x, y \in \mathfrak{H}$)をみたすときunitary作用素であるという.Gの(pre)Π_n空間$\mathfrak{H}$へのunitary表現$\{U_g, \mathfrak{H}\}$とは,Gから$\mathfrak{H}$上のunitary作用素群への準同型$g \mapsto U_g$で任意の$x, y \in \mathfrak{H}$によって定まるG上の関数$\langle U_g x, y \rangle$が連続であるものをいう.この表現$\{U_g, \mathfrak{H}\}$を単に一つの文字Uで表わし,その表現空間$\mathfrak{H}$を$\mathfrak{H}^U$とかくことにする.GのΠ_n空間へのunitary表現全体の集合

を $\mathbb{U}_n(G)$ とする．$U\in\mathbb{U}_n(G)$ とし，$f\in\mathfrak{H}^U$ が $\{U_g f : g\in G\}^{\perp}=\{0\}$ をみたすとき，f は U-cyclic であるといい，この様な vector の集合を $cv(U)$ とかく．$cv(U)\neq\phi$ (empty) のとき U は cyclic であるという．$\mathbb{U}_n(G)$ の要素で cyclic なものの全体を $\mathbb{CU}_n(G)$ で表わす．いま $U\in\mathbb{CU}_n(G)$，$f\in cv(U)$ に対して，関数 $\varphi(g)=\langle U_g f, f\rangle\in C(G)$ を U の f によって定まる特性関数と呼ぶ．Hilbert 空間への cyclic unitary 表現の場合と同様に次の定理が成立する (cf. [8])．

<u>定理 1</u>　$U^j\in\mathbb{CU}_n(G)$ の $f_j\in cv(U^j)$ によって定まる特性関数を φ_j $(j=1,2)$ とする．$\varphi_1=\varphi_2$ ならば，$\mathfrak{H}^{U^1}$ から $\mathfrak{H}^{U^2}$ 上への isometric 同型 T で $U_g^2 T=TU_g^1$ かつ $Tf_1=f_2$ なるものが存在する．▨

Π_n 空間 $\mathfrak{H}$ 上の unitary 作用素 T は，Hilbert 空間 $\{\mathfrak{H},(\ ,\ )_J\}$ (cf. (2)) 上の有界作用素になり，そのノルムを $\|T\|_J$ とかく．一般に $U\in\mathbb{U}_n(G)$ は一様有界 (i.e. $\sup_{g\in G}\|U_g\|_J<\infty$) ではない．このことに関連して次の定理が成立する (cf. [8])．

<u>定理 2</u>　$U\in\mathbb{CU}_n(G)$ が一様有界であるための条件は U が有界な特性関数をもつことである．▨

<u>注意 1</u>　$U\in\mathbb{U}_n(G)$ とし，$\mathfrak{H}^U$ は n 次元 U-不変負定値部分空間 $\mathfrak{N}$ をもつとする．このとき $\mathfrak{P}=\mathfrak{N}^{\perp}$ も U-不変であり，$\mathfrak{H}^U$ の基本分解 $\mathfrak{H}^U=\mathfrak{N}(+)\mathfrak{P}$ に対応して定まる正定値内積を $(\ ,\ )_J$ (cf. (2)) とすると，U は Hilbert 空間 $\{\mathfrak{H}^U,(\ ,\ )_J\}$ への unitary 表現とみなすことができる．故にこの様な U は一様有界になる．

一方 G が amenable のとき, $U \in \mathbb{U}_n(G)$ が一様有界ならば, $\mathfrak{H}^U$ は必ず n 次 U-不変負定値部分空間をもつ (cf. [7]). ▨

§2 Hermitian kernels of finite negative rank

Π_n 空間への cyclic unitary 表現の特性関数を特徴づけるため, 標記にあるものを導入する. いま任意の Hermite 行列 H に対して, その負の固有値の個数を $r_-(H)$ で表わすことにする.

<u>定義 1</u> $G \times G$ 上の連続関数 $K(g, h)$ が次の性質 (a), (b) をもつとき Hermitian kernel of negative rank n であるという:

(a) $\overline{K(g, h)} = K(h, g)$

(b) 任意の有限個の元 $g_i \in G$ $(1 \le i \le m)$ によって定まる Hermit 行列 $K[g_1, g_2, \cdots, g_m] := (K(g_i, g_j))$ に対して

$$r_-(K[g_1, g_2, \cdots, g_m]) \le n \qquad \cdots (*)$$

であり, しかも (*) にて等号が成立することがある.

