数理解析研究所講究録
368 巻 1979 年 125-137

$SO_0(n,1)$ 上の球函数に随伴する Harish-Chandra 級数の積分表示について

早大 理工　大豆生田 雅一

§1 序

ここで半単純 Lie 群 G（連結かつ中心有限）上の (τ_1,τ_2) 球函数 $E(\lambda, v, g)$ とは次の様に定義された G 上の C^∞ 関数を意味するものとする。

K を G の 1 つの極大 compact 部分群，$G=KAN$ 及び $g\in G$　$g=k(g)\exp H(g)\,n(g)$ を岩沢分解とする。次に K の有限次元表現 (τ_i, V_i) $i=1,2$ に対して

$V=\mathrm{Hom}(V_2, V_1)$，$V_M=\{v\in V \ \ \tau_1(m)v=v\tau_2(m),\ \forall m\in M\}$，但し，$M$ は A の K に於ける中心化群とする。

A の Lie 環 $\mathfrak{a}$ 上の $\mathbb{C}$-値線型写像の全体を $\mathfrak{a}_c^*$ と書くと

$\lambda\in\mathfrak{a}_c^*$，$v\in V_M$，$g\in G$ に対して $E(\lambda, v, g)$ を次の様に定義する。

(1)　$$E(\lambda, v, g)=\int_K e^{(\lambda-\rho)H(gk)}\,\tau_1(k(gk))\,v\,\tau_2(k^{-1})\,dk.$$

ここで $\rho\in\mathfrak{a}_c^*$ は $ad(H)$ の N の Lie 環 $\mathfrak{n}$ への制限

の trace の半分. すなわち $\rho(H) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(H)|\mathfrak{n})$
λ, dk は K 上の normalized Haar measure.
$\mathfrak{a}^+$ を $\mathfrak{a}$ の1つの Weyl chamber. W を対 (G, A) に関する Weyl 群とした時 $E(\lambda, v, \exp H)$ $(H \in \mathfrak{a}^+)$ は次の様な級数展開を持つことが知られている。(Harish-Chandra [1])

Prop. 1 (Harish-Chandra) $\mathfrak{a}_c^*$ の open, connected, dense, W-stable な部分集合 $\mathcal{O}$ と $w \in W$ に対して holomorphic な関数 c_w $\mathcal{O} \to \mathrm{Hom}(V_M, V_M)$ が存在して. $H \in \mathfrak{a}^+$, $v \in V_M$, $\lambda \in \mathcal{O}$ に対して

$$E(\lambda, v, \exp H) = \sum_{w \in W} \Phi(w\lambda, H)\, c_w(\lambda) v.$$

さらに Φ は $\mathfrak{a}_c^*$ の lattice $\mathcal{L}$ を適当に選ぶと, 各 $\nu \in \mathcal{L}$ に対して rational な関数 Γ_ν $\mathfrak{a}_c^* \to \mathrm{Hom}(V_M V_M)$ が定義され, 次の様な級数によって表わされる。

$$\Phi(\lambda, H) = e^{(\lambda-\rho)(H)} \sum_{\nu \in \mathcal{L}} \Gamma_\nu(\lambda)\, e^{-\nu(H)}$$

このとき, $\Phi(\lambda, H)$ を $E(\lambda, v\ g)$ に随伴する Harish-Chandra 級数と呼び, 上の展開をこの Harish-Chandra 展開と言うことにする。以下では G が一般 Lorentz 群 $SO_0(n, 1)$ の場合に Φ が $E(\lambda, v, g)$ と類似の

積分表示を持つことを示す。$G = SO_0(n,1)$ ならば $\mathfrak{a}$ の次元は1であるから，適当に $H \in \mathfrak{a}$ を選んで，

$\mathfrak{a} = \mathbb{R}H$. $\mathfrak{a}^+ = \{tH\,;\ t>0\}$ $H(g) = t(g)H$. $g \in G$.

