数理解析研究所講究録
368巻 1979年 196-203

$L^\infty(G)$上の移動と可換な isometry について

京大 理　梅田 亨

§1. Gを局所compact群とする。$L^p(G)$上の isometric linear operator ですべての右移動と可換なものが定数倍を除いて左移動に限るかという問題に対して $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$ のとき Strichartz と Parrott が肯定的な結果を与えている。$p=2$ のときは、Gが abelian で既に否定的である。ここでは $p=\infty$ に対しても肯定的な結果が成立することを述べる。

<u>定理1</u>. $L^\infty(G)$上の isometric linear operator ですべての右移動と可換なものは左移動のスカラー倍に限る。

<u>注意</u>. $L^\infty(G)$の定義としては通常の様に "local に" 考えるものを採用する。即ち関数の同一視は、任意の compact set に制限して測度ゼロを除いて等しいとき行う。

定理1 の証明は次の二段階に分かれる。

[I] 定理1の仮定を満たす operator は $C_0(G)$上で左移動のスカラー倍の形をしている。

但し，$C_0(G)$ は無限遠でゼロとなる連続函数全体を表わす。

［II］ $L^\infty(G)$ 上の isometric linear operator が $C_0(G)$ 上で identity ならば，$L^\infty(G)$ 全体で identity である。

この［II］は群とは無関係なより一般的な状況で成り立つ。まず L^∞-空間を定義するには測度は不要で零集合が確定していればよいことに注意する。そこで設定としては $(X, \mathfrak{B}, \mathfrak{N})$ を与えて $L^\infty(X, \mathfrak{B}, \mathfrak{N})$ を考える。但し，X は局所 compact 空間，$\mathfrak{B}$ はすべての開集合を含む σ-field，$\mathfrak{N}$ は σ-complete な $\mathfrak{B}$ の ideal（この元を零集合と思う.）。実際には可算的な条件は本質的でなくそれを除いた定義も可能だがここでは省略する。本質的な仮定は正則性でそれを次の形で考える。

(*)（内正則性） すべての non-null set $\in \mathfrak{B}$ は non-null compact set を含む。

この (*) の仮定の下に次の定理が成り立つ。

<u>定理2</u>. $L^\infty(X, \mathfrak{B}, \mathfrak{N})$ 上の isometric linear operator が $C_0(X)$（modulo null functions）上 identity ならば，$L^\infty(X, \mathfrak{B}, \mathfrak{N})$ 全体で identity である。

§2. ［I］の証明.

はじめに定理1の仮定を満たす operator T は右一様連続な有界函数全体を安定にすることを示そう。それは次の関係式をみればよい。

$$\|R(t)Tf - Tf\| = \|TR(t)f - Tf\| = \|R(t)f - f\|.$$

但し左右の移動を，$R(t)f(x) = f(xt)$，$L(t)f(x) = f(t^{-1}x)$ と定義する。

厳密に言うと norm は ess. sup. norm だから，f の右一様連続性から Tf の右一様連続性が直ちに出るとは言えない。併し，上の関係から，δ 列を右から convolution することで，Tf を右一様連続なもので近似でき，それらが $L^\infty(G)$ で閉じていることより Tf が右一様連続であると結論できる。

次に $\mu : f \longmapsto Tf(e)$ という $C_0(G)$ 上の線型形式を考える。但し e は G の単位元。まづ $|Tf(e)| \leqq \|Tf\| = \|f\|$ だから $\|\mu\| \leqq 1$。更に T が右移動と可換であることより，$Tf(x) = R(x)Tf(e) = TR(x)f(e) = \mu(R(x)f)$．これから，$\|\mu\| = 1$ が判る。さて〔I〕を示すには，μ が Dirac 測度のスカラー倍 $\alpha \cdot \delta_s$ の形をしていることを言えばよい。何故なら，$\mu = \alpha \cdot \delta_s$ とすると $Tf(x) = \alpha \cdot \delta_s(R(x)f) = \alpha \cdot f(sx) = \alpha \cdot L(s^{-1})f(x)$．その為にはよく知られている様に，$\mu$ の support が一点であることを示せばよい。その目的で次の Lemma を準備する。

<u>Lemma</u>．μ を $C_0(G)$ 上の連続線型形式，$f \in C_0(G)$ で $f \neq 0$ とする。もし $\mathrm{supp}\,\mu \not\subset \mathrm{supp}\,f$ ならば，