この様な $K(g, h)$ の集合を $HK_n(G)$ とかく. ▨

いま $K(g, h) \in HK_n(G)$ を任意に与える. $h \in G$ を固定してえられる関数 $g \mapsto K(h, g)$ と K_h とかき, $C(G)$ の部分空間 $ls\{K_h : h \in G\}$ を $\mathfrak{H}[K]$ とする. $\mathfrak{H}[K]$ の元 $f_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_{g_i}$, $f_2 = \sum_{j=1}^{q} \mu_j K_{h_j}$ $(\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C})$ に対して, $\langle f_1, f_2 \rangle_K = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \overline{\mu}_j K(g_i, h_j)$ とおくと, $\langle\, ,\, \rangle_K$ は $\mathfrak{H}[K]$ 上の非退化 Hermitian sesqui-linear form になる. 特に次が成立する:

(3) $\langle K_g, K_h \rangle_K = K(g, h)$.

更に次の補題が成立する.

<u>補題 1</u> $\{\mathfrak{H}[K], \langle\ ,\ \rangle_K\}$ は pre Π_n 空間である. この完備化を $\{\mathfrak{H}(K), \langle\ ,\ \rangle_K\}$ とすると, 写像 $G \ni g \mapsto K_g \in \mathfrak{H}(K)$ は弱連続 (i.e. 任意の $x \in \mathfrak{H}(K)$ に対して G 上の関数 $g \mapsto \langle K_g, x \rangle_K$ は連続) である. ▨

逆に次も成立する.

<u>補題 2</u> G から Π_n 空間 $\mathfrak{H}$ への写像 $g \mapsto \eta(g)$ に対して, $G \times G$ 上の関数 $K(g, h) := \langle \eta(g), \eta(h) \rangle$ は連続であるとする. $\mathfrak{H}$ の部分空間 $ls\{\eta(g) : g \in G\}$ に含まれる極大負定値部分空間の次元を m $(m \leq n)$ とすると $K(g, h) \in HK_m(G)$ である. 特に $\{\eta(g) : g \in G\}^{\perp} = \{0\}$ ならば $K(g, h) \in HK_n(G)$ になる. ▨

§3 Quasi-positive definite 関数

<u>定義 2</u> $\varphi(g) \in C(G)$ に対して, $G \times G$ 上の関数 $K(g, h) = \varphi(h^{-1}g)$ が $HK_n(G)$ に属するとき, $\varphi(g)$ は Quasi-positive definite function of rank n であるという. この様な関数全体の集合を $P_n(G)$ で表わすことにする. ▨

$P_0(G)$ は G 上の連続な positive definite 関数の集合に外ならない. いま $U \in \mathbb{C}U_n(G)$ の $f \in CV(U)$ によって定まる特性関数を $\varphi_f(g)$ とすると, 補題 2 より $K(g, h) = \varphi_f(h^{-1}g) = \langle U_g f, U_h f \rangle \in HK_n(G)$. すなわち, $\varphi_f(g) \in P_n(G)$ である.

一方 $\varphi(g)\in P_n(G)$ を任意に与え，$K(g,h):=\varphi(h^{-1}g)\in HK_n(G)$ とする．このとき $K_{g_0}(g^{-1}h)=K_{gg_0}(h)$，$K(gg_1,gg_2)=K(g_1,g_2)$ なる関係が成立するから，pre Π_n 空間 $\mathfrak{H}[K]$ への G の unitary 表現 $g\to U_g'$ を

$U_g'f(h)=f(g^{-1}h)$ $(f\in\mathfrak{H}[K])$ によって定義できる．この表現 U' の Π_n 空間 $\mathfrak{H}(K)$ (cf. 補題 1) 上への拡張を U とすると，これは cyclic になる．実際 $f_0=K_e$ とすると，$U_gf_0=K_g$ だから $\mathfrak{H}(K)$ の作り方より，f_0 は U-cyclic である．しかも U の f_0 によって定まる特性関数は $\varphi(g)$ になる：

$$\langle U_gf_0,f_0\rangle_K=\langle K_g,K_e\rangle_K\overset{(3)}{=}K(g,e)=\varphi(g).$$

すなわち $\varphi(g)$ を特性関数にもつ $U\in\mathbb{C}\mathbb{U}_n(G)$ が存在する．更に定理 1 より，この様な U は unitary 同値なものを除き一意的にきまる．これを $U(\varphi)$ とかくことにする．以上まとめて

<u>定理 3</u>　$\varphi(g)\in P_n(G)\iff U(\varphi)\in\mathbb{C}\mathbb{U}_n(G)$ 及び $f\in cv(U(\varphi))$ が存在して $\varphi(g)$ は $\varphi(g)=\langle U(\varphi)_gf,f\rangle$ と表わされる．

