数理解析研究所講究録
368巻 1979年 176-182

Compact Lie 群のテンソル積表現について

津田塾大学　三鳥川寿一

G を連結半単純 Lie 群としその Center が有限とする。又 G は compact Cartan 部分群をもつものとする。
K を G の極大部分群，$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$ を各々 G, K の Lie 代数とし，以下次の記号を用いる。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ ； $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解，

B ； G の compact Cartan 部分群で K に含まれるもの，

$\mathfrak{b}$ ； B の Lie 代数，

$\mathfrak{g}_c, \mathfrak{k}_c, \mathfrak{p}_c, \mathfrak{b}_c$ ； 各々 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}, \mathfrak{b}$ の複素化，

Ad ； K の $\mathfrak{p}_c$ 上の adjoint 表現，

τ ； $\mathfrak{g}_c$ の compact 実型 $\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ に関する conjugation，

Σ ；$(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{b}_c)$ に関する root 系，

Σ_n, Σ_k ； 各々 Σ の非 compact root，compact root 全体。

$\mathfrak{g}_c$ の root 分解を $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{h}_c + \sum_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g}_c ;$ $\mathrm{ad}(X)H = \alpha(H),\ \forall H \in \mathfrak{h}_c\}$ とし $\mathfrak{g}_c$ の Weyl 基底 $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ ($\alpha \in \Sigma$) を次の条件を満す様にとる;

$X_\alpha - X_{-\alpha}$, $\sqrt{-1}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \in \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$, $\mathrm{trace}\ \mathrm{ad}(X_\alpha)\mathrm{ad}(X_{-\alpha}) = 1$。

表現 $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{p}_c)$ は $\mathfrak{p}_c$ 上の Hermite 形式 $(\ ,\ )$ を次の様に定めることにより K の unitary 表現となる;

$$(X, Y) = -\mathrm{trace}\ \mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(\tau(Y)),\quad X, Y \in \mathfrak{p}_c。$$

π を K の有限次元 unitary 表現とし V をその表現空間とする。Ad 及び π のテンソル積表現 $\mathrm{Ad}\otimes\pi$ を次の様に定義する。

$$(\mathrm{Ad}\otimes\pi)(k)(X\otimes v) = \mathrm{Ad}(k)X \otimes \pi(k)v,\quad X \in \mathfrak{p}_c,\ v \in V,\ k \in K。$$

この稿の目的はテンソル積表現 $\mathrm{Ad}\otimes\pi$ の Clebsh-Gordan 係数達のうち特別なものを計算することにある。

(π_μ, V_μ) を K の既約 unitary 表現でその最高 weight が μ であるとする(但し root 系 Σ_k に一つの順序が導入されているものとする)。この時 $\mathrm{Ad}\otimes\pi_\mu$ の既約成分への分解は次の様に与えられる;

$$\mathrm{Ad}\otimes\pi_\mu = \sum_{\omega\in\Sigma_n} m(\mu+\omega)\,\pi_{\mu+\omega}$$ ($\pi_{\mu+\omega}$ は $\mu+\omega$ を最高 weight とする K の既約表現),

$$\mathfrak{p}_c \otimes V_\mu = \sum_{\omega\in\Sigma_n} m(\mu+\omega)\,V_{\mu+\omega},\quad m(\mu+\omega) = 0 \text{ 又は } 1。$$

以下 $m(\mu+\omega)=1$ となる非 compact root ω を fix して考える。$\mathfrak{p}_c\otimes V_\mu$ の元 $X\otimes v$ の $V_{\mu+\omega}$ への projection を $(X\otimes v)_\omega$ とし、$|X\otimes v|_\omega$ を vector $(X\otimes v)_\omega$ の norm とする。