又，$\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$ を $s = \lambda(H) \in \mathbb{C}$ によって $\mathbb{C}$ と同一視する。そこで，これに応じて $\Phi(\lambda, tH) = \Phi(s, t)$，又，$E(\lambda, v, \exp(tH)) = E(s, v, t)$ 等と書く。この時，$\Phi(s, t)$ の積分表示は次の様になる。

Prop. 2. K の Lie 環 $\mathfrak{k}$ の複素化 $\mathfrak{k}_c$ の $GL(n+1, \mathbb{C})$ に属する analytic subgroup を K_c とする。

(i) K_c の noncompact real form L (すなわち $\mathfrak{k}_c$ の real form $\mathfrak{l}$ を Lie 環に持つ K_c の analytic subgroup) が存在して，函数 $k \mapsto e^{(s-\rho)t(a_t k)} \tau_1(k(a_t k)) v\, \tau_1(k^{-1})$ ($t>0$ 固定する。) は K と L を含む K_c の開集合に解析接続出来る。

(ii) 適当な $r \in \mathbb{R}$ が存在して，$\mathrm{Re}(s) < r$ ならば 積分

(2) $\displaystyle\int_L e^{(s-\rho)t(a_t l)} \tau_1(k(a_t l)) v\, \tau_1(l^{-1})\, dl$

は各，$t>0$，$v \in V_H$ に対して絶対収束し，t の関数として C^∞，又 s の関数として $\mathrm{Re}(s) < r$ で holomorphic.

又，(2) を $F(s, t)v$ と書くと $v \to F(s, t)v$ は $\mathrm{Hom}(V_H, V_H)$ の元 $F(s, t)$ を定義する。

(iii) さらに $\mathrm{Re}(s)<r$ のとき, $c(s)=\lim_{t\to+\infty} e^{(-s+\rho)t}F(s,t)$ が存在して, $s\mapsto c(s)$, $s\mapsto F(s,t)$ は $\mathbb{C}$ 上 $\mathrm{Hom}(V_M,V_M)$ 値 meromorphic な函数に解析接続出来る。

(iv) $t>0$ を固定した時, 次の等式が s の meromorphic な関数として成立する。

$$\Phi(s,t)\,c(s)=F(s,t)$$

§2. $\Phi(s,t)$ の満す微分方程式.

$\mathfrak{Z}$ を G 上の両側不変な微分作用素全体の作る $\mathbb{C}$ 上の代数. $Z\in\mathfrak{Z}$ に対して, $\varphi_A(Z)$ を, [3] の9章の意味での "radial part". [3] 9章の記号を用いれば, Φ の満す微分方程式は,

(i): $\varphi_A(Z)\Phi(s,t)=\Phi(s,t)\,\tau_2(\Omega(Z,s))\quad Z\in\mathfrak{Z}$

さらに,

(ii) $\lim_{t\to+\infty} e^{(-s+\rho)t}\Phi(s,t)=id_{V_M}$

が成立する。このとき, $\varphi_A(Z)$ $(Z\in\mathfrak{Z})$ は t に関する常微分作用素となり, 特に $Z=\omega$: Casimir 作用素であるとき, $x=e^{-t}$ と変数変換すると $x=0$ で確定特異点を持つ2階の常微分作用素となる。 従って $\Phi(s,t)$ は上の条件 (i), (ii) によって特徴付けられる。すなわち, $\mathrm{Hom}(V_M,V_M)$ に値を持つ $\{t\in\mathbb{R}\ t>0\}$ 上の関数

$F(s,t)$ が次の条件

(ii)′ $\mathfrak{g}_A(\omega)F(s,t) = F(s,t)\,\tau(\Omega(\omega,s))$　　$t>0$

(iii)′ $\lim_{t\to+\infty} e^{(-s+\rho)t}F(s,t) = C(s)$ が存在する。

を満すならば

$$F(s,t) = \Phi(s,t)\,C(s) \qquad t>0$$

となる。

従って Prop 2 の(iv)は Prop 2 の(i)〜(iii)及び次の Lemma 1 が成立すれば，微分方程式(ii)′が満されることを示せば証明出来る。