しかも任意の $\varphi(g)\in P_n(G)$ に対して，上の $U(\varphi)$ は unitary 同値なものを除き一意的にきまる．▨

<u>注意 2</u>　(A)　$\varphi_i(g)\in P_{n_i}(G)$ $(i=1,2)$ とすると，適当な整数 m $(0\le m\le n_1+n_2)$ が存在して，和 $\varphi(g)=\varphi_1(g)+\varphi_2(g)$ は $P_m(G)$ に属す．

(B)　一般に $U\in\mathbb{U}_n(G)$，$f\in\mathfrak{H}^U$ に対して，$\varphi(g)=\langle U_gf,f\rangle\in P_m(G)$．ここで $m\ (\le n)$ は $\mathfrak{H}^U$ の部分空間 $ls\{U_gf : g\in G\}$ に含まれる極大負定値部分空間の次元に等しい．▨

任意の $U\in\mathfrak{U}_n(G)$ に対して $\mathcal{E}(U):=\{x\in\mathfrak{h}^U : U_g x=x\ (\forall g\in G)\}$ とおくと, U が cyclic ならば $\mathcal{E}(U)$ は高々1次元である. このことに注意して $\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G)$ の次の様ないくつかの部分集合を定義する:

$$\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}})=\{U\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G):\mathcal{E}(U)=\{0\}\},$$

$$\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\mathcal{E})=\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G)\setminus\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}}).$$

$\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ に属する U で, $\mathcal{E}(U)$ が non-positive, negative definite, neutral になるものの全体をそれぞれ $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ で表わす. 更に $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ を次の二つに分ける:

$$\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})=\{U\in\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E}):\ \mathfrak{h}^U \text{ は } \mathcal{E}(U) \text{ を含む } U\text{-不変な2次元}\Pi_1\text{部分空間をもつ}\},$$

$$\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})=\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\setminus\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E}).$$

従って
$$\begin{aligned}\mathbb{C}\mathfrak{U}^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})&=\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\cup\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\quad(\text{disjoint union})\\&=\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\cup\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\cup\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\quad(\text{disjoint union}).\end{aligned}$$

上に定義した $\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G)$ の各部分集合に対応して, $P_{n+1}(G)$ の部分集合 $P_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}})$, $P_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ は, $\varphi(g)\in P_{n+1}(G)$ で $U(\varphi)$ がそれぞれ $\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ に属するものの全体とする.

また G 上の non-zero real character (i.e. G 上の実数値関数 $r(g)\in C(G)$, $r(g)\neq 0$ で $r(gh)=r(g)+r(h)$ をみたすもの) の集合を $A(G)$ とする. 以上の記号のもとに次の二つの補題が成立する.

補題 3　$\mathbb{U}\in\mathbb{C}\mathbb{U}^{(-)}_{n+1}(G,\varepsilon)\Leftrightarrow\mathbb{U}=\mathbb{V}\,(+)\,\mathcal{E}^-$ なる形に分解できる．ただし $\mathbb{V}\in\mathbb{C}\mathbb{U}_n(G,\check{\varepsilon})$，$\mathcal{E}^-\in\mathbb{C}\mathbb{U}_1(G,\varepsilon)$ は 1 次元 Π_1 空間への trivial 表現である．この様な $\mathbb{U}$ に対して

$$cv(\mathbb{U})=\{x+\omega:\ x\in\mathfrak{H}^{\mathcal{E}^-},x\neq0,\ \omega\in cv(\mathbb{V})\}.$$ ▨

補題 4　$\mathbb{U}\in\mathbb{C}\mathbb{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\varepsilon)\Leftrightarrow\mathbb{U}=\mathbb{V}\,(+)\,\mathbb{W}$ なる形に分解できる．ただし $\mathbb{V}\in\mathbb{C}\mathbb{U}_n(G,\check{\varepsilon})$，$\mathbb{W}$ は $r(g)\in A(G)$ を用いて次の様に定義される：　$\mathbb{W}_g\xi=\xi$，$\mathbb{W}_g\eta=\sqrt{-1}\,r(g)\xi+\eta$．　ここで $\{\xi,\eta\}$ は $\mathfrak{H}^{\mathbb{W}}$ (= 2 次元 Π_1 空間) のベースで $\langle\xi,\xi\rangle=\langle\eta,\eta\rangle=0$，$\langle\xi,\eta\rangle=1$ をみたすものである．この様な $\mathbb{U}$ に対して

$$cv(\mathbb{U})=\{\alpha\xi+\beta\eta+\omega:\ \alpha,\beta\in\mathbb{C},\alpha\beta\neq0,\ \omega\in cv(\mathbb{V})\}$$ ▨

