

アフィン対称空間上の正則表現に現われる
離散スペクトル

広島大学 理学部 松本 修一

はじめに

等質空間 G/H が アフィン対称空間であるとは、 G の involutive automorphism σ があって、 $G_0 = \{ g \in G; \sigma(g) = g \}$ とおくと、 $(G_0)_0 \subset H \subset G_0$ がみたされる場合を云う。

〈例, 1〉 G を Lie 群として、 $G \times G$ の involutive automorphism σ を $\sigma: G \times G \rightarrow (x, y) \mapsto (y, x) \in G \times G$ により定義し、 $\Delta G = \{ (x, x) \in G \times G; x \in G \}$ とおくと、 $(G \times G)_0 = \Delta G$ である。よって $G \times G / \Delta G$ は一つのアフィン対称空間である。一方 $G \times G / \Delta G \rightarrow (x, y) \Delta G \mapsto x \cdot y^{-1} \in G$ により $G \times G / \Delta G$ は G と同一視される。よって、 G 自身がアフィン対称空間とみれる。

〈例, 2〉 G を半単純 Lie 群, $\sigma \in G$ のある Cartan involution, K を σ による固定点の全体とすると G/K はアフィン対称空間である. すなわち Riemannian symmetric space はアフィン対称空間である.

〈例, 3〉 $x, y \in \mathbb{R}^{p+q}$ に対して, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_{p+q} y_{p+q}$ とおき $\mathcal{H}_{p,q} = \{ x \in \mathbb{R}^{p+q} ; \langle x, x \rangle = 1 \}$ とおく, この時 $G = SO(p, q)$ は $\mathcal{H}_{p,q}$ に推移的に作用し, 点 $^*(1, 0, \dots, 0)$ における isotropy は

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & SO(p, q) & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

である. 一方 G の automorphism $\sigma \in$

$$\sigma : G \rightarrow G \mapsto \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & -1 \end{pmatrix} {}^* g^{-1} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \in G$$

により定めると, $G_\sigma = H$ である. よって $\mathcal{H}_{p,q}$ はアフィン対称空間である.

以下において, われわれの扱うアフィン対称空間 G/H に対しては, G が連結な半単純 Lie 群であるとする. この

場合 H は *reductive* であり、よって G/H 上には G -不変な測度が定数倍をのぞいて一意的にきまる。したがって $L^2(G/H)$ 上の左からの正則表現を τ とかくならば、 G のユニタリ表現 $(\tau, L^2(G/H))$ を得る。

又、 G の既約表現 (π, \mathcal{H}) が、 $L^2(G/H)$ の点スペクトルであるとは、 (π, \mathcal{H}) が $(\tau, L^2(G/H))$ の *closed invariant subspace* として実現される時を云う。

われわれが現在目標としていることは、 $L^2(G/H)$ の点スペクトルを、すべて、しかも幾何的に、構成しようということである。 $L^2(G \times G / \Delta G)$ 、すなわち $L^2(G)$ の点スペクトルの構成は、 G が *compact* 群の場合は *Borel-Weil-Bott* の理論により、又 G が *non-compact* の場合には、*Harish-chandra* 氏をはじめとした多くの数学者により成されており、非常に興味深い理論である。 又一方、上に述べたところの $\langle \text{例 3} \rangle$ の場合に対しても、数人の人々がこの問題を解いている。 (*References*, [1] ~ [12])、これらの論文の中には、非常にほがらかな事実が散見され、この問題を一般的な形で解決することの重要性が感じられる。 この問題は *discrete series*

の理論の単なる拡張ではなく、この問題の解決は、表現論における何らかの本質的進歩を与えるであろうと確信している。

§1 においては、 $\mathcal{H}_{2,2}$ について成立している一つの事実を示す。§2 においては、Flensted-Jensen の最近の仕事を示す。§3 においては筆者の結果を述べる。証明は省略するので [13] を参照された。

§1. $SO_0(2, 2)/SO_0(1, 2)$ について、

$$G = SO_0(2, 2), \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & a & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix} ; a \in SO_0(1, 2) \right\}$$