「定理」(π_μ, V_μ) を最高 weight μ をもつ K の既約 unitary 表現とし $v(\mu)$ を π_μ の weight μ に対する weight vector で $|v(\mu)|=1$ とする。この時 $|X_\omega\otimes v(\mu)|^2_\omega$ は次の公式で与えられる。

$$|X_\omega\otimes v(\mu)|^2_\omega = \prod_{\alpha\in\Delta_-(\omega)} \frac{(\lambda+\omega,\alpha)}{(\lambda,\alpha)} \prod_{\alpha\in\Delta_0(\omega)} \frac{2(\lambda,\alpha)-|\alpha|^2}{2(\lambda,\alpha)+|\alpha|^2} \times$$

$$\prod_{\alpha\in\Delta_{-1}(\omega)} \frac{2((\lambda,\alpha)-|\alpha|^2)}{2(\lambda,\alpha)+|\alpha|^2} \prod_{\alpha\in\Delta_1(\omega)} \frac{2(\lambda,\alpha)-|\alpha|^2}{2((\lambda,\alpha)+|\alpha|^2)},$$

但し、$\lambda=\mu+\rho_k$, $\rho_k=\frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha\in\Sigma_k\\ \alpha>0}}\alpha$ 、$(\ ,\ )$ は $\mathfrak{h}_c$ の dual space 上での内積で Killing form trace $\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)$ $(X, Y\in\mathfrak{g}_c)$ で与えられたもの、

$\Delta_-(\omega)=\{\alpha\in\Sigma_k;\ \alpha>0,\ (\omega,\alpha)<0\}$,

$\Delta_0(\omega)=\{\alpha\in\Sigma_k;\ \alpha>0,\ (\omega,\alpha)=0,\ \omega+\alpha\in\Sigma\}$,

$\Delta_1(\omega)=\{\alpha\in\Sigma_k;\ \alpha>0,\ 2(\omega,\alpha)|\alpha|^{-2}=1,\ \omega+\alpha\in\Sigma\}$,

$\Delta_{-1}(\omega)=\{\alpha\in\Sigma_k;\ \alpha>0,\ 2(\omega,\alpha)|\alpha|^{-2}=-1,\ \omega-\alpha\in\Sigma\}$。

定理の証明は主として次に述べる2つの補題を用いて与される。$\mathfrak{h}$ の双対空間を $\mathfrak{h}^*$ とし、$\mathbb{R}[\mathfrak{h}^*]$ を実係数をもつ $\mathfrak{h}^*$ 上の多項式全体（即ち $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ を $\mathfrak{h}^*$ の基底、η を $\mathfrak{h}^*$ の一般な点とし $\eta = \sum_{i=1}^{l} \eta_i \beta_i$ と表わす。この時 $\mathbb{R}[\mathfrak{h}^*] = \mathbb{R}[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l]$），$\mathbb{R}(\mathfrak{h}^*)$ を $\mathbb{R}[\mathfrak{h}^*]$ の商体とする。ω を非 compact root とし $\mathbb{R}(\mathfrak{h}^*)$ の元 $f(\eta;\omega)$ を以下の様に定義する。$\Sigma_{\mathfrak{k}}$ の二つの root α, β $(\alpha+\beta \neq 0)$ に対し $\langle \alpha, \beta \rangle$ を次の様に定める；

$$\mathrm{ad}(X_\alpha) X_\beta = \langle \alpha, \beta \rangle X_{\alpha+\beta} \quad (\alpha+\beta \in \Sigma_{\mathfrak{k}}),$$
$$\langle \alpha, \beta \rangle = 0 \quad (\alpha+\beta \notin \Sigma_{\mathfrak{k}})。$$

$\Pi_p = \overbrace{P_{\mathfrak{k}} \times P_{\mathfrak{k}} \times \cdots \times P_{\mathfrak{k}}}^{p\text{個}}$，$P_{\mathfrak{k}} = \{ \alpha \in \Sigma_{\mathfrak{k}} ; \alpha > 0 \}$ とし $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ を Π_p の元とする。$R_\eta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$，$a_\omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ を各々

$$R_\eta(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = (|\eta+\alpha_1+\cdots+\alpha_p|^2 - |\eta|^2)^{-1},$$
$$a_\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \prod_{i=1}^{p} 2 |\langle \alpha_i, \omega+\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1} \rangle|^2$$ として定義し

$$(*) \quad f(\eta;\omega) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in\Pi_p} (-1)^p a_\omega(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \prod_{i=1}^{p} R_\eta(\alpha_1,\ldots,\alpha_i)$$

