数理解析研究所講究録
368巻 1979年 38-52

アフィン対称空間上の pseudo-laplacian の大域的可解性について

広大　　木幡篤孝
田中　誠

§0 Introduction

C^∞-多様体M上の微分作用素P，M上のC^∞-関数fを与えたとき，微分方程式

$$(*)\quad Pu = f$$

を考える。微分方程式(*)のC^∞-解の存在を論じる問題は色々な人達によって研究されてきた。1972年にはA. Cérézo とF. Rouvièreが論文[1]の中でMを複素連結半単純リー群とし，PをM上のカシミール作用素としたとき，微分方程式(*)の大域的C^∞-解の存在を証明した。又同論文の中で複素カシミールの虚数部分をPとしたときは微分方程式(*)は必ずしも大域的解をもつとは限らないことを示した。1973年にはS. Helgasonが論文[2]の中でMを非有界な対称空間G/Kとし，PをM上の零でないG-不変な微分

作用素のとき微分方程式(＊)の大域的 C^∞-解の存在を証明した。

J. Rauch と D. Wigner は1976年に論文[4]で A. Cérézo と F. Rouvière の結果を更に M を中心有限な非有界半単純リー群とし, P を M のカシミール作用素の場合に拡張したが, その論文の中で微分方程式(＊)が大域的 C^∞-解をもつための十分条件を次のように与えた。

(1) 微分作用素 P は real symbol P_m をもち ${}^tP = P$ をみたす。

(2) P の principal symbol から作られる Hamiltonian vector field の積分曲線を考える。$P_m(x_0, \xi_0) = 0$ $(\xi_0 \neq 0)$ となる点 (x_0, ξ_0) を通る $T^*(M)$ の積分曲線を M 上に Projection したとき, M の compact なところにおちていない。

(3) $u \in C^\infty(M)'$, $Pu = 0 \Rightarrow u = 0$

(4) $M \supset \forall \Gamma$: compact に対し次の条件をみたす $M \supset \hat{\Gamma}$: compact が存在する。

(i) $\Gamma \subset \mathrm{Int}\,\hat{\Gamma}$

(ii) $u \in C^\infty(M)'$, $\mathrm{supp}\,Pu \subset \Gamma \Rightarrow \mathrm{supp}\,u \subset \hat{\Gamma}$

さて G をリー群とし σ を G の involutive automorphism とし, G_σ を σ の fix element 全体の作る G の部分群とする。

$(G_\sigma)_0 \subset H \subset G_\sigma$ となるGの閉部分群Hに対し，等質空間G/Hをアフィン対称空間と呼ぶ。特にσをGの Cartan involution とすればG/Hは対称空間となる。又$G \times G$のinvolution を$\sigma(x,y)=(y,x)$で定義すれば$(G\times G)_\sigma = \Delta G$となり，

$$G\times G/\Delta G \ni (g_1, g_2)\Delta G \longmapsto g_1 g_2^{-1} \in G$$

はC^∞-同型対応となるが，この対応によってリー群Gはアフィン対称空間の特別の場合とみなすことができる。

そこで我々はS. Helgasonの結果並びにJ. RauchとD. Wignerの結果を一般のアフィン対称空間G/Hに拡張して考え，J. RauchとD. Wignerらの得た十分条件(1)〜(4)を示すことによって次の結果を得た。

Gを中心有限な非有界連結実半単純リー群で，G/Hをアフィン対称空間とし，$\mathbb{L}$をG/H上のpseudo-laplasianとするとき，微分方程式(*)は大域的なC^∞解をもつ。

§1. Notation and Preliminaries

Gを中心有限な非有界実半単純リー群とし，σをGのinvolutive automorphismとする。$G_\sigma = \{g \in G ; \sigma(g)=g\}$とおき，$(G_\sigma)_0$を$G_\sigma$の単位元を含む連結成分とする。$(G_\sigma)_0 \subset H \subset G_\sigma$をみたす$G$の閉部分群$H$を固定する。$G$のリー環を$\mathfrak{g}$とし，