上の二つの補題と定理 3 より次の結果をえる．

定理 4　$P^{(-)}_{n+1}(G,\varepsilon)=\{p(g)-c:\ p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon}),\ c\in\mathbb{R},\ c>0\}$

$P^{(+0)}_{n+1}(G,\varepsilon)=\{\sqrt{-1}\,r(g)+p(g)+c:\ r(g)\in A(G),\ p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon}),\ c\in\mathbb{R}\}$ ▨

注意 3　$p_i(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon})$，$r_i(g)\in A(G)$，$c_i\in R$ $(i=1,2)$ とする．もし $p_1(g)+c_1=p_2(g)+c_2$ ならば，$p_1(g)=p_2(g)$，$c_1=c_2$ である．実際 $c=c_1-c_2>0$ と仮定すると，定理 4 より $p_1(g)=p_2(g)-c$ は $P^{(-)}_{n+1}(G,\varepsilon)$ に属する．これは矛盾である ($\because P_n(G)\cap P_{n+1}(G)=\phi$)．従って $p_1(g)=p_2(g)$，$c_1=c_2$ である．同様に，$\sqrt{-1}\,r_1(g)+p_1(g)+c_1=\sqrt{-1}\,r_2(g)+p_2(g)+c_2$ ならば，$r_1(g)=r_2(g)$，$p_1(g)=p_2(g)$，$c_1=c_2$ であることが結論できる． ▨

§4 Quasi-negative definite 関数

$P_{n+1}^N(G,\varepsilon)$ に属する関数を統一的に特徴づけるために標記のものを導入する．$\varphi(g)\in C(G)$ に対して $G\times G$ 上の関数 $K^\varphi(g,h)$ を

$$(4)\qquad K^\varphi(g,h)=\varphi(h^{-1}g)-\varphi(g)-\overline{\varphi(h)}$$

によって定めることにする．

<u>定義 3</u>　$\varphi(g)\in C(G)$ が $\varphi(e)=0$ かつ $K^\varphi(g,h)\in HK_n(G)$ のとき Quasi-negative definite function of rank n であるという．この様な関数の集合を $N_n(G)$ とかく． ▨

$\varphi(g)\in N_n(G)$ ならば $\varphi^*(g)=\varphi(g)$ である．なお $N_0(G)$ は negative definite (or conditional positive definite) 関数と呼ばれるもののうち e で zero となるものの集合である (cf. [1], [3])．

<u>注意 4</u>　$\varphi(g)=\sqrt{-1}\,r(g)$ $(r(g)\in A(G))$ とおくと $K^\varphi=0$ となるから，$\varphi(g)\in N_0(G)$ である．逆に $\varphi(g)\in N_0(G)$, $\varphi(g)\neq 0$, $K^\varphi=0$ ならば，$\varphi(g)$ は $\sqrt{-1}\,r(g)$ $(r(g)\in A(G))$ なる形である． ▨

任意の $V\in \mathbb{V}_n(G)$ に対して，これの弱連続 1-cocycle (i.e. G から $\mathfrak{H}^V$ への弱連続写像 $g\mapsto\eta(g)$ で $\eta(hg)=V_h\eta(g)+\eta(h)$ をみたすもの) の全体を $Z^1(G,V)$ とし，$B^1(G,V)=\{\partial v(g)=V_g v-v : v\in\mathfrak{H}^V\}(\subseteq Z^1(G,V))$ とおく．更に

$$Z_t^1(G,V):=\{\eta(g)\in Z^1(G,V):\{\eta(g):g\in G\}^\perp=\{0\}\},$$

$$B_t^1(G,V):=B^1(G,V)\cap Z_t^1(G,V).$$

$N_n(G)$ と $\mathbb{V}_n(G)$ は次の定理によって関連づけることができる．

<u>定理5</u>　$\varphi(g)\in C(G)$ に対して $K^{\varphi}\neq 0$ とする．このとき $\varphi(g)\in N_n(G)$ であるための条件は $V\in\mathbb{U}_n(G)$ 及び $\eta(g)\in\mathcal{Z}^1_t(G,V)$ が存在して次の関係(5)が成立することである：

$$(5)\qquad \langle\eta(g),\eta(h)\rangle=\varphi(h^{-1}g)-\varphi(g)-\overline{\varphi(h)}\ \ (=K^{\varphi}(g,h)).$$ ▨