と置く。

補題 1. $|X_\omega \otimes v(\mu)|_\omega^2$ は $f(\eta;\omega)$ を用いて $\mathfrak{h}^*$ 上の有理函数に拡張される； $|X_\omega \otimes v(\mu)|_\omega^2 = f(\lambda+\omega;\omega)$，$\lambda = \mu + \rho_{\mathfrak{k}}$。

証明の概略： $\Omega_{\mathfrak{k}}$ を $\mathfrak{k}$ の Casimir 作用素とする。Ω は次の様

に表わされる。$H_1, H_2, \cdots, H_l$ を $\mathfrak{h}^*$ 上の自然な内積 $(\ ,\ )$ ($\mathfrak{g}_c$ の Killing form $\operatorname{trace} \operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Y)$, $X, Y \in \mathfrak{g}_c$ から誘導されたもの）に関する正規直交基底とし H_{ρ_k} を $(H, H_{\rho_k}) = \rho_k(H)$ が任意の $H \in \mathfrak{h}^*$ について成りたつ様に選ぶ。この時

$$\Omega_k = \sum_{i=1}^{l} H_i^2 + 2H_{\rho_k} + \sum_{\alpha\in P_k} 2X_{-\alpha}X_\alpha\text{。}$$

γ を非 compact root とする。Ω_k は $\mathfrak{k}_c$ の展開環の中心に属するから $\Omega_k(X_\gamma\otimes v(\mu))_\omega = (|\lambda+\omega|^2-|\rho_k|^2)(X_\gamma\otimes v(\mu))_\omega$。
一方 $\Omega_k(X_\gamma\otimes v(\mu))_\omega = (|\mu+\gamma|^2+2(\mu+\gamma, \rho_k))(X_\gamma\otimes v(\mu))_\omega$
$+\sum_{\alpha\in P_k} 2\langle\alpha,\gamma\rangle \pi_{\mu+\omega}(X_{-\alpha})(X_{\gamma+\alpha}\otimes v(\mu))_\omega$（上の Ω_k の表示式を用いる）。従って次の式を得る。

$$|X_\gamma\otimes v(\mu)|^2_\omega = (|\lambda+\omega|^2-|\lambda+\gamma|^2)^{-1}\sum_{\alpha\in P_k} 2|\langle\alpha,\gamma\rangle|^2\, |X_{\gamma+\alpha}\otimes v(\mu)|^2_\omega\text{。}$$

上式をくりかえし用いることにより

$$(**)\ |X_\gamma\otimes v(\mu)|^2_\omega = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)\in\Pi(\gamma;\omega)} a_\omega(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)\prod_{i=1}^{p} R_{\lambda+\gamma+\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}}(\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_p)\,|X_\omega\otimes v(\mu)|^2_\omega,$$

$$\Pi(\gamma;\omega) = \{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)\in\bigcup_{q=1}^{\infty}\Pi_q\ ;\ \operatorname{ad}(X_{\alpha_p})\cdots\operatorname{ad}(X_{\alpha_1})X_\gamma\in\mathfrak{g}_\omega-\{0\}\}$$

を得る。そこで $|X_\omega\otimes v(\mu)|^2_\omega = 1-\sum_{\gamma\in\Sigma_n}|X_\gamma\otimes v(\mu)|^2_\omega$
$=1-\sum_{\substack{\gamma<\omega\\ \gamma\in\Sigma_n}}|X_\gamma\otimes v(\mu)|^2_\omega$ となることに注目し root ω の順序に関する帰納法を用いれば補題 1 を得る。

補題 2. $f(\eta;\omega)$ は次の函数等式を満す。

(1) $\prod_{\alpha\in P_k}(\eta,\alpha)\, f(\eta+\omega;\omega) = \prod_{\alpha\in P_k}(\eta+\omega,\alpha)\, f(\eta;-\omega)$,

(2) $\prod_{\alpha\in P_k}(\eta+\omega,\alpha)(\eta,\alpha)^{-1} = f(\eta+\omega;\omega)\, f(-\eta-\omega;-\omega)$。

証明.

