数理解析研究所講究録
368巻 1979年 160-175

The Plancerel formula for Sp(n,ℝ)

職業訓練大　　佐野　茂

§§1　非退化連続主系列

§1-1　G を連結で中心有限, acceptable な実半単純 Lie 群とする。$\mathfrak{g}$ をその Lie 環, θ を $\mathfrak{g}$ 上の Cartan involution とする。$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{z}$ を θ に対応する Cartan 分解, K を部分環 $\mathfrak{k}$ に対応する極大コンパクト群とする。今, P=MAN を Langlands 分解された cuspidal Parabolic 部分群とする。θ-不変な Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ が存在して $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z}=\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$= LA(A))となる。H を $\mathfrak{h}$ に対応する Cartan 部分群とする, B=H∩K とおくと, B は M の コンパクト Cartan 部分群となる。ω を M の 2乗可積分な既約ユニタリ表現, ν を $\mathfrak{a}$ 上の純虚数値をとる正則な線形形式とする。
$\omega\otimes\nu$ を自然に P の表現に拡張して, G の表現

$$\pi(\omega,\nu) = \underset{P\uparrow G}{\mathrm{Ind}}\ \omega\otimes\nu$$

を定義する。既約ユニタリ表現となり, G の非退化連続主系列表現という。$\Theta(\omega,\nu)$ をその指標とする。$\Theta(\omega,\nu)$ は G 上局所可

積分関数で G'(Gの正則な元全体）上では実解析関数となる。

この論文では群 $G_n \cong Sp(n,\mathbb{R})$ を取りあつかうが，まず $\Theta(\omega,\nu)$を G_n 上で明確に与える。次に各Cartan 部分群上の Radon 変換の性質と，$\Theta(\omega,\nu)$ を構成する基本的単位となる関数を調べ，各単位ごとに Parseval 公式を用いる事により G_n 上の Plancherel公式を得る。

§1-2

$$H_n = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} \qquad I_n = \begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ 0_n & -1_n \end{pmatrix}$$

（ $1_n, 0_n$ は次数n の単位行列，零行列）とおく。群 $Sp(n,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{R})$ は

$$Sp(n,\mathbb{C}) = \left\{ g \in GL(2n,\mathbb{C}) \ ; \ {}^t g H_n g = H_n \right\}$$

$$Sp(n,\mathbb{R}) = \left\{ g \in GL(2n,\mathbb{R}) \ ; \ {}^t g H_n g = H_n \right\}$$

と定義される。$Sp(n,\mathbb{R})$ は $Sp(n,\mathbb{C})$ の実形式である。ここでは $Sp(n,\mathbb{R})$ と同型な次の群を考える。

$$G_n = \left\{ g \in Sp(n,\mathbb{C}) \ ; \ g^* I_n g = I_n \right\} \qquad (g^* = {}^t\bar{g})$$

以下 $G = G_n$，$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする。θ を $X = I_n X I_n$ ($X \in \mathfrak{g}$)で定義される $\mathfrak{g}$ 上の Cartan involution，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を対応する Cartan 分解とする。

k, ℓ, m を $k+2\ell+m=n$ を満足する負でない整数とする。次の θ－不変な Cartan 部分群の集合 $\left\{ H^{k,\ell}, \ 0 \leqslant k,\ell \ \ k+2\ell \leqslant n \right\}$ は G の自己同型で互いに共役とならない極大系列となる。

$H^{k,\ell} = H_+^{k,\ell} H_-^{k,\ell}$, 部分群 $H_+^{k,\ell}$, $H_-^{k,\ell}$ は次の元全体からなる。

$H_+^{k,\ell}$; $h_+ = \mathrm{diag}(e^{\sqrt{-1}\varphi_1}, e^{\sqrt{-1}\varphi_2}, \cdots, e^{\sqrt{-1}\varphi_k}; e^{\sqrt{-1}\theta_1}. e^{-\sqrt{-1}\theta_1}. e^{\sqrt{-1}\theta_2}, e^{-\sqrt{-1}\theta_2}, \cdots, e^{\sqrt{-1}\theta_\ell}, e^{-\sqrt{-1}\theta_\ell}; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_m$
$; e^{-\sqrt{-1}\varphi_1}, e^{-\sqrt{-1}\varphi_2}, \cdots, e^{-\sqrt{-1}\varphi_k}; e^{-\sqrt{-1}\theta_1}, e^{\sqrt{-1}\theta_1}, e^{-\sqrt{-1}\theta_2}, e^{\sqrt{-1}\theta_2}, \cdots, e^{-\sqrt{-1}\theta_\ell}, e^{\sqrt{-1}\theta_\ell}; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_m)$

$(\varphi_p,\ \theta_q \in \mathbb{R},\ \varepsilon_r = \pm 1)$

$$H_-^{k,\ell}\ ;\ h_- = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1_k &&&&& 0_k &&&& \\
& \mathrm{ch}\tau_1 1_2 &&&&& \mathrm{sh}\tau_1 J_2 &&& \\
&& \ddots &&&&& \ddots && \\
&&& \mathrm{ch}\tau_\ell 1_2 &&&&& \mathrm{sh}\tau_\ell J_2 & \\
&&&& \mathrm{ch}t_1 \ddots \mathrm{ch}t_m &&&&& \mathrm{sh}t_1 \ddots \mathrm{sh}t_m \\
\hline
0_k &&&&& 1_k &&&& \\
& \mathrm{sh}\tau_1 J_2 &&&&& \mathrm{ch}\tau_1 1_2 &&& \\
&& \ddots &&&&& \ddots && \\
&&& \mathrm{sh}\tau_\ell J_2 &&&&& \mathrm{ch}\tau_\ell 1_2 & \\
&&&& \mathrm{sh}t_1 \ddots \mathrm{sh}t_m &&&&& \mathrm{ch}t_1 \ddots \mathrm{ch}t_m
\end{array}\right)$$

