数理解析研究所講究録
368巻 1979年 116-124

固有球関数の漸近的挙動と L^p $(1\le p<\infty)$ 可積分性

三菱総研　西村俊之

調和解析において、関数の無限遠での挙動を詳しく調べる事は、重要な興味対象となる。そこで、関数として特に固有球関数について、その漸近的挙動と関数の L^p $(1\le p<\infty)$ 可積分性を結びつけて論じる事が出来ないか、という問題を考える。

G を中心有限の実半単純リー群とし、K をその極大コンパクト部分群とする。またそれらのリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ とする。$\mathfrak{g}$ はキリング形式から導かれる内積により、ヒルベルト空間と見做す。

θ を Cartan involution とし、$G=K\exp\mathfrak{s}$ を Cartan 分解、$G=KAN$ $(\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n})$ を岩沢分解とする。$\Sigma=\Sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ を制限ルートとし、辞書式順序を入れる。$\mathfrak{a}^+$ は正のワイル領域。

$\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_d\}$ は、Σ の中の単純ルートの集合とし、

$$\rho(H)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad}H)_{\mathfrak{n}}\qquad(H\in\mathfrak{a})$$

$$\Xi(x)=\int_K e^{-\rho(\log H(xk))}dk \quad , \quad \sigma(x)=\|X\| \quad x=k\exp X$$

とする。

次に、$\mathfrak{z}$を普遍展開環$\mathcal{E}_\mathfrak{g}$の中心。$\mathfrak{j}$をベクトル部が$\mathfrak{a}$となるようなθ-stableなCartan部分環とする。その時、

$$\chi_\Lambda : \mathfrak{z} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \text{infinitisimal character} \quad (\text{for } \Lambda \in \mathfrak{j}_c^*)$$

また、$\tau=(\tau_1,\tau_2)$をKのV（有限次元のヒルベルト空間）に於けるユニタリ double representation とする。

ここで、二つの関数空間を定義する。

$$C_\Lambda^\infty(G:V:\tau)=\{f \mid f\in C^\infty(G:V),\ f:\tau\text{-spherical},\ zf=\chi_\Lambda(z)f \quad \text{for}\ {}^\forall z\in\mathfrak{z}\}$$

$$(\Lambda\in\mathfrak{j}_c^*)$$

$$\mathcal{C}^p(G:V)=\{f \mid f\in C^\infty(G:V),\ \sup_G (1+\sigma(x))^r\,\Xi(x)^{-\frac{2}{p}}\|f(D_2;x;D_1)\|<\infty,$$

$$\text{for}\ {}^\forall D_1,D_2\in\mathcal{E}_\mathfrak{g},\ {}^\forall r\geq 0\} \qquad (1\leq p<\infty)$$

さて、$F\subsetneq\Pi$に対応するGの parabolic 部分群，$\mathfrak{g}$の parabolic 部分環をそれぞれP_F，$\mathfrak{p}_F$で表す。

$$P_F=M_{1F}N_F \qquad \mathfrak{p}_F=\mathfrak{m}_{1F}+\mathfrak{n}_F \qquad : \text{Levi 分解}$$

$$P_F=M_FA_FN_F \qquad \mathfrak{p}_F=\mathfrak{m}_F+\mathfrak{a}_F+\mathfrak{n}_F \qquad : \text{Langland 分解}$$

（$\mathfrak{a}_F$は、Fの共通ゼロ点）

$$\mathfrak{a}_F^+=\{H \mid H\in\mathfrak{a}_F,\ \beta_F(H)=\min_{\alpha\in\Pi\setminus F}\alpha(H)>0\}$$

$$d_F(ma)=e^{\rho(\log a)} \qquad (m\in M_F,\ a\in A_F)$$

$$M_{1F}^+=\{m\in M_{1F} \mid \gamma_F(m)=\|Ad(m^{-1})_{\mathfrak{n}_F}\|<1\}$$

と表す。

$\mathfrak{z}_{F}$は$(\mathfrak{m}_{IF})_c$の普遍展開環$\mathfrak{M}_{IF}$の中心とすると、

$\mu_F : \mathfrak{z} \longrightarrow \mathfrak{z}_F$: alg. inj　で、

$\mathfrak{z}_F$は$\mu_F(\mathfrak{z})$上のランクw_Fの free finite module となる。

i.e. $\mathfrak{z}_F = \sum_{1\le i\le w_F} \mu_F(\mathfrak{z}) v_i$

但し、$v_1 = 1, v_2, \cdots, v_{w_F} \in \mathfrak{z}_F$

ここで、Tとして、$\{e_1, \cdots, e_{w_F}\}$を正規直交基底とするヒルベルト空間を考える。$\underline{V} = V \otimes T$, $\underline{\tau} = (\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_2)$, $\underline{\tau}_i(k) = \tau_i(k) \otimes 1$ $(k \in K)$と定義し、$C^a(M^+_{IF}; \underline{V})$上の diff. op. D^τ_vを以下のようにして定義する。

$$\underline{f} = \sum_{1\le j\le w_F} f_j \otimes e_j \qquad (f_j \in C^a(M^+_{IF}; V))$$

$$D^\tau_v \underline{f} = \sum_{1\le i\le w_F} D^\tau_{v:i} f_1 \otimes e_i$$

$$(D^\tau_{v:i} f_1)(m) = \sum_{1\le k\le q} g_{v:ik}(m)\, \tau_1(\zeta_{v:ik})\, f_1(m; \eta_{v:ik})\, \tau_2(\xi_{v:ik})$$