$\mathfrak{g}$のinvolution σによる固有値分解で固有値1に対応する空間を$\mathfrak{h}$，固有値-1に対応する空間を$\mathfrak{q}$であらわす。つまり$\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g}\,;\,\sigma(X)=X\}$，$\mathfrak{q}=\{X\in\mathfrak{g}\,;\,\sigma(X)=-X\}$とおくと，$\mathfrak{h}$はリー群$H$に対応するリー環となり，$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{q}$は直和分解となる。$\theta$を$\mathfrak{g}$の$\sigma$と可換なinvolutionとし，$\theta$によるCartan分解を$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$とする。このとき$\mathfrak{g}$は次の4つの分部空間の直和に分解される；$\mathfrak{q}\cap\mathfrak{k}$，$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}$，$\mathfrak{q}\cap\mathfrak{p}$，$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$.

$\mathfrak{g}$の基底を次の条件を満すようにとる；

$$\overbrace{X_1\cdots\cdots X_p}^{\mathfrak{q}\cap\mathfrak{k}}\ \overbrace{X_{p+1}\cdots\cdots X_r}^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}}\ \overbrace{Y_1\cdots\cdots Y_q}^{\mathfrak{q}\cap\mathfrak{p}}\ \overbrace{Y_{q+1}\cdots\cdots Y_s}^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}}$$

$$B(X_i,X_j)=-\delta_{ij}\quad(1\leqq i,j\leqq r)$$
$$B(Y_i,Y_j)=+\delta_{ij}\quad(1\leqq i,j\leqq s)$$

但しBは$\mathfrak{g}$のKilling形式とする。

GのカシミールCはこれらの基底で$C=-\sum_{i=1}^{r}X_i^2+\sum_{j=1}^{s}Y_j^2$と表わされる。$X\in\mathfrak{g}$に対し$(X^*f)(gH)=\frac{d}{dt}f(e^{tX}gH)|_{t=0}$と定義する$(f\in C^\infty(G/H))$ことによって$\mathfrak{g}$の元はアフィン対称空間$G/H$の一階の微分作用素を定義する。この定義を$\mathfrak{g}$の展開環$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_c)$に拡張することによってカシミール$C$を$G/H$上の微分作用素と考えることができるが，よく知られているようにこの微分作用素はG/Hのpseudo-laplacianとなる。

さてG/H上の接ベクトル束$T(G/H)$の構造をわかりやすく

するために次の同型対応を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\sim} & T_{eH}(G/H) & \xrightarrow{\sim} & T_{xH}(G/H) \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ X & \longmapsto & D_X & \longmapsto & (L_x)_* D_X \end{array}$$

但し $D_X f = \frac{d}{dt} f(e^{tX}H)|_{t=0}$, $L_x(gH) = xgH$

更に $G \times \mathfrak{g} \ni (x, X) \longmapsto (xH, (L_x)_* D_X) \in T(G/H)$

となる写像を考えると、$(xH, (L_x)_* D_X) = (yH, (L_y)_* D_Y)$ であるための必要十分条件は $\exists h \in H$ $y = xH$, $Y = Ad(h^{-1})X$

である。従って $G \times \mathfrak{g} \ni (x, X), (y, Y)$ に対し

$$(x, X) \sim (y, Y) \overset{def}{\Longleftrightarrow} y = xh \ , \ Y = Ad(h^{-1})X$$

と定義すれば、

$$G \times \mathfrak{g}/\sim \ \cong \ T(G/H)$$

をうる。以後 $G \times \mathfrak{g}/\sim$ を記号 $G \times_H \mathfrak{g}$ で表わす。

$\mathfrak{g}$ の dual space を $\mathfrak{g}^*$ で表わすとき、$T^*(G/H)$ に対しても同様の議論を行う。

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\sim} & T^*_{eH}(G/H) & \xrightarrow{\sim} & T^*_{xH}(G/H) \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ \lambda & \longmapsto & \xi_\lambda & \longmapsto & (L_x^*)^{-1} \xi_\lambda \end{array}$$

但し $\xi_\lambda(D) = \lambda(X_D)$, ($Df = \frac{d}{dt} f(e^{tX_D}H)|_{t=0}$ となる $X_D \in \mathfrak{g}$)