但し, $J_2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $1_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$(\tau_q,\ t_r \in \mathbb{R})$

$h = h_+ h_- \in H^{k,\ell}$ の固有値は $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n ; \delta_1^{-1}, \delta_2^{-1}, \cdots, \delta_n^{-1})$

$$\begin{cases} \delta_p = e^{\sqrt{-1}\varphi_p} & (1 \leqslant p \leqslant k) \\ \delta_{k+2q-1} = e^{Z_q}, \quad \delta_{k+2q} = e^{\bar{Z}_q} & (1 \leqslant q \leqslant \ell) \qquad Z_q = \tau_q + \sqrt{-1}\theta_q \\ \delta_{k+2\ell+r} = \varepsilon_r e^{t_r} & (1 \leqslant r \leqslant m) \end{cases}$$

で与えられる。$\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$ を h の座標にとる。そして

$$\Delta^{k,\ell}(h) = \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant n} \{ (\delta_p + \delta_p^{-1}) - (\delta_q + \delta_q^{-1}) \} \prod_{1 \leqslant p \leqslant n} (\delta_p - \delta_p^{-1})$$

$$\Delta_R^{k,\ell}(h) = \prod_{1 \leqslant p \leqslant \ell} (1 - e^{-2\tau_p}) \prod_{1 \leqslant p \leqslant m} (1 - e^{-2t_p}) \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant m} (1 - \varepsilon_p \varepsilon_q e^{-t_p - t_q})(1 - \varepsilon_p \varepsilon_q e^{-t_p + t_q})$$

$$\varepsilon_R(h) = \mathrm{sgn}\, \Delta_R^{k,\ell}(h)$$

とおく。 δ_j に対応する微分作用素を x_j とする。すなわち,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \Phi_p} = \dfrac{1}{\sqrt{-1}} \dfrac{\partial}{\partial \varphi_p} \\ \dfrac{\partial}{\partial Z_q} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial \tau_q} + \dfrac{\partial}{\partial \Theta_q}\right), \quad \dfrac{\partial}{\partial \bar{Z}_q} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial \tau_q} - \dfrac{\partial}{\partial \Theta_q}\right), \quad \dfrac{\partial}{\partial \Theta_q} = \dfrac{1}{\sqrt{-1}} \dfrac{\partial}{\partial \theta_q} \\ \dfrac{\partial}{\partial t_r} \end{cases}$$

である。多項式

$$L(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \prod_{1\leq p<q\leq n}(y_p+y_q)(y_p-y_q)\prod_{1\leq p\leq n} y_p \ .$$

において，$H^{k,\ell}$上の微分作用素を

$$L^{k,\ell}(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \prod_{1\leq p<q\leq n}(X_p+X_q)(X_p-X_q)\prod_{1\leq p\leq n} X_p$$

で与える。又，$H^{k,\ell}$ の連結成分 $H_p^{k,\ell}$ $(0\leq p\leq m)$ を

$$H_p^{k,\ell} = \left\{ h\in H^{k,\ell} ;\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_p=1,\ \varepsilon_{p+1}=\varepsilon_{p+2}=\cdots=\varepsilon_m=-1 \right\}$$

とすると，Gの自己同型で互いに共役とならない極大系列となる。さらに

$$F_p^{k,\ell} = \left\{ h\in H_p^{k,\ell} ;\ \tau_r>0\ (1\leq r\leq \ell),\ t_1>t_2>\cdots>t_p>0,\ t_{p+1}>t_{p+2}>\cdots>t_m>0 \right\}$$

とおく。

Notation　次の関数を定義する。

(1,1) $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p$ 負でない整数。$\delta_1=e^{\sqrt{-1}\varphi_1}, \delta_2=e^{\sqrt{-1}\varphi_2}, \cdots, \delta_p=e^{\sqrt{-1}\varphi_p}$ $(\varphi_j\in \mathbb{R})$

$\ell_1\geq \ell_2\geq\cdots\geq \ell_p\geq 0$　$\nu_j=\pm 1,\ 1\leq j\leq p$

$$\xi_p(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_p;\nu_1\ell_1,\nu_2\ell_2,\cdots\nu_p\ell_p) = \det\left(\nu_i\delta_j^{\nu_i\ell_i}\right)_{1\leq i,j\leq p}$$
$$= \left|\nu_1\delta^{\nu_1\ell_1}, \nu_2\delta^{\nu_2\ell_2}, \ldots, \nu_p\delta^{\nu_p\ell_p}\right|_{\delta=\delta_1,\delta_2,\cdots\delta_p}$$

$${}^{+}\xi_p(\qquad) = \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_p}\xi_p(\qquad)$$