十分性は $\eta(e)=0$ なることと補題2より明らか．逆に $\varphi(g)\in N_n(G)$, $K^{\varphi}\neq 0$ とすると，次の関係が成立する(cf. §2):

$$(6)\qquad K^{\varphi}_{g_0}(g^{-1}h)-K^{\varphi}_{g_0}(g^{-1})=K^{\varphi}_{gg_0}(h)-K^{\varphi}_{g}(h)$$

この関係より pre Π_n 空間 $\mathfrak{H}[K^{\varphi}]$ への G の unitary 表現 $g\to V'_g$ を

$$V'_g f(h)=f(g^{-1}h)-f(g^{-1})\qquad (f\in\mathfrak{H}[K^{\varphi}])$$

と定義できる．この表現 V' の Π_n 空間 $\mathfrak{H}(K^{\varphi})$ への拡張を V とする．更に $G\ni g\mapsto\eta(g)\doteq K^{\varphi}_g\in\mathfrak{H}(K^{\varphi})$ によって $\eta(g)$ をきめると，(6)及び補題1より $\eta(g)\in\mathcal{Z}^1_t(G,V)$ なることが判る．しかも(3),(4)から(5)が従う．よって定理5の必要性が判る．

<u>注意5</u>　(A)　$\varphi(g)\in N_n(G)$ に対して，(5)をみたす $V\in\mathbb{U}_n(G)$ 及び $\eta(g)\in\mathcal{Z}^1_t(G,V)$ は unitary 同値なものを除き一意的にきまる(cf. [9])．この V, $\eta(g)$ を V^{φ}, $\eta_{\varphi}(g)$ で表わすことにする．

(B)　$V\in\mathbb{U}_n(G)$ とする．$\eta(g)\in\mathcal{Z}^1_t(G,V)$ を任意に与えたとき，(5)をみたす $\varphi(g)\in C(G)$ が存在するかどうかは明らかではない．もし実数値連続関数 $\Psi(g)$ で

$$\mathrm{Im}\langle\eta(h),V_h\eta(g)\rangle=\Psi(hg)-\Psi(g)-\Psi(h)$$

をみたすものがあれば，$\varphi(g)=\sqrt{-1}\,\Psi(g)-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\langle\eta(g),\eta(g)\rangle$

は (5) をみたす (cf. [9]). ▨

$\varphi(g)\in N_n(G)$ に対応する $\eta_\varphi(g)\in Z_t^1(G,V^\varphi)$ に着目して, $N_n(G)$ を次の二つに分ける:

$$N_n^{(B)}(G)=\{\varphi(g)\in N_n(G):\eta_\varphi(g)\in B_t^1(G,V^\varphi)\},$$

$$N_n^{(Z)}(G)=N_n(G)\setminus N_n^{(B)}(G),$$

ただし $n=0$ の場合 $\sqrt{-1}\,A(G)\subset N_0^{(B)}(G)$ と考える (cf. 注意4).

$N_n^{(B)}(G)$ に属する関数の形を知るため, 次の二つの補題あげる.

補題5　$V\in \mathbb{U}_n(G)$, $\partial v(g)\in B^1(G,V)$ とし, $p(g)=\langle V_g v,v\rangle$ とおく. このとき $\eta(g)=\partial v(g)$ に対して (5) をたす $\varphi(g)$ は存在し, 次の形で与えられる:

$$\varphi(g)=\sqrt{-1}\,r(g)+p(g)-p(e),$$

ただし $r(g)=0$ 又は $r(g)\in A(G)$ である. ▨

補題6　$V\in \mathbb{U}_n(G)$, $\eta(g)=\partial v(g)\in B^1(G,V)$ とすると,

$\eta(g)\in B_t^1(G,V)\Leftrightarrow V\in \mathbb{C}\mathbb{U}_n(G,\check{\varepsilon})$ かつ $v\in cv(V)$. ▨

これらの補題及び注意3より次の結果をえる.

定理6　$\varphi(g)\in N_n^{(B)}(G)\Leftrightarrow\varphi(g)$ は次の (7) 又は (8) で表わされる:

(7)　$\varphi(g)=p(g)-p(e),\quad (p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon})),$

(8)　$\varphi(g)=\sqrt{-1}\,r(g)+p(g)-p(e),\quad (r(g)\in A(G),\ p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon})).$

(7), (8) の右辺にある $p(g)$, $r(g)$ は $\varphi(g)$ により一意的にきまる. ▨

次の§での記述を簡単にするため, (7), (8) で与えられる関数 $\varphi(g)$ の集合をそれぞれ $N_n^{(-)}(G)$, $N_n^{(+0)}(G)$ とかく. 従って

$$N_n(G) = N_n^{(-)}(G) \cup N_n^{(+0)}(G) \cup N_n^{(z)}(G) \quad (\text{disjoint union}).$$