更に $G \times \mathfrak{g}^* \ni (x, \lambda) \longmapsto (xH, (L_x^*)^{-1} \xi_\lambda) \in T^*(G/H)$

となる写像を考えると $(xH, (L_x^*)^{-1} \xi_\lambda) = (yH, (L_y^*)^{-1} \xi_\mu)$ であるため

の必要十分条件は $\exists h \in H,\ y = xh,\ \mu = h^{-1}\lambda$ (但し $h\lambda(X) = \lambda(\mathrm{Ad}(h^{-1})X)$)
である。従って $G \times \mathfrak{g}^* \ni (x,\lambda), (y,\mu)$ に対し

$$(x,\lambda) \sim (y,\mu) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} y = xh,\ \mu = h^{-1}\lambda$$

と定義すれば

$$G \times \mathfrak{g}^*/\sim \ \cong\ T^*(G/H)$$

をうる。以後 $G \times \mathfrak{g}^*/\sim$ を記号 $G \times_H \mathfrak{g}^*$ で表わす。

M を C^∞-多様体とし, T^*M 上の vector field 全体を $\mathfrak{X}(T^*M)$, T^*M 上の 1-form 全体を $\Omega^1(T^*M)$ で表わすとき,次の同型が成り立つ;

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(T^*M) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \Omega^1(T^*M) \\ \Psi & & \Psi \\ X & \longmapsto & i(X)\Omega \end{array} \qquad (\Omega = d\theta)$$

但し $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ は次の式で与えられる; 各 $\gamma \in T^*M$ に対し, $\theta_\gamma(v) = \langle \gamma, \pi_* v \rangle$ $(v \in T_\gamma(T^*M))$. ここに π は T^*M から M 上への自然な射影とする。f を T^*M 上の C^∞ 関数とするとき, $df \in \Omega^1(T^*M)$ に対し上の同型で対応する T^*M 上の vector field を H_f で表わし,これを f に対応する Hamiltonian vector field と呼ぶ。

§2. Pseudo-laplacian の principal symbol に対応する Hamiltonian vector field

アフィン対称空間上の Pseudo-laplacian は $\mathfrak{g}$ 上のカシミール

Cから得られるから同じ記号Cで，又そのprincipal symbolをcで表わすことにする。principal symol cは$T^*(G/H)$上のC^∞関数で，局所座標系で考えれば，簡単に

$$c(xH,\xi) = -\sum_{i=1}^{r}\langle (X_i^*)_{xH},\xi\rangle^2 + \sum_{j=1}^{s}\langle (Y_j^*)_{xH},\xi\rangle^2$$

であることがわかる。但しX_i, Y_jは$\mathfrak{g}$の§1で決められた基底である。カシミールCは$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_c)$のcenterの元であるから，$Ad(x)$不変より，

$$C = -\sum_{i=1}^{r} X_i^2 + \sum_{j=1}^{s} Y_j^2 = -\sum_{i=1}^{r} (xX_i)^2 + \sum_{j=1}^{s} (xY_j)^2$$

となる。（但しxXは$Ad(x)X$を表わす。以後簡単のためにAdを省く。）従って，$G\times\mathfrak{g}^*$の点(x,λ)を含む同値類を$[(x,\lambda)]$で表すと，

$$c(xH,\xi) = -\sum_{i=1}^{r}\langle (xX_i)^*_{xH},\xi\rangle^2 + \sum_{j=1}^{s}\langle (xY_j)^*_{xH},\xi\rangle^2$$

$$= -\sum_{i=1}^{r}\langle (L_x)_* D_{X_i},\xi\rangle^2 + \sum_{j=1}^{s}\langle (L_x)_* D_{Y_j},\xi\rangle^2$$

$$= -\sum_{i=1}^{p}\langle (L_x)_* D_{X_i},\xi\rangle^2 + \sum_{j=1}^{q}\langle (L_x)_* D_{Y_j},\xi\rangle^2$$

より，$c([(x,\lambda)]) = -\sum_{i=1}^{p}\langle (L_x)_* D_{X_i}, (L_x^*)^{-1}\xi_\lambda\rangle^2 + \sum\langle (L_x)_* D_{Y_j}, (L_x^*)^{-1}\xi_\lambda\rangle^2$