(1,2) $\ell_1\geq \ell_2\geq 0$, $\nu_1,\nu_2=\pm 1$, $\delta_1=e^{z}$, $\delta_2=e^{\bar{z}}$

$$\eta_2(\delta_1,\delta_2;\nu_1\ell_1,\nu_2\ell_2) = \begin{vmatrix} -\delta_1^{-\ell_1} & -\nu_1\nu_2\delta_1^{-\nu_1\nu_2\ell_2} \\ -\delta_2^{-\ell_1} & -\nu_1\nu_2\delta_2^{-\nu_1\nu_2\ell_2} \end{vmatrix}$$

$${}^{+}\eta_2(\qquad) = \sum_{\nu_1,\nu_2}\eta_2(\qquad)$$

(1,3) $\ell_1\geq \ell_2\geq 0$, $\nu_1,\nu_2=\pm 1$, $\delta_1=\varepsilon e^{t_1}$, $\delta_2=\varepsilon e^{t_2}$

$$\zeta_2(\delta_1,\delta_2;\nu_1\ell_1,\nu_2\ell_2) = \begin{vmatrix} -\delta_1^{-\ell_1} & -\delta_1^{-\ell_2} \\ -\delta_2^{-\ell_1} & -\nu_1\nu_2(\delta_2^{-\ell_2}+\delta_2^{\ell_2})+\delta_2^{\ell_2} \end{vmatrix}$$

$${}^{+}\zeta_2(\qquad) = \sum_{\nu_1,\nu_2}\zeta_2(\qquad)$$

(1,4) $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant 0\ ,\ \nu_1, \nu_2 = \pm 1\ ,\ \ \delta_1 = \varepsilon e^{t_1},\ \delta_2 = -\varepsilon e^{t_2}$

$$\chi(\delta_1, \delta_2; \nu_1\ell_1, \nu_2\ell_2) = \begin{vmatrix} -\delta_1^{-\ell_1} & -\delta_1^{-\ell_2} \\ -\delta_2^{-\ell_1} & -\delta_2^{-\ell_2} \end{vmatrix}$$

$${}^{+}\chi(\qquad) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \chi(\qquad)$$

$\ell_1 \geqslant 0,\ \nu_1 = \pm 1,\ \delta_1 = \varepsilon e^{t_1}$

$$\chi(\delta_1, \nu_1\ell_1) = -\delta_1^{-\ell_1}$$

$${}^{+}\chi(\qquad) = \sum_{\nu_1} \chi(\qquad)$$

(2,1) $\lambda = \dfrac{m + \sqrt{-1}\,\xi}{2}\ ,\ \bar{\lambda} = \dfrac{m - \sqrt{-1}\,\xi}{2}\ ,\ \ \delta_1 = e^{z},\ \delta_2 = e^{\bar{z}}\qquad (z = \tau + \sqrt{-1}\,\theta\quad \tau . \theta \in \mathbb{R})$

$m \geqslant 0$ 整数, $\xi \in \mathbb{R}$

$$H_2(\delta_1, \delta_2; \lambda, \bar{\lambda}) = (e^{-\sqrt{-1}m\theta} - e^{\sqrt{-1}m\theta})(e^{\sqrt{-1}\xi\tau} + e^{-\sqrt{-1}\xi\tau})$$

(2,2) $\delta_1 = \varepsilon e^{t_1},\ \delta_2 = \varepsilon e^{t_2}$

$$Z_2(\delta_1, \delta_2; \lambda, \bar{\lambda}) = 2 \begin{vmatrix} e^{\bar{\lambda}t_1} & e^{\bar{\lambda}t_2} + e^{-\bar{\lambda}t_2} \\ -e^{-\lambda t_1} & -e^{\lambda t_2} + e^{-\lambda t_2} \end{vmatrix} \varepsilon^{\lambda + \bar{\lambda}}$$

(3,1) $\lambda_j = (\epsilon_j, \rho_j)\qquad \epsilon_j = 0, 1\ ,\ \rho_j \in \mathbb{R}\qquad 1 \leqslant j \leqslant p$

$\delta_j = \varepsilon_j e^{t_j}\qquad (t_j \in \mathbb{R})$

$$\Xi_p(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_p; \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \prod_{j=1}^{p} \left(e^{\sqrt{-1}\rho_{\sigma(j)}t_j} + e^{-\sqrt{-1}\rho_{\sigma(j)}t_j}\right) \varepsilon_j^{\epsilon_{\sigma(j)}}$$

(S_p , p 次対称群)

k, ℓ, m(k+2ℓ+m=n) 固定する。 $k'+2\ell' \leqslant k+2\ell$, $k' \leqslant k$, $0 \leqslant j \leqslant m'$ ($k'+2\ell'+m'=n$) をみたす k', ℓ', m', j をとってくる。さらに $0 \leqslant p \leqslant \ell'$ を満足する p をとる。整数を成分とする順序付けられた集合を次の様に定義する。

$A = (a_1, a_2, \cdots, a_{k'})\qquad a_1 < a_2 < \cdots < a_{k'}$

$B = (b_1, b_2, \cdots, b_p)$

$C = (c_1, c_2, \cdots, c_p)\qquad b_i < c_i\quad (1 \leqslant i \leqslant p)$

$J = [j'/2]$, $I = [(k - k' - 2p - j')/2]\qquad \mathrm{Max}(j - m, 0) \leqslant j' \leqslant \mathrm{Min}(j, m' - m)$

$$\begin{cases} P=(p_1, p_2, \cdots, p_{J+I}) \\ Q=(q_1, q_2, \cdots, q_{J+I}) \end{cases} \qquad p_i<q_i$$

$r<s$　r は $2J=j'-1$ のとき整数を，$2J=j'$ のときは空集合 $\emptyset$ を表わすとする。s は $2I=k-k'-2p-j'-1$ のとき整数を，$2I=k-k'-2p-j'$ のときは空集合 $\emptyset$ を表わす。

$\bar{A}$ は集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{k'}\}$ を表わすとする。

$$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}\cup\bar{P}\cup\bar{Q}\cup\{r,s\}=\{1,2,\cdots,k\}$$