とする。 $G/H \cong \mathcal{H}_{2,2}$ である。 \mathfrak{g} は G の Lie algebra とし、 $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $B_1(X, Y) = \frac{1}{2} \text{Tr}(XY)$ とおき、 B より得られる Casimir operator を Ω_1 とかくと、 $L^2(G/H)$ の点スペクトルは

$$\mathcal{H}_\ell = \left\{ f \in L^2(G/H) ; \Omega_1 f = \ell(\ell-2)f \right\} \\ \left(\ell \in \mathbb{Z}, \ell > \frac{2}{3} \right)$$

により尽くされる。 ([8])。 このセクションの目的は、この \mathcal{H}_ℓ をある holomorphic line bundle の holomorphic L^2 -section の空間として実現することにある。

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2+2} ; \langle x, x \rangle = 0 \right\}$$

とあくと

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{G}, \ell) &= \{ \varphi; C_+ \rightarrow \mathbb{C} \quad C^\infty \\ &\quad \varphi(rx) = r^{-\ell} \varphi(x) \quad \forall r > 0 \} \\ &= \{ \varphi; S^1 \times S^{2-1} \rightarrow \mathbb{C} \quad C^\infty \} \end{aligned}$$

一方 H_m^p により, \mathbb{R}^p 上の m 次同次調和各項式の空間とあかわす.

この時

$$\mathring{H}_\ell = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{G}, \ell) ;$$

$\varphi \in S^1 \times S^{2-1}$ 上の函数とみる時, $\varphi(x)$ は $Y_m(x_1, x_2) Y_n(x_3, \dots, x_{2+2})$ の一次結合でかける.

但し, $Y_m \in H_m^2, Y_n \in H_n^2, m \geq 0$

$m-n \geq \ell, m+n \equiv \ell \pmod{2}$ }

とあくと, \mathring{H}_ℓ には内積が定義出来て, これによつて \mathring{H}_ℓ を完備化すれば H_ℓ を得る. これは Struchartz [8] の仕事である.

さて $\sum_{\ell}^b; MAN_+ \ni ma_+m \mapsto e^{\ell t}$ とあき

$L_\ell^b = \mathbb{G} \times_{\sum_{\ell}^b} \mathbb{C}$ とあくと $T^\infty(L_\ell^b) \cong C^\infty(\mathbb{G}, \ell)$ である. よつて \mathring{H}_ℓ は $T^\infty(L_\ell^b)$ の subspace とみれる

次に

$$C_\ell = \{ [z] \in P^{1+2}(\mathbb{C}) ; \langle z, z \rangle = 0 \}$$

△

とあくと

対応: $G/MAN_+ \ni gMAN_+ \mapsto g[0_1] \in C_c$

により, $G/MAN_+ \subset C_c$, 又 $0_2 = {}^t(1, -1, 0 \dots 0)$

とあくと, $[0_2] \in C_c$ であり, $G[0_2]$ は C_c 内の
open complex submanifold τ . $G[0_1]$ は $G[0_2]$
の境界に含まれる. 更に

$$\dim_{\mathbb{R}} G[0_1] = \dim_{\mathbb{C}} G[0_2] = 8$$

が成立する.

$$\text{今 } \mathfrak{f} = \{ X \in \mathfrak{g} : \sigma X = X \} = \left\{ \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_2 = \{ X \in \mathfrak{g} : \sigma X = -X \} = \left\{ \begin{pmatrix} \circ & * \\ x & \circ \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\}$$

とあくと $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{g}_2$ であり, \mathfrak{f} は H の Lie algebra τ
ある.

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \circ & -\theta \\ \theta & \circ \end{pmatrix} \right\}; \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \}$$

とあくと, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}_2}$ は \mathfrak{g}_2 の maximal abelian subalgebra
であり, 更に \mathbb{R} に含まれている.

$$M_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}_2}} = \{ R \in H : \text{Ad}(R)|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}_2}} = I \} \quad \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & m \end{pmatrix} \right\}; \quad m \in SO(8) \quad \}$$

$$A_{\mathfrak{g}_2} = \left\{ \exp \begin{pmatrix} \circ & -\theta \\ \theta & \circ \end{pmatrix} \right\}; \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \}$$

?