となるが，$L_{x^{-1}}^*\xi_\lambda((L_x)_* D_X) = \xi_\lambda((L_{x^{-1}})_*(L_x)_* D_X) = \xi_\lambda(D_X) = \lambda(X)$

より，

$$c([x,\lambda]) = -\sum_{i=1}^{p}\lambda(X_i)^2 + \sum_{j=1}^{q}\lambda(Y_j)$$

を得る。以後$G\times\mathfrak{g}^*$から$G\times_H\mathfrak{g}^*$への自然な射影をPで表わす。

$X\in\mathfrak{g}$に対し，$(\tilde{X}f)(x,\lambda) = \frac{d}{dt}f(xe^{tX},\lambda)\big|_{t=0}$ $(f\in C^\infty(G\times\mathfrak{g}^*))$

と定義することにより，$G\times\mathfrak{g}^*$上のvector field $\tilde{X}$を得る。

$$\tilde{H}_{(x,\lambda)} = 2\sum_{i=1}^{p}\lambda(X_i)\tilde{X}_i - 2\sum_{j=1}^{q}\lambda(Y_j)\tilde{Y}_j$$

と定義すると $\tilde{H}$ は $G\times\mathfrak{g}^*$ の vector field となるが、カシミールの G-不変性から $\sum_{i=1}^{p}(hX_i)^2-\sum_{j=1}^{q}(hY_j)^2=\sum_{i=1}^{p}X_i^2-\sum_{j=1}^{q}Y_j^2$ $(\forall h\in H)$ となり、各 $\lambda\in\mathfrak{g}^*$ に対し $\sum_{i=1}^{p}\lambda(hX_i)\widetilde{hX_i}-\sum_{j=1}^{q}\lambda(hY_j)\widetilde{hY_j}=\sum_{i=1}^{p}\lambda(X_i)\tilde{X}_i-\sum_{j=1}^{q}\lambda(Y_j)\tilde{Y}_j$ が成り立ち、vector field $\tilde{H}$ は $H_{(x,\lambda)}=H_{(xh,h^{-1}\lambda)}$ をみたす。従って $(P_*)_{(x,\lambda)}(\tilde{H})$ は $T^*(G/H)$ 上の vector field となる。この vector field $(P_*)_{(x,\lambda)}(\tilde{H})=H_{[x,\lambda]}$ が pseudo-laplacian の principal symol C に対応する Hamiltonian vector field になることをこの節で示そう。そのためには次の2つの lemma が必要である。

Lemma 1. P^* を $\Omega^1(G\times_H\mathfrak{g}^*)$ から $\Omega^1(G\times\mathfrak{g}^*)$ への自然な写像とするとき次の等式が成り立つ。

(i) $(P^*\theta)_{(x,\lambda)}(\tilde{X})=\begin{cases}\lambda(X) & (X\in\mathfrak{g})\\ 0 & (X\in\mathfrak{h})\end{cases}$

(ii) $(P^*\theta)_{(x,\lambda)}(\tilde{H})=2\sum_{i=1}^{p}\lambda(X_i)^2-2\sum_{j=1}^{q}\lambda(Y_j)^2$

(iii) $(P^*\theta)_{(x,\lambda)}(\partial_\nu)=0$ 但し $(\partial_\nu f)(x,\lambda)=\frac{d}{dt}f(x,\lambda+t\nu)\big|_{t=0}$

(iv) $(P^*\theta)_{(x,\lambda)}([\tilde{H},\tilde{X}])=0$ $(\forall X\in\mathfrak{g})$

(v) $(P^*\theta)_{(x,\lambda)}([\tilde{H},\partial_\nu])=-2\sum_{i=1}^{p}\lambda(X_i)\nu(X_i)+2\sum_{j=1}^{q}\lambda(Y_j)\nu(Y_j)$

(vi) $(\partial_\nu)_{(x,\lambda)}((P^*\theta)(\tilde{H}))=4\sum_{i=1}^{p}\lambda(X_i)\nu(X_i)-4\sum_{j=1}^{q}\lambda(Y_j)\nu(Y_j)$