整数を成分とする順序付けられた集合 D,F を次の様に定義する。

$$\begin{cases} D=(d_1, d_2, \cdots, d_q) \\ F=(f_1, f_2, \cdots, f_{\ell-q}) \end{cases}$$

$$\bar{D}\cup\bar{F}=\{k+1, k+3, \cdots, K+2\ell-1\}$$

まとめて

$\mathfrak{A}=(A,B,C,P,Q,r,s,D,F)$

$\operatorname{sgn}\mathfrak{A}=\operatorname{sgn}(A,B\cdot C,P\cdot Q,r,s)$　但し，$B\cdot C=(b_1,c_1, b_2,c_2,\cdots,b_p,c_p)$

とおく。

さらに $q=\ell'-p$ とする。

$$\mathfrak{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p) \qquad \alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p$$

$$\mathfrak{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q) \qquad \beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_q$$

$$\bar{\mathfrak{A}}\cup\bar{\mathfrak{B}}=\{1,2,\cdots,\ell'\}$$

$$W_{j'}=(w_1, w_2, \cdots, w_{k-k'-2p})$$

$$w_1<w_2<\cdots<w_{k-k'-2p}$$

$$\{w_1, w_2, \cdots, w_{j'}\}\subset\{k'+2\ell'+1, k'+2\ell'+2, \cdots, k'+2\ell'+j'\}$$

$$\{w_{j'+1}, w_{j'+2}, \cdots, w_{k-k'-2p}\}\subset\{k'+2\ell'+j'+1, k'+2\ell'+j'+2, \cdots, n\}$$

$$U_{j'}=(u_1, u_2, \cdots, u_{J+I}) \qquad V_{j'}=(v_1, v_2, \cdots, v_{J+I})$$

$$\bar{v}_1<\bar{v}_2<\cdots<\bar{v}_{J+I} \qquad u_i<v_i \quad (1\leqq i\leqq J+I)$$

ここで w は $2J=j'-1$ のとき整数を，$2J=j'$ のときは ϕ を表わすとする。x は $2I=k-k'-2p-j'-1$ のとき整数を，$2I=k-k'-2p-j'$ のときは ϕ を表わす。

$$\{u_i, v_i\ (1\leqslant i\leqslant J),\ w\} = \{w_1, w_2, \cdots, w_{j'}\}$$

$$\{u_i, v_i\ (J+1\leqslant i\leqslant J+I), x\} = \{w_{j'+1}, w_{j'+2}, \cdots, w_{k-k'-2p}\}$$

$$\#\{u_i, v_i\ (1\leqslant i\leqslant J), w\} = j'$$

$$\#\{u_i, v_i\ (J+1\leqslant i\leqslant J+I), x\} = k-k'-2p-j'$$

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots \mathfrak{z}_{l-q}) \qquad \mathfrak{z}_1 < \mathfrak{z}_2 < \cdots < \mathfrak{z}_{l-q}$$

$$\mathfrak{bl} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{l-q}) \qquad \mathfrak{z}_i < \mathfrak{a}_i \quad (1\leqslant i\leqslant l-q)$$

$$\{\mathfrak{z}_i, \mathfrak{a}_i\} \subset \{k'+2l'+1, k'+2l'+2, \cdots, k'+2l'+j\}$$

又は $\{\mathfrak{z}_i, \mathfrak{a}_i\} \subset \{k'+2l'+j+1, k'+2l'+j+2, \cdots, n\}$

$$\ni = (\ni_1, \ni_2, \cdots, \ni_m)$$

$$\mathfrak{U}_{j'} \cup \mathfrak{V}_{j'} \cup \{w, x\} \cup \mathfrak{z} \cup \mathfrak{bl} \cup \ni = \{k'+2l'+1, k'+2l'+2, \cdots, n\}$$

まとめて $\mathfrak{U}_{j'} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W}_{j'}, \mathfrak{U}_{j'}, \mathfrak{V}_{j'}, w, x, \mathfrak{z}, \mathfrak{bl}, \ni)$ とおく

以上の準備の下に，

$F_j^{k',l'}$ 上の関数を次の様に定義する $h\in F_j^{k'l'}\ (\subset H_j^{k'l'})$

$$\tilde{K}_j^{k',l'}(h) \underset{\mathrm{def}}{=} (-1)^{k(k+1)/2} \sum_{\mathfrak{U}_0} \mathrm{sgn}\,\mathfrak{U} \sum_{\mathrm{Max}\{j-m,0\}\leqslant j'\leqslant \mathrm{Min}\{j, m'-m\}} \sum_{\mathfrak{U}_{j'}}$$

$$\xi_{k'}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{k'}; \lambda_{a_1}, \lambda_{a_2}, \cdots \lambda_{a_{k'}}) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \eta_2(\delta_{k'+2\alpha_i-1}, \delta_{k'+2\alpha_i}: \lambda_{b_i}, \lambda_{c_i})$$

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant J+I} \zeta_2(\delta_{u_i}, \delta_{v_i}: \lambda_{p_i}, \lambda_{q_i}) \chi(\delta_w, \delta_x: \lambda_r, \lambda_s) \prod_{1\leqslant i\leqslant q} H_2(\delta_{k'+2\beta_i-1}, \delta_{k'+2\beta_i}: \lambda_{d_i}, \lambda_{d_i+1})$$