$\zeta_{v:ik}, \xi_{v:ik} \in \mathfrak{k}$, $\eta_{v:ik} \in \mathfrak{M}_{IF}$

但し、$g_{v:ik}$はある行列の要素より得られる関数。

今、$f \in C^\infty_\Omega(G : V : \tau)$に対して、

$$\Phi(m) = \sum_{1\le j\le w_F} f(m; v_j \circ d_F) \otimes e_j$$

$r \in \mathbb{R}$に対して、　$\Psi = d_F^r \Phi$

とおくと、

Lemma 1

$H\in\mathfrak{a}_F^+$, $\eta\in\mathfrak{M}_{1F}$ とし、$m\in M_{1F}^+$ とする。

$$F_m(t)=\Phi(m\exp tH;\eta)\ ,\quad G_m(t)=\Phi(m\exp tH;{}'D^{\tau}_{H,\eta})\qquad t\geq 0$$

とおくことにより、

$$\frac{dF_m}{dt}=\{1\otimes(\Gamma(\Lambda:H)+\gamma\rho(H)1)\}F_m+G_m\qquad \text{on } (0,\infty)$$

(注)

$${}'D^{\tau}_{H,\eta}=d_F^{r}\circ({}'\eta D_H^{\tau})\circ d_F^{-r}\ ,\quad {}'H=d_F^{-r}\circ H\circ d_F^{r}$$

$\Gamma(\Lambda:H)$ は、$Hv_j=\sum_{1\leq i\leq w_F}\mu_F(z_{H;ij})v_i$ とするとき、

$$\Gamma(\Lambda:H)_{ij}=(\mu_{\mathfrak{a}/\mathfrak{f}}(z_{H;ji})(\Lambda))_{i,j}\qquad (\mu_{\mathfrak{a}/\mathfrak{f}}:\mathfrak{z}\longrightarrow I(\mathfrak{f}_c)\ :\text{iso})$$

であり、T 上の endmorphism.

Lemma 2

$H\in\mathfrak{a}_F^+$, $\eta\in\mathfrak{M}_{1F}$。このとき、

$\exists r>0$, $\exists q\geq 1$, $\omega_s\in\mathfrak{M}_{1F}$ で $\forall f\in C^{\infty}_{\Lambda}(G:V:\tau)$ に対して、

(a) $\|F_m(t)\|\leq d_F(m\exp tH)^{1+r}\sum_{1\leq s\leq q}\|f(m\exp tH;\omega_s)\|$

(b) $\|G_m(t)\|\leq C_\tau\gamma_F(m)(1-\gamma_F(m\exp tH))^{-r}e^{-t\beta_F(H)}d_F(m\exp tH)^{1+r}$

$$\times\sum_{1\leq s\leq q}\|f(m\exp tH;\omega_s)\|$$

上の二つの Lemma は、Trombi. Varadarajan [1] の論法で、特に、$e^{-\rho(\log h)}\leq\Xi(h)\leq C_0\,e^{-\rho(\log h)}(1+\sigma(h))^{r_0}$ $(h\in Cl\,A^+)$ の評価式に注意する事により導かれる。

$(E, \|\cdot\|)$ を有限次元のヒルベルト空間とする.

$A \in End(E)$ とする時. $\mathcal{E}(A)$: A の固有値全体。

$E(a, A)$: 固有値 a の固有空間。

<u>仮定A</u> : $A \in End(E)$ で、純虚の固有値を持たない。

<u>Lemma 3</u>

$A \in End(E)$ 仮定A を満たす.

i) $f, g \in C^1((-h, \infty) : E)$ h : 十分小.

ii) $\frac{df}{dt} = Af + g$ on $(0, \infty)$

iii) $\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$, $\exists C_\varepsilon > 0$ s.t.

$\|f(t)\| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon t}$, $\|g(t)\| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon t - t}$

この時.