注意 6　$n=0$ の場合 $N_0^{(-)}(G)$, $N_0^{(+0)}(G)$, $N_n^{(z)}(G)$ は次の様に特徴づけることもできる (cf. [9]). いま $\varphi(g) \in N_0(G)$ とすると,

$\varphi(g) \in N_0^{(-)}(G) \Leftrightarrow$ $\varphi(g)$ は有界,

$\varphi(g) \in N_0^{(+0)}(G) \Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\,\varphi(g)$ は有界, $\mathrm{Im}\,\varphi(g)$ は非有界,

$\varphi(g) \in N_0^{(z)}(G) \Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\,\varphi(g)$ は非有界. ▨

§ 5　$N_n(G)$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}^N(G,\mathcal{E})$ 及び $P_{n+1}^N(G,\mathcal{E})$ の関係

いま $\mathfrak{U} \in \mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}^{(0)}(G,\mathcal{E})$ (cf. § 3), $\eta \in CV(\mathfrak{U})$ とする. このとき neutral vector $\xi \in \mathcal{E}(\mathfrak{U})$ を $\langle \xi, \eta \rangle = 1$ をみたすように選ぶ. $\mathfrak{H}(\xi,\eta : c) := ls\{\xi,\eta\}$ (ただし $c = \langle \eta,\eta \rangle$) とおくと, これは Π_1 部分空間であり, $\mathfrak{H}^{\mathfrak{U}}$ を $\mathfrak{H}^{\mathfrak{U}} = \mathfrak{H}(\xi,\eta : c) \dotplus \mathfrak{H}_0$ ($\mathfrak{H}_0 = \Pi_n$ 部分空間) と分解しておく. この分解に対応して, $\mathfrak{U}$ は次の様に表わすことができる:

$$\mathfrak{U}_g \xi = \xi$$

$$\mathfrak{U}_g w = \langle \mathfrak{U}_g w, \eta \rangle \xi + \mathfrak{V}_g w = \langle w, \eta(g^{-1}) \rangle \xi + \mathfrak{V}_g w, \quad (w \in \mathfrak{H}_0)$$

$$\mathfrak{U}_g \eta = \varphi(g)\xi + \eta + \eta(g).$$

ここで $\{\mathfrak{V}_g, \mathfrak{H}_0\} \in \mathfrak{U}_n(G)$, $\varphi(g) \in C(G)$, $\eta(g) \in Z_t^1(G,\mathfrak{V})$ である. しかも $\varphi^*(g) = \varphi(g)$, $\varphi(e) = 0$ かつ次の関係が成立する:

$$\varphi(hg) = \varphi(h) + \varphi(g) + \langle \eta(g), \eta(h^{-1}) \rangle.$$

従って, 定理 5 より $\varphi(g) \in N_n(G)$ となる. 更に $\mathfrak{U}$ の η によっ

て定まる特性関数は $\varphi(g)+C$ である．

一方 $\varphi(g)\in N_n(G)$ 及び $C\in\mathbb{R}$ を任意に与える．$V=V^{\varphi}\in\mathfrak{V}_n(G)$, $\eta(g)=\eta_{\varphi}(g)\in Z_t^1(G,V^{\varphi})$ (cf. 注意 5 (A)) とおき，$\mathfrak{H}(\xi,\eta:C)$ は 2 次元 Π_1 空間で $\langle\xi,\xi\rangle=0$, $\langle\xi,\eta\rangle=1$, $\langle\eta,\eta\rangle=C$ をみたすベース $\{\xi,\eta\}$ をもつものとする．更に Π_{n+1} 空間 $\mathfrak{H}_C$ を $\mathfrak{H}_C=\mathfrak{H}(\xi,\eta:C)(+)\mathfrak{H}^V$ と定める．このとき，G の unitary 表現 $U^{(\varphi,C)}=\{U_g,\mathfrak{H}_C\}$ を

$$U_g\xi=\xi,\qquad U_g w=\langle w,\eta(g^{-1})\rangle\xi+V_g w\quad(w\in\mathfrak{H}^V),$$
$$U_g\eta=\varphi(g)\xi+\eta+\eta(g)$$

と定義できる．任意の $C\in\mathbb{R}$, $\varphi(g)\in N_n^{(+0)}(G)\cup N_n^{(z)}(G)$ に対して，$U^{(\varphi,C)}$ は cyclic であり，$\eta\in CV(U^{(\varphi,C)})$ となる．すなわち，この場合 $U^{(\varphi,C)}\in\mathbb{C}\mathfrak{V}_{n+1}^{(0)}(G,\varepsilon)$ である．しかも $U^{(\varphi,C)}$ の η によって定まる特性関数は $\varphi(g)+C$ となる．