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant l-q} Z_2(\delta_{\mathfrak{z}_i}, \delta_{\mathfrak{a}_i}; \lambda_{f_i}, \lambda_{f_i+1}) \quad \Xi_m(\delta_{\ni_1}, \delta_{\ni_2}, \cdots, \delta_{\ni_m}; \lambda_{k+2l+1}, \lambda_{k+2l+2}, \cdots, \lambda_n)$$

$$\prod_{1\leq i\leq m'}(-1)^{k'm'}\ \varepsilon_i^{m'+k'+1-i}\prod_{1\leq i\leq k-k'-2p}(-1)^{k'(k-k'-2p)}\ \varepsilon_{w i-k'-2l'}^{k-2p+1-i}\prod_{1\leq i\leq l-q}\varepsilon_{\sigma i-k'-2l'}$$

但し，$p+q=l$

$$\begin{cases}\delta_i=e^{\sqrt{-1}\varphi_i} & 1\leq i\leq k\\ \delta_{k+2i-1}=e^{z_i},\quad \delta_{k+2i}=e^{\bar{z}_i} & 1\leq i\leq l\\ \delta_{k+2l+i}=\varepsilon_i e^{t_i} & 1\leq i\leq m\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_i=\nu_i l_i,\quad \nu_i=\pm 1 & 1\leq i\leq k\\ \lambda_{k+2i-1}=(m_i,\sqrt{-1}\xi_i),\ \lambda_{k+2i}=(m_i,-\sqrt{-1}\xi_i) & 1\leq i\leq l\\ \lambda_{k+2l+i}=(\epsilon_i,\sqrt{-1}\rho_i) & 1\leq i\leq m\end{cases}$$

定理1　$G'=\bigcup_{x\in G}\ \bigcup_{k+2l+m=n}\ \bigcup_{0\leq p\leq m}x(F_p^{k,l})'x^{-1}$ が成立するから，$g\in G'$ と共役な元を $hg\in(F_p^{k,l})'$ で表わすことにする。このとき G 上の関数を

$$\Theta(\omega(\nu_1 l_1,\cdots,\nu_k l_k;m_1,\cdots m_l;\epsilon_1,\cdots\epsilon_m),\nu(\xi_1,\cdots\xi_l;\rho_1,\cdots,\rho_m))(g)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\tilde{K}_j^{k',l'}(hg)}{\Delta^{k',l'}(hg)} & hg\in(F_j^{k',l'})' \quad 0\leq k'\leq k,\ 0\leq l'\\ & \qquad k'+2l'\leq k+2l\\ 0 & その他\end{cases}$$

で定義する。不変固有超関数となる。特に $l_1>l_2>\cdots>l_k>0$, $m_1>0, m_2>0,\cdots,m_l>0$, $\xi_1>0,\xi_2>0,\cdots,\xi_l>0,\rho_1>\rho_2>\cdots>\rho_m>0$ の場合既約ユニタリ表現，非退化連続主系列の指標を表わす。$l,m=0$ のときは離散系列，$k,l=0$ のときは連続系列の指標となる $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_k$ に関する和を

$${}^{+}\Theta(\omega(l_1,\cdots l_k;m_1,\cdots,m_l;\epsilon_1,\cdots\epsilon_m),\nu(\xi_1,\cdots,\xi_l;\rho_1,\cdots\rho_m))=\sum_{\nu_1,\nu_2,\cdots\nu_k}\Theta(\omega(\nu_1 l_1,\cdots\nu_k l_k;m_1,\cdots m_l;\epsilon_1,\cdots\epsilon_m),\nu(\xi_1,\cdots\xi_l;\rho_1,\cdots\rho_m))$$

とおく。

§2. Fourier変換

Notation §1-2 で与えたNotationに対応して次の関数を定義する。

(1,1) $\ell_1 \geqq \ell_2 \geqq \cdots \geqq \ell_p \geqq 0$

$$ {}^{+}\xi'_p(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_p\,;\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_p)=\sum_{\sigma\in S_p}\left(\delta_{\sigma(1)}^{\ell_1}+\delta_{\sigma(1)}^{-\ell_1}\right)\left(\delta_{\sigma(2)}^{\ell_2}+\delta_{\sigma(2)}^{-\ell_2}\right)\cdots\left(\delta_{\sigma(p)}^{\ell_p}+\delta_{\sigma(p)}^{-\ell_p}\right) $$

(1,2)

$$ {}^{+}\mathfrak{z}'_2(\delta_1,\delta_2;\ell_1,\ell_2)=\begin{vmatrix}\delta_1^{-\ell_1} & 2(\delta_1^{\ell_2}+\delta_1^{-\ell_2})\\ -\delta_2^{-\ell_1} & 2(\delta_2^{\ell_2}+\delta_2^{-\ell_2})\end{vmatrix} $$

(1,3)

$$ {}^{+}\zeta'_2(\delta_1,\delta_2;\ell_1,\ell_2)=4\begin{vmatrix}\delta_1^{-\ell_1} & \delta_1^{-\ell_2}\\ -\delta_2^{-\ell_1} & \delta_2^{\ell_2}\end{vmatrix} $$

(1,4)

$$ {}^{+}\chi'(\delta_1,\delta_2;\ell_1,\ell_2)=4\begin{vmatrix}\delta_1^{-\ell_1} & \delta_1^{-\ell_2}\\ -\delta_2^{-\ell_1} & \delta_2^{-\ell_2}\end{vmatrix} $$

$$ {}^{+}\chi(\delta_1,\ell_1)=2\delta_1^{-\ell_1} $$

(2,1)

$$ H'_2(\delta_1,\delta_2;\lambda,\bar{\lambda})=\left(e^{\sqrt{-1}m\theta}+e^{-\sqrt{-1}m\theta}\right)\left(e^{\sqrt{-1}\xi\tau}-e^{-\sqrt{-1}\xi\tau}\right) $$