Lemma 1. $t>0$ を固定した時 $s \to \Phi(s,t)$ は $\mathbb{C}$ 上 meromorphic な解析接続をもつ。

実は，より詳しく次の Lemma 2 が証明出来る。

Lemma 2. $\omega\in W$ C_ω を Prop 1 と同じ行列とする。このとき $s \to C_\omega(s)$ は $\mathrm{Hom}(V_M, V_M)$ 値 $\mathbb{C}$ 上 meromorphic に解析接続出来る，さらに，

$s \to \Phi(\omega s,t)\,C_\omega(s)$，　$s \to C_\omega(s)^{-1}$(逆行列)

も同様に meromorphic に解析接続出来，$s\to\Phi(\omega s\ t)C_\omega(s)$ の特異点は高々1位の極で，$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (半整数全体)に含ま

れる。

証明は長くなるので、概略のみ示す。まず C_ω $(\omega \in W)$ に関しては、$G = SO_0(n, 1)$ の non-unitary principal series の intertwining operator の計算に帰着される。このとき、C_ω の性質を導く議論は intertwining operator のそれと同じである。([4] 及び [3] の Chap. 9) さらに $G = SO_0(n, 1)$ の時、lattice $\mathcal{L}$ は $\{0, 1, 2 \cdots\}$ と同一視出来、

$$\Phi(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(s-\rho)t} e^{-kt} \Gamma_k(s)$$

となる。又、$\{\Gamma_k(\omega s) C_\omega(s) \quad \omega \in W \quad k = 0, 1, 2 \cdots\}$ のすべての特異点の集合は $\mathbb{C}$ の収積点を持たない discrete な部分集合となる。又、$\mathrm{Hom}(V_M, V_M)$ の operator norm を $\|\cdot\|$ と書くことにすると、$\mathcal{O}(T_1, T_2)$ の任意の compact な集合 B に対して正数 $C_1(B) > 0$, $C_2(B) > 0$ が存在して、

$$\| \Gamma_k(\omega s) C_\omega(s) \| \leq C_1(B) \left(\prod_{j=0}^{k-1} (C_2(B) + j) \right) / k!$$

そこで次の等式

$$e^{-\rho t} E(s, v, t) = \sum_{\omega \in W} e^{\omega s t} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} \Gamma_k(\omega s) C_\omega(s) v$$

の両辺の Laurent 展開を考え、その Laurent 係数の $t \to +\infty$ での挙動を比較する。すると、上の等式の左辺が $\mathbb{C}$ 上 holomorphic であることと、$\omega_* \in W$ $\omega_* \neq 1$ (単位元)

とすると, $W=\{1, w_*\}$, $w_* s = -s$ であることを用いて Lemma 2 の $\Phi(s w t) c(w s)$ に関する部分が証明される。

§3. 岩沢分解の解析接続.

G, K, A, N 等の Lie 環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$, 又その複素化を $\mathfrak{g}_c, \mathfrak{k}_c, \mathfrak{a}_c, \mathfrak{n}_c$ 等と書く。さらにこれらはすべて $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C})$ の部分環とみなす。そこで $GL(n+1, \mathbb{C})$ に属する各々の解析的部分群をそれぞれ G_c, K_c, A_c, N_c とする。次に,

$$'A_c = \{\exp(zH) = a_z \mid z \in \mathbb{C},\ |Im(z)| < \pi\}$$

$$'G_c = K_c\, 'A_c\, N_c$$

とする。すると, $'G_c$ は G を含む G_c の開部分複素多様体となる。又 G の岩沢分解を

$$g = k(g)\, a_{t(g)}\, n(g) \qquad g \in G$$

と書くと, $k: G \to K$, $t: G \to \mathbb{R}$, $n: G \to N$ は実解析的である。次の Lemma 3 が成立する。

Lemma 3. $'G_c$ は連結であり, k, t, n の holomorphic な解析接続 $k: {'G_c} \to K_c$, $t: {'G_c} \to \mathbb{C}$, $n: {'G_c} \to N_c$

が一意に存在する。

これは $g \in G$ を

$$g = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n-1 & 1 & 1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