より詳しく次の定理が成立する (cf [9. §§6-7])．

<u>定理 7</u>　$\mathbb{C}\mathfrak{V}_{n+1}^{(+0)}(G,\varepsilon)=\{U^{(\varphi,C)}:\varphi(g)\in N_n^{(+0)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$,

$\mathbb{C}\mathfrak{V}_{n+1}^{(z)}(G,\varepsilon)=\{U^{(\varphi,C)}:\varphi(g)\in N_n^{(z)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$.　▨

<u>定理 8</u>　$P_{n+1}^{(+0)}(G,\varepsilon)=\{\varphi(g)+C:\varphi(g)\in N_n^{(+0)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$,

$P_{n+1}^{(z)}(G,\varepsilon)=\{\varphi(g)+C:\varphi(g)\in N_n^{(z)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$.

特に $N_n^{(+0)}(G)\subset P_{n+1}^{(+0)}(G,\varepsilon)$, $N_n^{(z)}(G)\subset P_{n+1}^{(z)}(G,\varepsilon)$.　▨

<u>注意 7</u>　$\varphi(g)\in N_n^{(-)}(G)$ の場合，任意の $C\in\mathbb{R}$ に対して $U^{(\varphi,C)}$ は $U^{(\varphi,C)}=V(+)\varepsilon^+$ と分解できる．ただし $V\in\mathbb{C}\mathfrak{V}_{n+1}^{(-)}(G,\varepsilon)$, ε^+ は 1 次元 Π_0 空間への G の trival 表現である．従って $\varepsilon(U^{(\varphi,C)})$

は2次元となり，$U^{(\varphi,c)}$ は cyclic ではない． ▨

上の注意にもかかわらず，$P_{n+1}^{(-)}(G,\varepsilon)$ に属する関数は $N_n^{(-)}(G)$ に属する関数を用いて表わすことができる．いま $\varphi(g)\in N_n^{(-)}(G)$ とすると，定理6より $\varphi(g)=p(g)-p(e)$，$(p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon}))$ なる形で表示され，$p(g)$ したがって $p(e)$ は $\varphi(g)$ に対して一意的にきまる．このことより $\varphi(g)\in N_n(G)$ に対して，$\mu(\varphi)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ を

$$(9)\qquad \mu(\varphi)=\begin{cases} p(e) & (\varphi(g)=p(g)-p(e),\ p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon})) \\ +\infty & (\varphi(g)\in N_n(G)\setminus N_n^{(-)}(G)) \end{cases}$$

と定める．このとき定理4と(7)を比較すると次の定理をえる．

<u>定理 9</u> $P_{n+1}^{(-)}(G,\varepsilon)=\{\varphi(g)+c : \varphi(g)\in N_n^{(-)}(G),\ c\in\mathbb{R},\ c<\mu(\varphi)\}$. ▨

<u>注意 8</u> (A) $\varphi(g)\in N_n^{(-)}(G)$ とすると，次が成立する．

$$\mu(\varphi)>0 \Rightarrow \varphi(g)\in P_{n+1}^{(-)}(G,\varepsilon)$$

$$\mu(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon})$$

$$\mu(\varphi)<0 \Rightarrow \varphi(g)\in P_n(G,\varepsilon).$$

(B) 定理8-9と(9)より，$N_n(G)$ と $P_{n+1}^{N}(G,\varepsilon)$ は次で結ばれる．

$$(10)\qquad P_{n+1}^{N}(G,\varepsilon)=\{\varphi(g)+c : \varphi(g)\in N_n(G),\ c\in\mathbb{R},\ c<\mu(\varphi)\}.$$ ▨

上の(10)より $\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}^{N}(G,\varepsilon)$ に属する表現は $N_n(G)$ に属する関数によって完全にきまると考えてよい．

§.6 可換群 G 上の $P_1(G)$

この§では G は可換とする．G の unitary character 群を $\hat{G}$，

G上の連続な non-unitary character (i.e. $\chi(g)\in C(G)$ で，$\chi(gh)=\chi(g)\chi(h)$ をみたし，$\chi^*\neq\chi$ なるもの)の全体を G^* とする．

Naimark [5] によれば，任意の $U\in \mathfrak{U}_n(G)$ に対して，$\mathfrak{H}^U$ はいつも n 次元 U-不変 non-positive 部分空間をもつ．この事実を $n=1$ の場合に適用すると，次の補題をえる (cf. [10]).