(2,2)

$$ \begin{aligned} Z'_2(\delta_1,\delta_2;\lambda,\bar{\lambda})=\ & 2e\left(-m\frac{t_1-t_2}{2}\right)\left\{e\left(\sqrt{-1}\xi\frac{t_1+t_2}{2}\right)-e\left(-\sqrt{-1}\xi\frac{t_1+t_2}{2}\right)\right\}\varepsilon^m\\ & -2e\left(-m\frac{t_1+t_2}{2}\right)\left\{e\left(\sqrt{-1}\xi\frac{t_1-t_2}{2}\right)-e\left(\sqrt{-1}\xi\frac{t_1-t_2}{2}\right)\right\}\varepsilon^m \end{aligned} $$

($e(x)=e^x$ で表わした)

(3,1)

$$ \Xi'_p(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_p;\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)=\sum_{\sigma\in S_p}\operatorname{sgn}\sigma\prod_{j=1}^{p}\left(e^{\sqrt{-1}\lambda_{\sigma(j)}t_j}-e^{-\sqrt{-1}\lambda_{\sigma(j)}t_j}\right)\varepsilon_j^{\ell_{\sigma(j)}} $$

さらに，Fourier変換に関係して次の関数を定義する。

（Notation に歴史をもたせておいた）

(1,2)

$$ {}^{+}\hat{\zeta}'_{2}(m,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\coth \pi\xi/2}{4\sqrt{-1}} & m \in \mathbb{Z}_0 \qquad \mathbb{Z}_0 = 2\mathbb{Z} \\ \dfrac{\tanh \pi\xi/2}{4\sqrt{-1}} & m \in \mathbb{Z}_1 \qquad \mathbb{Z}_1 = 2\mathbb{Z}+1 \end{cases} $$

そして　${}^{+}\hat{\zeta}'_{2}(\xi;\mathbb{Z}_p) = {}^{+}\hat{\zeta}'_{2}(m,\xi) \quad m \in \mathbb{Z}_p \quad (p=0,1)$

とおく

(1,3)

$$ {}^{+}\hat{\zeta}'_{2}(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{8}\{2\coth\pi\rho_2 \coth\pi(\rho_1+\rho_2)-1\} & \varepsilon=1 \\ \frac{1}{4}\coth\pi\rho_2 \ \mathrm{cosech}\,\pi(\rho_1+\rho_2) & \varepsilon=-1 \end{cases} $$

(1,4)

$$ {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,-\varepsilon) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\coth\pi\rho_1 \ \mathrm{cosech}\,\pi\rho_2 & \varepsilon=1 \\ -\frac{1}{4}\mathrm{cosech}\,\pi\rho_1 \ \coth\pi\rho_2 & \varepsilon=-1 \end{cases} $$

$$ {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon_1) = \begin{cases} \dfrac{\coth\pi\rho_1}{2\sqrt{-1}} & \varepsilon_1 = 1 \\ \dfrac{\mathrm{cosech}\,\pi\rho_1}{2\sqrt{-1}} & \varepsilon_1 = -1 \end{cases} $$

とおくと

${}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,-\varepsilon) = {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon)\ {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_2,-\varepsilon)$ が成立。

(2,2)

$$ \hat{Z}'_2(\eta;\varepsilon;\mathbb{Z}_0) = \frac{\coth\frac{\pi\eta}{2}}{4\sqrt{-1}} $$

$$ \hat{Z}'_2(\eta;\varepsilon;\mathbb{Z}_1) = \frac{\tanh\frac{\pi\eta}{2}}{4\sqrt{-1}}\varepsilon $$

$\{l_1, l_2, \cdots, l_p\}$ 上の変換群

W_p $\left\{ \begin{array}{ll} l_1, l_2, \cdots l_p \text{ の permutation} & \\ l_j \to -l_j \quad \text{transformation} & (1 \leq j \leq p) \end{array} \right\}$ より生成される

とし，$l_1, l_2, \dots l_p$ のパラメーターをもつ関数 f に対して，和を次の様に定義する。

$$\sum_{Sg(l_1>l_2>\cdots>l_p>0)} f(l_1, l_2, \cdots, l_p) \underset{def}{=} \sum_{l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_p \geq 0} \frac{1}{|W(l_1, l_2, \cdots, l_p)|} f(l_1, l_2, \cdots, l_p)$$

但し，$W(l_1, l_2, \dots, l_p) = \{w \in W_p ; w(l_1, l_2, \dots l_p) = (l_1, l_2, \cdots, l_p)\}$

すなわち，等号の数を g とすると

$$|W(l_1, l_2, \cdots, l_p)| = 2^g \cdot g.$$

補題2.1　$F \in C_0(\mathbb{C}^*) \cap C^1(\mathbb{C}^+) \cap C^1(\mathbb{C}^-)$　($\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, $\mathbb{C}^+$ 上半平面, $\mathbb{C}^-$ 下半平面),

$F(e^z) = -F(e^{-z})$ を満たすとする。

$$\sum_{Sg(l_1>l_2>0)} \int_{\substack{\tau>0 \\ \theta \in [-\pi, \pi]}} F(e^z)\, {}^{+}\mathfrak{Z}'_2(e^z, e^{\bar{z}}; l_1, l_2)\, d\theta d\tau \qquad (z = \tau + \sqrt{-1}\theta)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} \hat{F}(m, \xi)\, {}^{+}\hat{\mathfrak{Z}}'_2(m, \xi)\, d\xi$$

$$= \sum_{P=0.1} \sum_{m \in \mathbb{Z}_p} \int_{\xi \in \mathbb{R}} \hat{F}(m, \xi)\, {}^{+}\hat{\mathfrak{Z}}'_2(\xi, \mathbb{Z}_p)\, d\xi \qquad \text{が成立}$$