但し θ は $\Omega^1(G\times_H\mathfrak{g}^*)\simeq\Omega^1(T^*(G/H))$ の canonical な 1-form である。(§1で定義を与えてある。)

Lemma 2. 次の等式が成り立つ。

(i) $(P^*i(H)\Omega)_{(x,\lambda)}(\tilde{X}) = 0 \qquad \forall X\in\mathfrak{q}$

(ii) $(P^*i(H)\Omega)_{(x,\lambda)}(\partial_\nu) = -2\sum_{i=1}^{p}\lambda(X_i)\nu(X_i) + 2\sum_{j=1}^{q}\lambda(Y_j)\nu(Y_j)$

〈Lemma 1の証明〉

πを$T^*(G/H)$からG/Hへの自然な射影とする。θの定義から

$$(P^*\theta)_{(x,\lambda)}(v) = \theta_{P(x,\lambda)}(P_*v) = \langle P(x,\lambda), \pi_*P_*v\rangle$$
$$= \langle L_{x^{-1}}^*\xi_\lambda, \pi_*P_*v\rangle \qquad \forall v\in T_{(x,\lambda)}(G\times\mathfrak{q}^*)$$

が成り立つ。

(i)の証明; $(\pi_*P_*\tilde{X})_{xH}(f) = \tilde{X}_{(x,\lambda)}(f\circ\pi\circ P) = \frac{d}{dt}f(xe^{tX}H)\Big|_{t=0}$
から $X\in\mathfrak{k}$ とすると $\pi_*P_*\tilde{X}=0$。又 $X\in\mathfrak{q}$ とすると
$\pi_*P_*\tilde{X} = (L_x)_*D_X$ となり、$(P^*\theta)_{(x,\lambda)}(\tilde{X}) = \langle L_{x^{-1}}^*\xi_\lambda, (L_x)_*D_X\rangle$
$= \langle\xi_\lambda, D_X\rangle = \lambda(X)$ となる。

(ii)の証明; $(\pi_*P_*(\tilde{H}))_{xH}f = \tilde{H}_{(x,\lambda)}(f\circ\pi\circ P)$
$= 2\sum_{i=1}^{p}\lambda(X_i)\frac{d}{dt}f(xe^{tX_i}H)\Big|_{t=0} - 2\sum_{j=1}^{q}\lambda(Y_j)\frac{d}{dt}f(xe^{tY_j}H)\Big|_{t=0}$

∴ $(\pi_*P_*)_{(x,\lambda)}(\tilde{H}) = 2\sum\lambda(X_i)(L_x)_*D_{X_i} - 2\sum\lambda(Y_j)(L_x)_*D_{Y_j}$

∴ $(P^*\theta)_{(x,\lambda)}(\tilde{H}) = 2\sum\lambda(X_i)^2 - 2\sum\lambda(Y_j)^2$

(iii)の証明; $\pi_*P_*\partial_\nu = 0$ から明らか。

(iv)の証明; $[\tilde{H},\tilde{X}] = 2\sum\lambda(X_i)[\tilde{X}_i,\tilde{X}] - 2\sum\lambda(Y_j)[\tilde{Y}_j,\tilde{X}]$
$X\in\mathfrak{q}$ のとき $[\tilde{X}_i,\tilde{X}] = \widetilde{[X_i,X]}$ で $[X_i,X]\in\mathfrak{k}$ で、$\pi_*P_*\tilde{\mathfrak{k}}=0$
から $\pi_*P_*[\tilde{X}_i,\tilde{X}]=0$ 同様に $\pi_*P_*[\tilde{Y}_j,\tilde{X}]=0$ ∴ $(P^*\theta)_{(x,\lambda)}([\tilde{H},\tilde{X}])=0$

$X\in\mathfrak{f}$ のとき, $[X_i, X]\in\mathfrak{g}$, $[Y_j, X]\in\mathfrak{g}$ より

$$(P^*\theta)_{(x,\lambda)}([\tilde{H},\tilde{X}]) = 2\sum_i \lambda(X_i)\lambda([X_i,X]) - 2\sum_j \lambda(Y_j)\lambda([Y_j,X])$$