$$\tilde{A}_{\sigma_2} = \{ g \in G; \text{Ad}(g)|_{\sigma_2} = I \}$$

とあると

$$\tilde{A}_{\sigma_2} = M_{\sigma_2} A_{\sigma_2} \quad \text{と} \quad G/[0_2] \cong G/\tilde{A}_{\sigma_2} \quad \text{が成立する}$$

特に G/\tilde{A}_{σ_2} は complex manifold である

$$\text{次に } \xi_2; \tilde{A}_{\sigma_2} = M_{\sigma_2} A_{\sigma_2} \ni m \cdot \exp\left(\begin{array}{c|c} \xi & -\theta \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\ \mapsto e^{i2\theta}$$

$$L_2 = G \times_{\xi_2} \mathbb{C}$$

とあると L_2 は G/\tilde{A}_{σ_2} 上の line bundle である

$$G^{\mathbb{C}} = \{ g \in SL(2+8, \mathbb{C}) ;$$

$$\exists g \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \}$$

$$\sigma; \sigma_{\sigma_2}^{\mathbb{C}} \ni \begin{pmatrix} \xi & -\theta \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto -i\xi \in \mathbb{C}$$

$\Phi; (\sigma_{\sigma_2}^{\mathbb{C}}, \sigma_{\sigma_2}^{\mathbb{C}})$ に關する root system

とあると, $\Phi = \{ \pm \sigma \}$ である

$$\sigma_{\sigma_2}^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} z & -i^{\pm 2} \\ \hline z, -z \end{array} & \begin{array}{c} \pm z \\ -i^{\pm 2} z \end{array} \end{pmatrix}; z \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

である. $N \in \sigma_{\sigma_2}^{\mathbb{C}}$ は Lie alg とする $G^{\mathbb{C}}$ の analytic

subgroup, $B = M_{\sigma_2}^{\mathbb{C}} A_{\sigma_2}^{\mathbb{C}} N$ とあると

$$\{ g \in G^{\mathbb{C}}; g \cdot [0_2] = [0_2] \} = B,$$

ρ

よって $G^c/B \cong C_c$ である。更に

$$\xi_2^c; B = M_{\alpha_2}^c A_{\alpha_2}^c \bar{N} \ni m \cdot \exp\left(\frac{z^{-3}}{z}\right) \bar{m} \mapsto e^{iz^3} \in \mathbb{C}$$

$$L_2^c = G \times_{\frac{z}{z^2}} \mathbb{C}$$

とあくと $L_2^c|_{G/\tilde{A}_{\alpha_2}} = L_2$ $L_2^c|_{G/MAN_+} = L_2^b$ が成立する。したがって次の図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} L_2^b & \hookrightarrow & L_2^c & \twoheadrightarrow & L_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G/MAN_+ & \hookrightarrow & G^c/B & \twoheadrightarrow & G/\tilde{A}_{\alpha_2} \\ & & & \uparrow & \\ & & & \text{open} & \end{array}$$

特に L_2 は holomorphic line bundle である。

よって, $T_2(L_2) = \{ f; L_2 \text{ の holomorphic } L^2\text{-sec} \}$

とあけば, こゝに G のユニタリ表現 $(\pi_2, T_2(L_2))$

を得る。但し, $\pi_2(g)f(x) = f(gx)$ とする。

次の命題が成立する。

Proposition 1, $\varphi \in T^\infty(L_2^b)$ に対して

$$\varphi \in \mathring{H}_2 \Rightarrow \exists U; \text{ open in } G^c/B$$

$$\exists \varphi^c \in T_{\text{hol}}(L_2^c, U)$$

$$\text{s.t. } \bullet U \supset G/MAN_+$$

$$\bullet U \supset G/\tilde{A}_{\alpha_2}$$

$$\bullet \varphi^c|_{G/MAN_+} = \varphi$$

9

更にこの“解析接続”は $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{G}/MAN_+ = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{G}/\hat{A}_2$ により一意的である。

Proposition 2,

- $l \geq 8 \Rightarrow \begin{cases} T_2(L_l) \neq 0 \\ \pi_l \text{ は既約} \end{cases}$
- $\frac{7}{2} < l < 8 \Rightarrow T_2(L_l) = 0$
- $l \geq 8 \Rightarrow \varphi^e|_{\mathbb{G}/\hat{A}_2} \in T_2(L_l), \quad \forall \varphi \in \hat{H}_l$