但し，
$$\hat{F}(m, \xi) = \int_{\substack{\tau \in \mathbb{R} \\ \theta \in [-\pi, \pi]}} F(\theta, \tau) e^{\sqrt{-1}(\xi\tau + m\theta)} d\theta d\tau$$

補題2.2　$F \in C_0^1(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)$ ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$) は次の対称性を満足するものとする。

$$F(\varepsilon e^{t_1}, \varepsilon e^{t_2}) = -F(\varepsilon e^{-t_1}, \varepsilon e^{t_2}) = -F(\varepsilon e^{t_2}, \varepsilon e^{t_1})$$

$$\sum_{Sg(l_1>l_2>0)} \int_{t_1>t_2>0} F(\varepsilon e^{t_1}, \varepsilon e^{t_2})\ {}^{+}\zeta_2'(\varepsilon e^{t_1}, \varepsilon e^{t_2}; l_1, l_2)\, dt_1 dt_2$$

$$= \int_{\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}} \hat{F}(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,\varepsilon)\ {}^{+}\hat{\zeta}_2'(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,\varepsilon)\, d\rho_1 d\rho_2$$

が成立。但し，$\hat{F}(\rho_1,\varepsilon_1;\rho_2,\varepsilon_2) = \int_{t_1,t_2\in\mathbb{R}} F(\varepsilon_1 e^{t_1}, \varepsilon_2 e^{t_2})\, e^{\sqrt{-1}(\rho_1 t_1 + \rho_2 t_2)}\, dt_1 dt_2$

補題2.3　(1) $F\in C_0^1(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*)$ は次の対称性を満足するものとする。

$$F(\varepsilon e^{t_1}, -\varepsilon e^{t_2}) = -F(\varepsilon e^{t_1}, -\varepsilon e^{t_2}) = -F(\varepsilon e^{t_1}, -\varepsilon e^{-t_2}) = F(-\varepsilon e^{t_2}, \varepsilon e^{t_1})$$

$$\sum_{Sg(l_1>l_2>0)} \int_{t_1,t_2>0} F(\varepsilon e^{t_1}, -\varepsilon e^{t_2})\ {}^{+}\chi_2'(\varepsilon e^{t_1}, -\varepsilon e^{t_2}; l_1, l_2)\, dt_1 dt_2$$

$$= \int_{\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}} \hat{F}(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,-\varepsilon)\ {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,-\varepsilon)\, d\rho_1 d\rho_2$$

が成立

(2)　$F\in C_0^1(\mathbb{R}^*)$ は次の対称性を満足するものとする。

$$F(\varepsilon e^{t_1}) = -F(\varepsilon e^{-t_1})$$

$$\sum_{Sg(l_1>0)} \int_{t_1>0} F(\varepsilon e^{t_1})\ {}^{+}\chi'(\varepsilon e^{t_1}; l_1)\, dt_1$$

$$= \int_{\rho_1\in\mathbb{R}} \hat{F}(\rho_1,\varepsilon)\ {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon)\, d\rho_1$$

が成立。

補題2.4　$F \in C_0(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)$　補題2.2の対称性を満たすとする。

$$\sum_{\substack{Sg(m>0) \\ m \in \mathbb{Z}_p}} \int_{t_1 > t_2 > 0} F(\varepsilon e^{t_1}, \varepsilon e^{t_2})\, Z_2'(\varepsilon e^{t_1}, \varepsilon e^{t_2}; \lambda_1, \lambda_2)\, dt_1 dt_2$$

$$= \int_{\eta \in \mathbb{R}} \hat{F}\left(\frac{\sqrt{-1}(\eta+\xi)}{2}, \varepsilon; \frac{\sqrt{-1}(-\eta+\xi)}{2}, \varepsilon\right) \hat{Z}_2'(\eta; \varepsilon; \mathbb{Z}_p)\, d\eta \qquad (P=0.1)$$

が成立。但し，$\hat{F}\left(\frac{\sqrt{-1}(\eta+\xi)}{2}, \varepsilon; \frac{\sqrt{-1}(\eta+\xi)}{2}, \varepsilon\right) = \int_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} F(\varepsilon e^{t_1}, \varepsilon e^{t_2})\, e\left(\frac{\sqrt{-1}(\eta+\xi)}{2} t_1 + \frac{\sqrt{-1}(-\eta+\xi)}{2} t_2\right) dt_1 dt_2$

補題2.5　$F \in C_0(\mathbb{C}^*) \cap C^1(\mathbb{C}^+) \cap C^1(\mathbb{C}^-)$　補題2.1の対称性を満たすとする。

$$\sum_{Sg(m>0)} \int_{\substack{\theta \in [-\pi, \pi] \\ \tau > 0}} F(e^z)\, H_2'(e^z, e^{\bar{z}}; \lambda_1, \lambda_2)\, d\theta d\tau$$

$= \hat{F}(m, \xi)$　が成立。

§§3　Plancherel 公式

dg を G 上の正規化された Haar 測度，$H^{k,l}$ 上の Haar 測度を

$$d^{k,l}h = d\varphi_1 d\varphi_2 \cdots d\varphi_k d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_l d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_l dt_1 dt_2 \cdots dt_m$$

で定義する。$d^{k,l}\dot{g}$ を $G/H^{k,l}$ 上の左不変測度で $dg = d^{k,l}\dot{g}\, d^{k,l}h$ を満足するものとする。$f \in C_0^\infty(G)$ に対して $(H^{k,l})'$ 上の関数

$$K_f^{k.l}(h) = \varepsilon_R^{k.l}(h)\ \mathrm{conj}\,\Delta^{k.l}(h) \int_{G/H^{k.l}} f(ghg^{-1})\, d^{k.l}\tilde{g} \qquad (h \in (H^{k.l})')$$