上の等式の右辺は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の symetric algebra $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元 $\sum X_i[X_i,X] - \sum Y_j[Y_j,X]$ を $\mathfrak{g}^*$ 上の polynomial function として点 $\lambda\in\mathfrak{g}^*$ での値と見ることができる。$S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元 $\sum_i X_i[X_i,X] - \sum_j Y_j[Y_j,X]$ は symetrization によって $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元 $\frac{1}{2}[\sum_i X_i^2 - \sum_j Y_j^2, X]$ に移る。$C_{\mathfrak{f}} = -\sum_{i=p+1}^{r} X_i^2 + \sum_{j=q+1}^{s} Y_j^2$ とおくと $[\sum_{i=1}^{p} X_i^2 - \sum_{j=1}^{q} Y_j^2, X] = [-(C - C_{\mathfrak{f}}), X]$ で $C_{\mathfrak{f}}$ は algebra $\mathfrak{f}$ のカシミールとなり. $X\in\mathfrak{f}$ から $[-(C-C_{\mathfrak{f}}), X] = 0$ ∴ $\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{p} X_i^2 - \sum_{j=1}^{q} Y_j^2, X] = 0$

λ は linear な写像だから $\sum X_i[X_i,X] - \sum Y_j[Y_j,X] = 0$。

従って $(P^*\theta)_{(x,\lambda)}([\tilde{H},\tilde{X}]) = 0$ をうる.

(v)の証明; $[\tilde{H}, \partial_\nu] = [2\sum\lambda(X_i)\tilde{X}_i - 2\sum\lambda(Y_j)\tilde{Y}_j, \partial_\nu]$

$= -2\sum \partial_\nu(\lambda(X_i))\tilde{X}_i + 2\sum \partial_\nu(\lambda(Y_j))\tilde{Y}_j$

$= -2\sum \nu(X_i)\tilde{X}_i + 2\sum \nu(Y_j)\tilde{Y}_j$

∴ $(P^*\theta)_{(x,\lambda)}([\tilde{H},\partial_\nu]) = -2\sum\lambda(X_i)\nu(X_i) + 2\sum\lambda(Y_j)\nu(Y_j)$

(vi)の証明; (ii)から $(P^*\theta)_{(x,\lambda)}(\tilde{H}) = 2\sum\lambda(X_i)^2 - 2\sum\lambda(Y_j)^2$

$((\lambda+t\nu)(X))^2 = \lambda(X)^2 + 2t\lambda(X)\nu(X) + t^2\nu(X)^2$ から(vi)をえる。

q.e.d.

< Lemma 2の証明 >

$\forall v\in T_{(x,\lambda)}(G\times\mathfrak{g}^*)$ に対し $(P^* i(H)\Omega)_{(x,\lambda)}(v) = (i(H)\Omega)_{P(x,\lambda)}(P_* v)$

$= \Omega_{P(x,\lambda)}(H_{P(x,\lambda)}, P_* v) = (P^*\Omega)_{(x,\lambda)}(\tilde{H}, v) = (d(P^*\theta))_{(x,\lambda)}(\tilde{H}, v)$

$$= \tilde{H}_{(x,\lambda)}((p^*\theta)(\nu)) - \nu_{(x,\lambda)}((p^*\theta)(\tilde{H})) - (p^*\theta)_{(x,\lambda)}([\tilde{H},\nu])$$

$$(d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \text{ より})$$

となり，Lemma 1 から Lemma 2 をえる。 q.e.d.

さて $p^* : \Omega^1(G \times_H \mathfrak{g}^*) \longrightarrow \Omega^1(G \times \mathfrak{g}^*)$ は injective だから $i(H)\lrcorner\Omega = dC$ を示すためには $p^* i(H)\lrcorner\Omega = p^* dC$ を示せばよい。$p^* dC = d(C\circ p)$ で $(C\circ p)(x,\lambda) = -\sum \lambda(X_i)^2 + \sum \lambda(Y_j)^2$ だから，$\mathfrak{g}^*$ 上の関数 λ_i を $\lambda_i(\lambda) = \lambda(X_i)$ $(1 \leq i \leq p)$ $\lambda_j(\lambda) = \lambda(Y_{j-p})$ $(p+1 \leq j \leq p+q)$ と定義すると