Proposition 3,

$$\hat{H}_l \ni \varphi \mapsto \varphi^e|_{\mathbb{G}/\hat{A}_2} \in T_2(L_l)_{\mathbb{K}}$$

により, \hat{H}_l と $T_2(L_l)$ は infinitesimally equivalent であり. よって

$$\hat{H}_l \cong T_2(L_l) \quad (l \geq 8)$$

Remark, $\frac{7}{2} < l < 8$ に対する \hat{H}_l は, holomorphic section の空間として得られるのかどうか、今のところわからない。

§2, Flensted - Jensen の仕事
最近次の定理が証明された。

Theorem [F. Jensen [14]]

\mathbb{G}/H をアフィン対称空間とする時, $L^2(\mathbb{G}/H)$ に点スベ

クトルが存在する為の一つの十分条件は、 G/H の compact Cartan subalgebra が存在すること、である。

Jensen 氏は、この条件が必要条件でもあろうと予想しているが、まだ証明されておらず、以下、「 G/H の compact Cartan subalgebra」の意味を述べる。

$$\mathfrak{f} = \{ X \in \mathfrak{g} : \sigma X = X \quad \downarrow$$

$$\mathfrak{q} = \{ X \in \mathfrak{g} : \sigma X = -X \quad \downarrow$$

とおくと、 \mathfrak{f} は H の Lie algebra であり、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{q}$ である。以下の命題と、定義については、[15] ~ [19]。

Proposition,

$\exists \theta ; \mathfrak{g}$ の Cartan involution

$$\text{s.t. } \theta \circ \sigma = \sigma \circ \theta$$

Definition

\mathfrak{a}_{θ} が Cartan subalg of G/H

$$\iff (1) \mathfrak{a}_{\theta} \subset \mathfrak{q}$$

(2) \mathfrak{a}_{θ} は \mathfrak{q} 内 \mathbb{T} maximal abelian subalgebra

(3) $H \in \mathfrak{a}_{\theta} \Rightarrow \text{ad} H : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, semi-

simple

Definition

$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ が compact Cartan subalgebra of G/H

\Leftrightarrow (1) $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ は Cartan subalgebra of G/H

(2) $\exists \theta$: Cartan involution of \mathfrak{g}

s.t. $\sigma \cdot \theta = \theta \cdot \sigma$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$

§3. このセクションでは G/H に compact Cartan subalg $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ が存在するとして, $L^*(G/H)$ の点スペクトルを構成する.

$\theta \in \theta \cdot \sigma = \sigma \cdot \theta$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$ をみたす \mathfrak{g} の Cartan involution とし, \mathfrak{g} の Cartan subalgebra \mathfrak{a} を,

• $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$

• $\mathfrak{a} \cap \mathbb{R}$ が maximal abelian in \mathbb{R}

• $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, $\theta(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$

をみたすようにとる

Φ : $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}})$ に関する root system.

Δ : $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}^{\mathbb{C}})$ に関する root system.

$\Delta_0 \equiv \{ \alpha \mid \alpha \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \}$

• $\alpha \in \Delta$

• $\alpha \mid_{\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}} \neq 0$

• $\alpha \mid_{\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}} \neq 0$

又は $\alpha \mid_{\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}} = 0$ かつ

$X_{\alpha} + \theta X_{\alpha} \neq 0$

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Delta_{\sigma_0}} \beta$$

$$M_{\sigma_0} = \{ m \in H ; \text{Ad}(m)|_{\sigma_0} = I \}$$

$$A_{\sigma_0} = \exp \sigma_0$$

$$\widehat{A}_{\sigma_0} = M_{\sigma_0} A_{\sigma_0}$$

$$\overline{N} = \sum_{\lambda \in \Phi_+} \sigma_{-\lambda}^{\mathbb{C}}, \quad \overline{N} \text{ の analytic subgroup } \in \overline{N},$$