と、

$$k(g) = \begin{pmatrix} k_{11}(g) & k_{12}(g) & 0 \\ k_{21}(g) & k_{22}(g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{t(g)} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t(g) & \operatorname{sh} t(g) \\ 0 & \operatorname{sh} t(g) & \operatorname{ch} t(g) \end{pmatrix}$$

$$n(g) = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & -x(g) & x(g) \\ {}^t x(g) & 1-\Delta(g) & \Delta(g) \\ {}^t x(g) & -\Delta(g) & 1+\Delta(g) \end{pmatrix} \qquad x(g) = \begin{pmatrix} x_1(g) \\ \vdots \\ x_{n-1}(g) \end{pmatrix} \qquad \Delta(g) = \frac{{}^t x(g)\, x(g)}{2}$$

$${}^t x(g) = (x_1(g) \cdots x_{n-1}(g))$$

と表わした時、

$$k_{11}(g) = g_{11} - \frac{g_{12}+g_{13}}{g_{32}+g_{33}} g_{31} \qquad k_{12}(g) = \frac{g_{12}+g_{13}}{g_{32}+g_{33}}$$

$$k_{21}(g) = g_{21} - \frac{g_{22}+g_{23}}{g_{32}+g_{33}} g_{31} \qquad k_{22}(g) = \frac{g_{22}+g_{23}}{g_{32}+g_{33}}$$

$$t(g) = \log(g_{32}+g_{33})$$

$$x(g) = {}^t g_{31} / (g_{32}+g_{33})$$

となり

$g \in {}'G_c$ の為の必要十分条件は、$g_{32}+g_{33} \notin [-\infty\ 0]$

となることから分る。

次に K_c の real form L の定義をする。まず $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に関する Cartan involution を θ とする。$\mathfrak{k}$ の部分空間 $\mathfrak{q}$ を

$$\mathfrak{q} = \{ X + \theta X \ ; \ X \in \mathfrak{n} \}.$$

とすると、

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{q} \quad (\text{直和})$$

となる。そこで

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{q}.$$

とすれば，$\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{k}_c$ の real form となる。L を $\mathfrak{l}$ に対応する K_c の解析的部分群とする。上の表示で書くと

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} l_{11} & \sqrt{-1}\,l_{12} & 0 \\ -\sqrt{-1}\,l_{21} & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \in SO_0(n-1, 1) \right\}$$

なる。このとき，$A^+ = \{ a_t \ \ t > 0 \}$ とすると

Lemma 4. $A^+ L \subset {}'G_c$.

が成立する。次に $K \cong SO(n)$ 故，K の任意の有限次元表現は $K_c \cong SO(n, \mathbb{C})$ の holomorphic な表現に拡張出来る。そこでこれも同じ記号で表わすと，次の関数

$$\varphi_s(g) = e^{(s-\rho)t(g)}\, \tau_\varepsilon(k(g))$$

は、$Hom(V_1, V_1)$ に値をとる $'G_c$ 上の holomorphic な関数となる。さらに、

$g \in 'G_c$ $k \in K_c$ $m \in M_c$ $a \in A_c$ $n \in N_c$ で、

$kgman \in 'G_c$ となるとき、次の関数等式

(3) $\varphi_s(kgman) = e^{(s-\rho)t(a)} \tau_1(k)\varphi_s(g)\tau_1(m)$

が成立する。(これは、$k(kgman) = kk(g)m$, $t(kgman) = t(g) + t(a)$ が成立することより結論される。) すると (2) の積分は、

(2)′ $F(s\ t)v = \int_L \varphi_s(a_t l)v\tau_2(l^{-1})dl$

と書かれる。L が K_c の real form であること、被積分関数がすべて holomorphic であること及び関数等式 (3) によって、微分方程式 (i)′ を満すことの証明は、$E(s, v, t)$ の場合 ([2] §.12 p. 279 〜 p. 282) と同じである (そこでの議論を正当化する為に上の条件が必要となる。) 従って Prop 2 は 積分の収束性 - (ii), 上の証明に必要な微分と積分の順序交換の可能性、極限の存在及び s に関する解析性 - (iii) を証明すれば十分である。

まずMはLの1つの極大compact部分群であり,

$$l_r = \begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\, r & \sqrt{-1}\,\mathrm{sh}\, r & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}\,\mathrm{sh}\, r & \mathrm{ch}\, r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r \in \mathbb{R}$$