$$p^* dC = -2\sum \lambda(X_i) d\lambda_i + 2\sum \lambda(Y_j) d\lambda_{j+p}$$

より，$X \in \mathfrak{g}$ とすると $(p^* dC)(\tilde{X}) = 0$。又 $(d\lambda_i)(\partial_\nu) = \partial_\nu(\lambda_i) = \nu(X_i)$ から $(p^* dC)(\partial_\nu) = -2\sum \lambda(X_i)\nu(X_i) + 2\sum \lambda(Y_j)\nu(Y_j)$

$\tilde{X}_{(x,\lambda)}$ $(X \in \mathfrak{g})$，∂_ν $(\nu \in \mathfrak{g}^*)$ は $T_{(x,\lambda)}(G \times \mathfrak{g}^*)$ を生成するから次の Proposition をえる。

Proposition $T^*(G/H)$ 上の vector field $H = P_* \tilde{H}$ は pseudo-laplacian C の principal symol c に対応する Hamiltonian vector field である。

§3. Pseudo-laplacian の大域的可解性

さて我々は §0 に述べた J. Rauch と D. Wigner の得た可解であるための十分条件(1)〜(4)が $M = G/H$ とし，$P = C$ としたとき成り立つことをこの節で証明しよう。

〈(1)の証明〉 pseudo-laplacian $\mathcal{C}$ の principal symol c は §2 で計算したように $-\sum_{i=1}^{p}\lambda(X_i)^2+\sum_{j=1}^{q}\lambda(Y_j)^2$ で与えられるから real であることは明らかであるから ${}^t\mathcal{C}=\mathcal{C}$ を示そう。そのためには、$\varphi, \psi\in C_c^\infty(G/H)$ にたいし

$$(\varphi,\psi)=\int_{G/H}\varphi(gH)\psi(gH)dg_H$$

(但し dg_H は G/H 上の G-invariant measure とする。)

と定義するとき、$(\mathcal{C}\varphi,\psi)=(\varphi,\mathcal{C}\psi)\quad\forall\varphi,\psi\in C_c^\infty(G/H)$ を示せばよい。$X\in\mathfrak{g}$ にたいし、簡単な計算によって、

$$(X^*\varphi,\psi)=-(\varphi,X^*\psi)$$

がわかるが、$\mathfrak{g}$ のカシミールは $\mathcal{C}=-\sum_{i=1}^{r}X_i^2+\sum_{j=1}^{s}Y_j^2$ だから $(\mathcal{C}\varphi,\psi)=(\varphi,\mathcal{C}\psi)\quad\forall\varphi,\psi\in C_c^\infty(G/H)$ がなり立つ。
q.e.d.

〈(2)の証明〉

§2の Proposition から簡単な計算によって点 $[(x,\lambda)]\in G\times_H\mathfrak{g}^*\simeq T^*(G/H)$ を通る Hamiltonian vector field H の積分曲線は $\Gamma(t)=\left[\left(x\,e^{2t(\sum\lambda(X_i)X_i-\sum\lambda(Y_j)Y_j)},\lambda\right)\right]\ (t\in\mathbb{R})$ となるから、曲線 $\Gamma(t)$ の G/H 上への projection を $\gamma(t)$ とすると、$\gamma(t)=(\pi\circ\Gamma)(t)=x\,e^{2t(\sum\lambda(X_i)X_i-\sum\lambda(Y_j)Y_j)}H$ となる。$c([x_0,\lambda_0])=0\ \ \lambda_0\neq 0$ となる点を通る曲線の G/H への projection は $\gamma_0(t)=x_0\,e^{2t(\sum\lambda_0(X_i)X_i-\sum\lambda_0(Y_j)Y_j)}H$ となるが、この曲線の非有界性を示すには、x_0 が単位元である場合に示せばよい。さて eH を通る曲線 $e^{2t(\sum\lambda_0(X_i)X_i-\sum\lambda_0(Y_j)Y_j)}H\ \ (t\in\mathbb{R})$