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{f}}(\sigma_0) = \{ X \in \mathfrak{g} ; [X, \sigma_0] = 0 \}$$

$$B = \mathfrak{z}_{\mathfrak{f}}(\sigma_0)^{\mathbb{C}} + \sigma_0^{\mathbb{C}} + \overline{N}$$

とあき、 B は Lie alg とする $G^{\mathbb{C}}$ の analytic subgroup $\in B$ とする、 $B = M_{\sigma_0}^{\mathbb{C}} A_{\sigma_0}^{\mathbb{C}} \overline{N}$ であり $G \cap B = \widehat{A}_{\sigma_0}$ が示し得る。よって $G/\widehat{A}_{\sigma_0} \subset G^{\mathbb{C}}/B$ であるが、更に G/\widehat{A}_{σ_0} は $G^{\mathbb{C}}/B$ の open set である。よって特に G/\widehat{A}_{σ_0} は complex manifold になる。

$$\Lambda \in \sigma_0^{\mathbb{C}*} \in, \quad \Lambda(\sigma_0) \subset i\mathbb{R}, \tau.$$

$$H \in \sigma_0, \quad \exp H \in H \Rightarrow \Lambda(H) \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

をみたすものとす。

$$\xi: \widehat{A}_{\sigma_0} = M_{\sigma_0} A_{\sigma_0} \rightarrow m \cdot \exp H \mapsto e^{\Lambda(H)} \in \mathbb{C}^*$$

$$\xi^{\mathbb{C}}: B = M_{\sigma_0}^{\mathbb{C}} A_{\sigma_0}^{\mathbb{C}} \overline{N} \rightarrow m \cdot \exp H \cdot \overline{n} \mapsto e^{\Lambda(H)} \in \mathbb{C}^*$$

$$L_{\xi} = G \times_{\xi} \mathbb{C}^*, \quad L_{\xi}^{\mathbb{C}} = G^{\mathbb{C}} \times_{\xi^{\mathbb{C}}} \mathbb{C}^*$$

参照されたもの。

References.

- [1] J. Faraut, *Noyaux sphériques sur un hyperboloïde à une nappe*, Lecture Notes in Math. 497, Springer, Berlin, 1973.
- [2] ———, *Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques*,
- [3] I. M. Gelfand, M. I. Graef and N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*, Vol 5.
- [4] V. F. Molchanov, *Harmonic analysis on a hyperboloid of one sheet*, Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 1533 ~ 1556
- [5] ———, *Analogue of the Plancherel formula for hyperboloid*, Soviet Math. Dokl. 9 (1968), 1352 ~ 1385
- [6] ———, *Representations of pseudo-orthogonal group associated with a cone*, Math. USSR Sbornik 10 (1970) 333-347.
- [7] T. Skintani, *On the decomposition of regular representation of the Lorentz group on a*

- hyperboloid of one sheet. Proc. Japan Acad. 43 (1967), 1-5
- [8] R.S. Strichartz, Harmonic analysis on hyperboloids, J. Functional Analysis 12 (1973) 341-383
- [9] W. Rossmann, Analysis on Real Hyperbolic Spaces, J. Functional Analysis 30 (1978) 448-477,
- [10] S. Matsumoto. The Plancherel formula for a pseudo-riemannian symmetric space, Hiroshima Math. J. 8 (1978) 181-193
- [11] P.D. Méthée, Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz. Commentarii Mathematici Helvetici 28 (1954) 225-269
- [12] Kenji Hiraoka, S. Matsumoto and K. Okamoto, Eigenfunctions of the Laplacian on a Real Hyperboloid of one sheet. Hiroshima Math. J. 7 (1977) 855-864
- [13] S. Matsumoto. Discrete series for affine

symmetric spaces. to appear

- [14] M. Flensted-Jensen, Discrete Series for semi-simple symmetric space.
- [15] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups.
- [16] T. Oshima and T. Matsuki, Orbit on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups.
- [17] O. Loos, Symmetric spaces I, II, Benjamin, New York 1969.
- [18] M. Berger, Les espace symétriques non compacts. Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. 74 (1957) 85-177.
- [19] J.A. Wolf, The action of a real semi-simple group on a complex flag manifold I, Bull. Amer. Math Soc 75 (1967) 1124-1237.