を定義すると

$$\int_G f(g)\,dg = \sum_{k.l} \alpha^{k.l} \int_{(H^{k.l})'} K_f^{k.l}(h)\ \varepsilon_R^{k.l}(h)\, \Delta^{k.l}(h)\, d^{k.l}h$$

$$\alpha^{k.l} = 1/|W(G.H^{k.l})|$$

が成立。

補題3.1 $f \in C_0^\infty(G)$に対して，$\left(c = \dfrac{\pi^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{p=0}^{n}(n-p)!}{2\sqrt{2}\,(n+1)^{n(n+1)/2}},\ g = \dfrac{1}{2}n(3n+2)\right.$ をとる$\left.\right)$ $L^{n,0}K_f^{n.0}(e) = (-1)^g c f(e)$ （eはGの単位元）が成立。

ⒽをG上の不変固有超関数とする。G'上解析関数Ⓗ(g)が存在して

$$(Ⓗ, f) = \int_{G'} f(g)\,Ⓗ(g)\,dg \qquad (f \in C_0^\infty(G))$$

となる。

$$K^{k.l}(h) = \varepsilon_R^{k.l}(h)\, \Delta^{k.l}(h)\, Ⓗ(h) \qquad (h \in (H^{k.l})')$$

とおくと

$$\int_{G'} f(g)\,Ⓗ(g)\,dg = \sum_{k.l} \alpha^{k.l} \int_{(H^{k.l})'} K_f^{k.l}(h)\ K^{k.l}(h)\, dh$$

が成立。

補題3.2 $f \in C_0^\infty(G)$に対して次式が成立

$$\sum_{k.l} \alpha^{k.l} \int_{(H^{k.l})'} L^{k.l}K_f^{k.l}(h)\ L^{k.l}K^{k.l}(h)\, d^{k.l}h = (-1)^{n^2} L(\mu)^2\,(Ⓗ, f)$$

ここでμは$\textcircled{H}$の無限小指標によって決まる線形形式（T.Hirai [2]参照），$L(\mu)$はk, ℓによらず一定。

補題3.3　$f \in C_0^\infty(G)$に対して

$$\sum_{k,\ell} \alpha^{k.\ell} \int_{(H^{k.\ell})'} L^{k.\ell} K_f^{k.\ell}(h)\, {}^{k.\ell}K'(h)\, dh = L(\mu)(\textcircled{H}, f)$$

但し，${}^{k.\ell}K' = L^{k.\ell}(\mu^{k.\ell})^{-1} L^{k.\ell} K^{k.\ell}$，この式は前の補題3.2より無限小指標が正則の時成立するが，正則でない場合にも成立する。

定理2　$f \in C_0^\infty(G)$に対して次式が成立

$$f(e) = \sum_{\substack{0 \leq k, \ell \\ k+2\ell+m=n}} C(k.\ell) \sum_{\substack{\ell_1 > \ell_2 > \cdots > \ell_k > 0 \\ m_1 > 0 \cdots m_\ell > 0 \\ \epsilon_1, \cdots, \epsilon_m = 0.1}} \int_{\substack{\xi_1 > 0, \cdots, \xi_\ell > 0 \\ \rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_m > 0}} \left| L\left(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_k, \frac{m_1 + \sqrt{-1}\xi_1}{2}, \frac{m_1 - \sqrt{-1}\xi_1}{2}, \cdots, \frac{m_\ell + \sqrt{-1}\xi_\ell}{2}, \frac{m_\ell - \sqrt{-1}\xi_\ell}{2}, \sqrt{-1}\rho_1, \sqrt{-1}\rho_2, \cdots, \sqrt{-1}\rho_m\right) \right|$$

$$\prod_{0 \leq p \leq \ell} \gamma(\xi_p; m_p - 1) \prod_{1 \leq p < q \leq m} \gamma(\rho_p + \rho_q; \epsilon_p + \epsilon_q)\, \gamma(\rho_p - \rho_q; \epsilon_p - \epsilon_q)$$

$$\prod_{0 \leq p \leq m} \gamma(\rho_p; k + \epsilon_p) \left({}^{+}\textcircled{H}\left(\omega(\ell_1, \cdots, \ell_k, m_1, \cdots, m_\ell, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_m), \nu(\xi_1, \cdots, \xi_\ell, \rho_1, \cdots, \rho_m)\right), f\right)$$

$$d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_\ell\, d\rho_1 d\rho_2 \cdots d\rho_m$$

但し，

$$\gamma(\xi; P) = \begin{cases} \tanh \dfrac{\pi\xi}{2} & P \equiv 0 \pmod 2 \\[2ex] \coth \dfrac{\pi\xi}{2} & P \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

$C(k.\ell)$　正の定数。

文　献

Harish-Chandra ; [1] Discrete series for semisimple Lie groups I, II, Acta math., 113(1965), 241-318;116(1966), 1-111.

T. Hirai ; [1] The Plancherel formula for SU(p,q), J. Math. Soc. Japan., 22(1970), 134-179.

[2] Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, II. General theory for semisimple Lie groups, Japan.J.Math., New Ser. 2 (1976), 27-89.

[3] ----, IV. Explicit forms of the characters of discrete series representations for Sp(n,R), Japan. J. Math., New Ser. 3 (1977), 1-48.

M. Sugiura ; [1] Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras, J.Math.Soc.Japan, 11(1959) 374-434.