でもし $\forall j\ (1\leq j\leq q)$ に対して $\lambda_0(Y_j)=0$ とすると，$C([x_0, \lambda_0])=0$ から $-\sum_{i=1}^{p}\lambda_0(X_i)^2+\sum_{j=1}^{q}\lambda_0(Y_j)^2=0$ より $\forall i\ (1\leq i\leq p)$ に対して $\lambda_0(X_i)=0$ から $\lambda_0=0$ となり $\lambda_0\neq 0$ に矛盾する。従って $\sum\lambda_0(X_i)X_i-\sum\lambda_0(Y_j)Y_j$ には零でない $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{p}$ の元があるから曲線 $e^{2t(\sum\lambda_0(X_i)X_i-\sum\lambda_0(Y_j)Y_j)}H$ は非有界である。 q.e.d.

〈(3)の証明〉

(3)と(4)の証明には Hörmander [3] の Th 7.3 が本質的であるので定理を述べる。

Theorem (Hörmander)

X を analytic多様体，P を X 上の analytic係数の微分作用素とし real principal symbol P_m をもつとする。u を X 上の distribution とするとき $\{(x,\xi)\in WF_A(u);\ (x,\xi)\notin WF_A(Pu),\ \frac{\partial P_m}{\partial\xi}\neq 0\}$ は P_m の Hamiltonian vector field で invariant である。(但し $WF_A(u)$ は X 上の analytic 関数を modulo とした wave front set である。)

さて G/H は analytic 多様体であり，C は analytic 係数で real symbol C をもつ。更に $T^*(G/H)$ に座標近傍系を入れて計算すればわかるように $\xi\neq 0$ のとき $\frac{\partial C}{\partial\xi}\neq 0$ であるから，上の定理が適用できる。今 $u\in C^\infty(G/H)'$ で $Cu=0$ とする。もし $WF_A(u)$ の元 (x_0,ξ_0) が存在したとすると，(x_0,ξ_0) を通る Hamiltonian vector field の積分曲線 $\Gamma(t)$ は常に $WF_A(u)$

にある。ところが(2)により $\Gamma(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ は非有界であるから $u \in C^\infty(G/H)'$ に矛盾する。故に $\overline{WF_A}(u) = \phi$ となり u は至るところ analytic であり，G/H は連結非有界で $u \in C^\infty(G/H)'$ から $u=0$ が示される。 q. e. d.

《(4)の証明》

$G/H \supset \forall \Gamma$ compact に対して次の条件をみたすように G/H の compact set $\hat{\Gamma}$ をとる。

① $\Gamma \subset \mathrm{Int}\,\hat{\Gamma}$ ② $G/H - \hat{\Gamma}$ のどの conected component も非有界。(もし $G/H - \hat{\Gamma}$ の conected component で有界なものがあれば，それを含むように改めて $\hat{\Gamma}$ をとり直せばよい。)

この $\hat{\Gamma}$ に対し $G/H - \hat{\Gamma}$ で(3)と同様の議論を行なうと $G/H - \hat{\Gamma}$ 上で u は analytic となり，②から $G/H - \hat{\Gamma}$ 上で $u=0$ となる。従って $\mathrm{supp}\, u \subset \hat{\Gamma}$ q. e. d.

かくして我々は次の定理を得る。

Theorem. G/H を連結非有界なアフィン対称空間(G の中心は有限)とし，$\mathcal{C}$ を G/H 上の pseudo-laplacian とするとき，写像 $\mathcal{C}\,;\, C^\infty(G/H) \longrightarrow C^\infty(G/H)$ は onto である。

References

[1] A. Cérézo and F. Rouvière ; Operateurs differentiels invariants sur un groupe de Lie. École Polytechnique Paris (1972)

[2] S. Helgason ; The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces I, Annals of Mathematics vol 98 (1973)

[3] Hörmander ; Uniqueness Theorems and Wave Front Sets for Solutions of Liner Differential Equetions with Analytic Coefficients, Comm. Pure Appl Math, 24 (1971)

[4] J. Rouch and D. Wigner ; Global solvability of the Casimir operator, Annals of Math, 103 (1976)