補題7　$C\mathfrak{U}_1(G)$ は次の様な表現 U^1, U^2 でつくされる:

$$U^1=\chi_1\otimes V^1,\quad (\chi_1\in\hat{G},\ V^1\in C\mathfrak{U}_1^N(G,\varepsilon)),$$

$$U^2=V^2\,(+)\,W,\quad (V^2\in C\mathfrak{U}_0(G),\ W\in C\mathfrak{U}_1(G,\varepsilon)),$$

ただし W は $\chi_2\in G^*$ を用いて，$W_g\xi=\chi_2(g)\xi$, $W_g\eta=\chi_2^*(g)\eta$ と定義される．$\{\xi,\eta\}$ は $\mathfrak{H}^W$(=2次元 Π_1 空間)のベースで $\langle\xi,\xi\rangle=\langle\eta,\eta\rangle=0$, $\langle\xi,\eta\rangle=1$ をみすもの．

更に U^1, U^2 の cyclic vector は次で与えられる:

$$cv(U^1)=cv(V^1),$$

$$cv(U^2)=\{\alpha\xi+\beta\eta+w:\ \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \alpha\beta\neq0,\ w\in cv(V^2)\}.$$ ▨

この補題と注意8(B)より，$P_1(G)$に属する関数は，unitary character と negative definite 関数，又は non-unitary character と positive definite 関数を用いて表示できる．

定理10　$\varphi(g)\in P_1(G)\Longleftrightarrow\varphi(g)$ は次の(11)又は(12)と表わされる:

(11)　$\varphi(g)=\chi(g)(\psi(g)+C)$,

ここで $\chi\in\hat{G}$, $\psi(g)\in N_0(G)$, $C\in\mathbb{R}$, $C<\mu(\psi)$.

(12)　$\varphi(g)=\lambda(\chi(g)+\chi^*(g))+\mu(\chi(g)-\chi^*(g))+p(g)$,

ここで $\chi(g)\in \hat{G}^*$, $p(g)\in P_0(G)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ で $\lambda^2+\mu^2\neq 0$ なるもの. ▨

注意9 (A) 定理6, 注意6 及び定理8より, (11) にある $\varphi(g)$ は次の三つの形で表示されるものに分類できる:

$$\varphi_1(g)=\chi(g)(p(g)-c_1),$$

$$\varphi_2(g)=\chi(g)(\sqrt{-1}\,r(g)+p(g)+c_2),$$

$$\varphi_3(g)=\chi(g)(\psi(g)+c_2),$$

ここで $\chi(g)\in\hat{G}$, $p(g)\in P_0(G,\check{\varepsilon})$, $r(g)\in A(G)$, $\psi(g)\in N_0(G)$ で $\mathrm{Re}\,\psi(g)$ は非有界, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$, $c_1>0$ である.

(B) G が局所コンパクトで才2可算公理をみたすとき, G 上の negative definite 関数は "Levy-Khinchin formula" によって統一的に積分表示される (cf. [3], [1]).

(C) この§のはじめにのべた Naimark の結果は, 非可換であっても, G が連結可解群 (cf [6]) 又は連結局所コンパクト amenable 群 (cf. [7]) の場合にも成立する. 従って, これらの場合にも定理10 及び上の (A) は有効である. ▨

References

[1] Berg,C.: Potential theory on locally compact abelian groups, Springer, 1975.

[2] Bognár,J.: Indefinite inner product spaces, Springer, 1974.

[3] Guichardet,A.: Symmetric Hilbert spaces and related topics, Springer, Lecture Notes in Math., Vol. 261(1972).

[4] Iohvidov,I.S. et al.: Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric I, Trudy Moskov Math. Obšč., 5(1956),367-432.

[5] Naimark,M.A.: On commuting unitary operators in spaces with an indefinite metric, Acta Sci. Math., (Szeged), 24(1963),177-189.

[6] ______: Unitary representations of solvable groups in spaces with indefinite metric, Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Math., 27(1963), 1181-1185.

[7] Sakai,K.: On J-unitary representations of amenable groups, Sci. Rep. Kagoshima Univ., 26(1977),33-41.

[8] ______: On quasi-positive definite functions and unitary representations of groups in Pontrjagin spaces, J. Math. Kyoto Univ., 19(1979), 71-90.

[9] ______: On quasi-negative definite functions and certain classes of cyclic unitary representations in Π_n-spaces, Sci. Rep. Kagoshima Univ., 28(1979),9-50.

[10] ______: On indecomposable unitary representations of locally compact abelian groups in Π_n-spaces, Ibid., 27(1978),1-20.