$\deg \pi_\mu = \prod_{\alpha\in P_k}(\lambda,\alpha)(\rho_k,\alpha)^{-1}$ $(\lambda=\mu+\rho_k)$ 及び X_γ $(\gamma\in\Sigma_n)$ に対し $(\mathrm{Ad}(k)X_\gamma, X_\gamma) = (\mathrm{Ad}(k)X_{-\gamma}, X_{-\gamma})$ が成りたつことに留意すれば、[1] の Main Theorem, 3) から次の式が導びかれる。

(1)$'$ $\prod_{\alpha\in P_k}(\lambda,\alpha)\,|X_\omega\otimes v(\mu)|^2_\omega = \prod_{\alpha\in P_k}(\lambda+\omega,\alpha)\,|X_{-\omega}\otimes v(\mu)|^2_{-\omega}$,

(2)$'$ $\sum_{\gamma\in P_k}|X_\gamma\otimes v(\mu)|^2_\omega = \prod_{\alpha\in P_k}(\lambda+\omega,\alpha)(\lambda,\alpha)^{-1}$。 (1)$'$ 及び

補題 1 から直ちに (1) を得る。又補題 1 の証明中の公式 $(**)$ から $\sum_{\gamma\in P_k}|X_\gamma\otimes v(\mu)|^2_\omega = f(\lambda+\omega;\omega)\, f(-\lambda-\omega;-\omega)$。従って (2) が示される。

(定理の証明の概略).

$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)\in\Pi_p$ に対し $\xi=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p$ と置くと

$R_\eta(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) = (|\eta+\xi|^2-|\eta|^2)^{-1} = (2(\eta,\xi)+|\xi|^2)^{-1}$。

$\tilde{\Delta}(\omega)$ を次の様に定めた $\mathfrak{h}^*$ の部分集合とする。

$\tilde{\Delta}(\omega) = \{\xi\in\mathfrak{h}^*;\ {}^{\exists}p,\ {}^{\exists}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)\in\Pi_p$ s.t. $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=\xi$,

$a_\omega(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)\neq 0\}$。

そこで $\xi\in\Delta(\omega)$ に対し $P_\xi(\eta)=2(\eta,\xi)+|\xi|^2$,

$P(\eta;\omega)=\prod_{\xi\in\Delta(\omega)}P_\xi(\eta)$ と置く。明らかに $P(\eta;\omega)\in\mathbb{R}[\mathfrak{G}^*]$,

又 $(*)$ から $p(\eta;\omega)f(\eta;\omega)$ は多項式と在る。

$g(\eta;\omega)=p(\eta;\omega)f(\eta;\omega)$ と置くと補題1の公式(1)から

$$(***)\quad \prod_{\alpha\in P_R}(\eta,\alpha)\,g(\eta+\omega;\omega)\,p(\eta;-\omega)=\prod_{\alpha\in P_R}(\eta+\omega,\alpha)\,g(\eta;-\omega)\,p(\eta+\omega;\omega)$$

を得る。root に関する性質から $p_\xi \mid \prod_{\alpha\in P_R}(\eta,\alpha)\,p(\eta;-\omega)$ となる ξ は P_R の root の定数倍に限ることが示される。そこで $(***)$ の両辺の割り算を行ない補題2の(2)及び $f(\eta;\omega)$ の0次，−1次の項の係数を調べることにより上記の定理を得る。

引用文献

[1] N. Tatsuuma ; Formal degree and Clebsh-Gordan coefficient, Journal of Math. Kyoto Univ., Vol 18, NO. 1, 1978。