$\exists f_\infty = \lim_{t \to \infty} f(t) \in E(0, A)$

さらに、$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ に対して.

a) $\|f(t) - f_\infty\| \leq C_\varepsilon C e^{\varepsilon t - \alpha t}$ $(t > 0)$

b) $\|f_\infty\| \leq 3CC_\varepsilon$

但し、$\alpha = \min\left(\frac{1}{2}, |Re(a)| : a \in \mathcal{E}(A), a \neq 0\right)$

Lemma 3の証明は、Jordan標準型に直して. $A = a1$ の証明に帰着させる事が出来る。

・ $f \in C_\Lambda^\infty(G:V:\tau)$ が type p であるとは、

$\forall D \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}}$, $\forall \varepsilon > 0$ が与えられた時、以下の評価式を満足する $C_\varepsilon(D, f) = C_\varepsilon > 0$ が存在する事。

$$\|f(x;D)\| \leq C_\varepsilon \,\Xi(x)^{\frac{2}{p}-\varepsilon}$$

・ $\mathfrak{a}_F^{\times} = \{H \in \mathfrak{a}_F^{+} \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \beta_F(H) > \varepsilon \rho(H)\}$

<u>Lemma 4</u>

$f \in C_\Lambda^\infty(G:V:\tau)$ は type p とする。

Λ は、仮定Aを満たす。（Λ によりLemma 1で作られた $\mathcal{T}$ 上の Endmorphism が仮定Aの条件を満足する事）

この時、

$$f_{F,p}(m) = \lim_{t \to \infty} d_F(m \exp tH)^{\frac{2}{p}} f(m \exp tH) \text{ が存在する。}$$

$$\text{for } \forall m \in M_F A_F, \quad \forall H \in \mathfrak{a}_F^{\times}$$

Lemma 4 の証明は、Lemma 1, Lemma 2 より得られる方程式と評価式が、Lemma 3 の条件を満足する事を確かめることによって示される。但し、この場合、Lemma 1, 2 の r は $r = \frac{2}{p} - 1$ で与えられていると考えて使用する。結果は、ベクトル値関数の第1項 (i.e. $f(m; v_1 \cdot d_F) \otimes e_1$ の部分) より得られる。

・ $A_F^+(\mu)=\{h\in A^+ \mid \beta_F(\log h)>\mu\rho(\log h)\}$

Lemma 5

$f\in C_\Lambda^\infty(G:V:\tau)$ は type p とする。

Λ は仮定 A を満足する。

この時、

$\exists\delta>0,\ \exists C>0$

$$\|f(h)-d_F(h)^{-\frac{2}{p}}f_{F,p}(h)\|\leq C\,\Xi(h)^{\frac{2}{p}+\delta}$$

$$h\in A_F^+(\mu)$$

Lemma 5 も Lemma 4 と同様に、Lemma 1, 2 より Lemma 3 の条件を満足する事を見る。但し、この場合には、Lemma 3 の (a) (b) の 2 つの評価式を用いる。その時、$H_1,\cdots,H_j$ を $\alpha_1,\cdots,\alpha_j\in\Pi\setminus F$ の dual base として、${}_F\mathfrak{a}=\{H\in\mathfrak{a}\mid\alpha(H)=0\ \ \forall\alpha\in\Pi\setminus F\}$. を考えると、$\mathfrak{a}={}_F\mathfrak{a}+\mathfrak{a}_F$ となり、$h\in A_F^+(\mu)$ に対して、

$\log h=H={}_FH+\sum_{1\leq k\leq j}\alpha_k(H)H_k$ と表し、

$\beta_F(\log h)>2$ の場合に、(a) の評価式、$\beta_F(\log h)\leq 2$ の場合に (b) の評価式を用いて、上の Lemma を導く。

ここで、以上の Lemma の基に Main theorem を示す。

この Main theorem は、Harish-Chandra が示した L^2 と球関数

の性質との類似形にあたる定理である。

<u>Main theorem</u>

$f \in C^{\infty}_{\Lambda}(G : V : \tau)$

Λ は仮定 A を満足する。

$^{\exists}C > 0$, $^{\exists}r \geq 0$

s.t. $\| f(x) \| \leq C\, \Xi(x)^{\frac{2}{p}} (1 + \sigma(x))^{r}$

この時、以下の a), b), c) は同値

a) $f \in L^{p}(G : V)$

b) $f_{F,p} = 0$ for $^{\forall}F \subset \Pi$

c) $f \in \mathcal{C}^{p}(G : V)$

c) $\Rightarrow$ a) は明らか。

a) $\Rightarrow$ b) は、定理の仮定となる評価式がなくとも成立する。

b) $\Rightarrow$ c) は、F として、特に $F_j = \Pi \setminus \{\alpha_j\}$ $1 \leq j \leq d$ を考えると、μ が十分小の時、$A^{+} \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq d} A^{+}_{F_j}(\mu)$ となる事を用いて示される。尚、この定理を示すのに Lemma 5 の評価式を用いる。

今後の問題として、Λ が仮定 A を満足するという条件を固有球関数の性質より特徴づける事が出来ないか。又は、どの程度の固有球関数がこの条件を満足しているかというような

事が考えられる。

一方、Chandra の L^2 の判定法の類似形の定理である事より、固有球関数ではなく、$\mathfrak{Z}$-finite の球関数である時はどのようになるか等の問題も考えられる。

参考文献

Trombi Varadarajan

[1] Asymptotic behaviour of eigen functions on a semisimple Lie group; The discrete spectrum Acta Math. 129 (1972) P237−280