とすると, $l \in L$ は $m_1, m_2 \in M$, $r \geq 0$ によって,
$l = m_1 l_r m_2$ と書ける。 dm をMのnormalized Haar measureとすると,

$$dl = c_0 (\mathrm{sh}\, r)^{2p-1} dm_1\, dr\, dm_2 \qquad l = m_1 l_r m_2 \qquad c_0 > 0$$

となる。

さらに, $t(a_t m_1 l_r m_2) = t(a_t l_r) = \log(\mathrm{ch}\, t + \mathrm{sh}\, t\, \mathrm{ch}\, r)$

$$k(a_t m_1 l_r m_2) = m_1 k(a_t l_r) m_2$$

$$\tau_1(k(a_t m_1 l_r m_2)) v \tau_2(m_2^{-1} l_r^{-1} m_1^{-1}) = \tau_1(m_1) \tau_1(k(a_t l_r)) v \tau_2(l_r^{-1}) \tau_2(m_1^{-1})$$

$(v \in V_M)$ となる。従って.

$$\mathcal{F}(s,t) v = c_0 \int_M \tau_1(m) \left(\int_0^\infty (\mathrm{sh}\, r)^{2p-1} (\mathrm{ch}\, t + \mathrm{sh}\, t\, \mathrm{ch}\, r)^{s-p} \tau_1(k(a_t l_r)) v \tau_2(l_r^{-1}) dr \right) \tau_2(m^{-1}) dm$$

故に,

$$I(s\ t) v = \int_0^\infty (\mathrm{sh}\, r)^{2p-1} (\mathrm{ch}\, t + \mathrm{sh}\, t\, \mathrm{ch}\, r)^{s-p} \tau_1(k(a_t l_r)) v \tau_2(l_r^{-1}) dr.$$

とおくと,

$$\mathcal{F}(s\ t) v = c_0 \int_M \tau_1(m) I(s\ t) v \tau_2(m^{-1}) dm.$$

となり $\mathcal{F}(s.\ t) \tau_2(m) = \tau_1(m) \mathcal{F}(s.\ t)$ が分る。

ところが, $k(a_t l_r) = l_{r(t)}$ $\quad e^{r(t)} = (1 + \mathrm{th}\frac{t}{2} e^{-r}) / (\mathrm{th}\frac{t}{2} + e^{-r})$

であり $\tau(l_r)$ は e^{px} の形の対角要素を持つ対角行列

で表わされる。従って次の積分の収束性（及び $t\to+\infty$ の極限の存在）を考察すれば良い。

$$I_{pq}(s,t)=\int_0^\infty (\mathrm{sh}\,r)^{2p-1}(\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,r)^{s-\rho}\left(\frac{1+\mathrm{th}\frac{t}{2}e^{-r}}{\mathrm{th}\frac{t}{2}+e^{-r}}\right)^{p}e^{-qr}\,dr.$$

又， $e^{(-s+\rho)t}(\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,r)^{s-\rho}\to\left(\frac{1+\mathrm{ch}\,r}{2}\right)^{s-\rho}$ $\quad t\to+\infty$

$k(a_t l_r)\to 1 \quad t\to+\infty$ より

$$I(s)v=\int_0^\infty(\mathrm{sh}\,r)^{2p-1}\left(\frac{1+\mathrm{ch}\,r}{2}\right)^{s-\rho}v\,\tau_2(l_r^{-1})\,dr.$$

とおくと．

$$C(s)v=c_0\int_M \tau_2(m)\,I(s)v\,\tau_2(m^{-1})\,dm.$$

結局，上の積分の中の被積分関数の評価を考察すれば求める結果が得られる。

References.

[1] Harish-Chandra Defferential equations and semi-simple Lie groups (1960) unpublished.

[2] N. R. Wallach. Harmonic analysis on homogeneous spaces (1973). Marcel. Dekker

[3] G. Warner. Harmonic analysis on semi-simple Lie groups II. (1972) Springer

[4] A. W. Knapp. and. E. M Stein. Interlwining operators

for semi-simple groups. Ann. of Math. 73 (1971)
489 – 578.