$|\mu f| < \|\mu\|\|f\|$。

(∵) $h \in C_0(G)$ を次の様にとる。$\mu h \neq 0$, $\|h\| \leq \|f\|$, $\mathrm{supp}\, h \cap \mathrm{supp} f = \phi$. このとき

$$|\mu f| < |\mu f| + |\mu h| = \mu(cf + c'h)$$
$$\leq \|\mu\| \, \|cf + c'h\| = \|\mu\| \cdot \|f\|$$

ここに $c = \mu f / |\mu f|$, $c' = \mu h / |\mu h|$ //

さて [I] に戻って $\mathrm{supp}\,\mu$ がもし二点 $a \neq b$ を含んだとする。e の近傍 V で $VV^{-1} \not\ni ab^{-1}$ となるものをとる。このとき，任意の $x \in G$ について $Vx \not\supset \{a, b\}$, 従って $f \in C_0(G)$ を $\mathrm{supp} f \subset V$ となるようにとれば任意の x に対し $\mathrm{supp}(R(x)f) \not\supset \{a, b\}$. 故に Lemma より

$$|\mu(R(x)f)| < \|\mu\| \cdot \|R(x)f\| \quad \text{即ち} \quad |Tf(x)| < \|f\|$$

を得る。そこで $f \in C_0(G)$ のとき $Tf \in C_0(G)$ を言えば $\|Tf\| < \|f\|$ となって矛盾だから証明は完結する．

$Tf \in C_0(G)$ の証明は μ の total variation を $|\mu|$ と書くとき，次の評価から明らかである．(Riesz-角谷の定理から μ は complex-measure として実現される。)

$$\left|\int R(x)f \, d\mu\right| \leq \left|\int_K R(x)f \, d\mu\right| + \left|\int_{K^c} R(x)f \, d\mu\right|$$
$$\leq \|\mu\| \cdot \sup_{y \in K} |f(yx)| + |\mu|(K^c) \cdot \|f\|$$

([I] の証明終り.)

4.

§3. 定理2の証明（概略）.

定理2を言う為には $T\chi_E = \chi_E$ を言えばよい。但し χ_E はEの特性関数，Tは定理2の仮定を満たす operator. 基本的な idea としては，連続函数を加えることによって生じる norm の変化によってもとの函数を知るという方針で話が進む。（但しそれだけでは完全にいかないので少し工夫がいる。）

$$m_f(x) = \sup_{|c|\leq 1} \inf_{h\in H_x} \| f + c\cdot h \|$$

$$M_f(x) = \inf_{h\in H_x} \| f + h \|$$

但し $H_x = \{ h \in C_0(X) \,;\, 0 \leq h \leq 1 \,,\, h(x) = 1 \}$

という二つの関数を定義すると，$m_f = m_{Tf}$ ，$M_f = M_{Tf}$.

そこで m_f, M_f から f の性質を知ることが重要となる。それを述べる前に必要な定義を述べよう．$\|f\|_E = \|f\cdot\chi_E\|$ とおく。以下特に断らない限り集合は $\mathfrak{M}$ に入るものと約束しよう。fによるEの ess. image を

$$f[E] = \{ a\in\mathbb{C} \,;\, \forall\varepsilon>0 \ \exists B\notin\mathfrak{N},\ B\subset E,\ \|f-a\|_B < \varepsilon \}$$

と定義する。このとき次の性質が成りたつ。（証明略）

(1) $f[E]$ は compact. $E\notin\mathfrak{N}$ ならば $f[E]$ は空でない。

(2) $(f+g)[E] \subset f[E] + g[E]$.

(3) $\|f\|_E = \sup\{ |a| \,;\, a\in f[E] \}$.

(4) $f[E \cup E'] = f[E] \cup f[E']$.

更に $E \in \mathcal{B}$ に対しその support $[E]$ を

$[E] = \{x \in X \,;\, {}^\forall V$ open nbd of x, $V \cap E \notin \mathfrak{N}\}$

と定義する。このとき次の性質が成り立つ。

(5) $[E]$ は closed で E の閉包に含まれる。

(6) $E \notin \mathfrak{N}$ ならば $[E] \notin \mathfrak{N}$.

((6) には内正則性を用いる。証明は簡単だが省略する。)

さて $f[E]$ の定義と内正則性から，$f[E] \ni a$ ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $f[K] \subset a + \mathbb{B}_\varepsilon$ となる non-null compact set $K \subset E$ が存在することに注意する。ここに $\mathbb{B}_\varepsilon$ は $\mathbb{C}$ 内の原点を中心とする半径 ε の開円板。m_f と M_f から f の性質を出す二つの Lemma を述べよう。

<u>Lemma A</u>. もし $m_f(x) \leq 1$ for $x \in E$, $E \notin \mathfrak{N}$ ならば $f[E] = \{0\}$.

(証) $f[E] \ni a \neq 0$ ならば $\varepsilon > 0$ に対し compact set $K \notin \mathfrak{N}$ で $K \subset E$, $f[K] \subset a + \mathbb{B}_\varepsilon$ となるものがある。$c = \frac{a}{|a|}$ とおく。$s \in [K]$ に対し，任意の $h \in H_s$ を考えるとき，s の open nbd V があって $h[V] \subset 1 + \mathbb{B}_\varepsilon$. このとき

$$(f + ch)[K \cap V] \subset f[K] + ch[V] \subset a + \mathbb{B}_\varepsilon + \frac{a}{|a|} + \mathbb{B}_\varepsilon$$
$$\subset \frac{a}{|a|}(1 + |a|) + \mathbb{B}_{2\varepsilon}.$$

故に $m_f(s) \geqq 1 + |a| > 1$ で矛盾。 //

<u>*Lemma B*</u>. もし $M_f(x_0) = \|f\| + 1$ となるような $x_0 \in X$ が存在すれば，$f[X] \ni \|f\|$。

（∵）$h \in H_{x_0}$ に対し

$(f+h)[X] \subset f[X] + h[X] \subset f[X] + \{a \in \mathbb{R}\ ;\ 0 \leq a \leq 1\}$.

これより，$f[X] \ni \|f\|$ でなければ $b \in (f+h)[X]$ の絶対値は $\|f\| + 1$ に達し得ない。 //

さて m_{χ_E} 及び M_{χ_E} は容易に計算できて，$m_{\chi_E}(x) = M_{\chi_E}(x) = \chi_{[X]}(x) + \chi_{[E]}(x)$ となる。

定理2の証明に戻る。はじめに non-null compact set K に対し $T\chi_K[K] \ni 1$ であることに注意する。何故なら Lemma A より $T\chi_K[K^c] = \{0\}$ 及び Lemma B より $T\chi_K[X] \ni 1$ だから。

さて $T\chi_E = \chi_E$ を言うには $T\chi_E[E] = \{1\}$ 及び $T\chi_E[E^c] = \{0\}$ を言えばよい。（$E, E^c \neq \phi$ として。そうでないときは自明。）ところが，$T\chi_E[E] = \{1\}$ さえ言えれば，特に $E = X$ として $T1 = 1$ がわかり，$T\chi_E[E^c] = 1 - T\chi_{E^c}[E^c] = \{0\}$ と残りも判る。さて $T\chi_E[E] \ni a \neq 1$ とする。non-null compact set K で $K \subset E$, $T\chi_E[K] \subset a + \mathbb{B}_\varepsilon$（$\varepsilon > 0$ 充分小）となるものをとる。$f = \chi_E - \chi_K + \frac{a-1}{|a-1|}\chi_K$ とおく。$\|f\| = 1$ である。一方 $T\chi_K[K] \ni 1$ だから non-null compact set $K' \subset K$ をとって $T\chi_K[K'] \subset 1 + \mathbb{B}_\varepsilon$ となる様

にする。このとき，

$$T f[K'] \subset T\chi_E[K'] - T\chi_K[K'] + \frac{a-1}{|a-1|} T\chi_K[K']$$
$$\subset a + \mathbb{B}_\varepsilon - 1 + \mathbb{B}_\varepsilon + \frac{a-1}{|a-1|} + \mathbb{B}_\varepsilon$$
$$\subset \frac{a-1}{|a-1|}(1+|a-1|) + \mathbb{B}_{3\varepsilon} .$$

従って $\|Tf\| \geqq 1 + |a-1| > 1$ で $\|f\| = 1$ に矛盾する。

（定理２の証明終り.）

[References]

Parrott, S. K., Isometric multipliers, Pacific J. Math., 25 (1968), 159 – 166.

Strichartz, R. S., Isomorphisms of group algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 858 – 862.

Umeda, T., Linear isometries on $L^\infty(G)$ commuting with translations, J. Math. Kyoto. Univ. (to appear).