数理解析研究所講究録
369巻 1979年 63-70

knots の Union の一般化

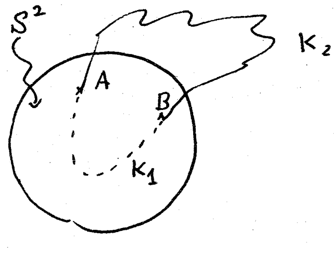
北大 理　酒井 健

Kinoshita-Terasaka [1] において導入された knots の Union を拡張し, unknotting number 1 をもつ knot の primeness の問題との関係を述べる。

K_1, K_2 を S^3 の2つ (tameな) knots とする。integer $n(\ge 0)$ に対して, 記号 $K_1 \oplus_n K_2$ は, 次の様にして構成された knot の集合を表わす:

K_1 と K_2 の connected sum を $\bar{K}$ とし, decompose する 2-sphere を S^2 とする:

$$\bar{K} = K_1 \mathop{\#}_{S^2} K_2$$



$\bar{K} \cap S^2 = \{A, B\}$ とおく。

Γ を S^3 に embed された arc で, 次の条件をみたすものとする:

(i) $\Gamma \cap \bar{K} = \partial\Gamma \cap \bar{K} = \{a, b\}$ (= 2 points) $\subset \bar{K} - \{A, B\}$.

(ii) Γ と S^2 は general position にあり, $\#(\Gamma \cap S^2) = n$ である。

そこで、$\Gamma\cap S^2$ の n 個の点に、Γ 上でみて、a の方から順に番号をつけ、$a_1,\cdots,a_n$ とする。

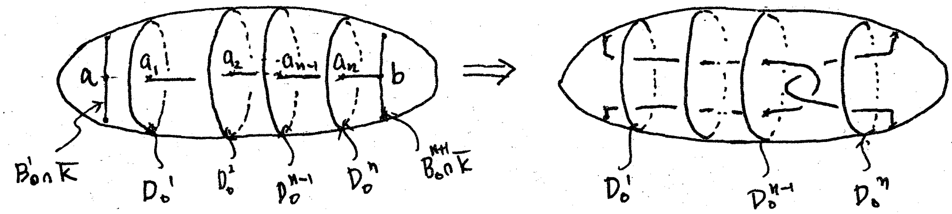
次に、Γ の regular n.b.d. B_0 を、次の条件をみたすようにえらぶ：

(iii) $B_0\cap S^2$ の各 connected component は 2-disc で、$\Gamma\cap S^2$ の点を、各々1点ずつ含む。

D_0^i を、$B_0\cap S^2$ の conn. comp. で、a_i を含むものとすると、B_0 は、$D_0^1\cup\cdots\cup D_0^n$ によって、$(n+1)$ 個の 3-cell に分割されるが、それらを、a を含むものから順に、$B_0^1,\cdots,B_0^{n+1}$ とすると、

(iv) $B_0\cap\bar{K}=(B_0^1\cap\bar{K})\cup(B_0^{n+1}\cap\bar{K})$ で、$(B_0^1, B_0^1\cap\bar{K})$, $(B_0^{n+1}, B_0^{n+1}\cap\bar{K})$ は、ともに、trivial cell-pair (i.e. $\cong(B^2\times B^1, 0\times B^1)$) である。

すると、B_0 は、抽象的には下図左の如くみえる。そこで、$\bar{K}$ から $\bar{K}\cap B_0$ を取り除き、下図右の2本の arc で置き換えて、$\bar{K}$ から得られる knot を K_Γ (単に K) とかく。



上の条件をみたすあらゆる Γ から、上の様にして得られた knot K の集合が $K_1\oplus_n K_2$ である。

とくに、$K_1\oplus_1 K_2$ が、Kinoshita-Terasaka [1] の意味での union である。

我々が、$K_1 \phi_n K_2$ を考える理由は、次の事実に基づく：

まず、次の命題 $U(n)$ $(n \geq 0)$ を考える：

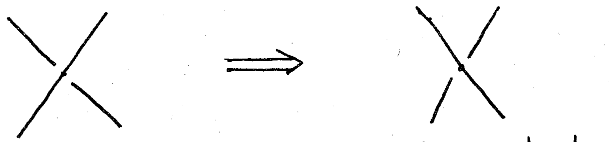
$U(n)$: K_1 と K_2 を、non-trivial knot とすると、$\forall K \in K_1 \phi_n K_2$ に対して、K は non-trivial knot である。

すると、次のことが容易にわかる。

<u>Prop.</u> $\forall n$ に対し、$U(n)$ が正しい。

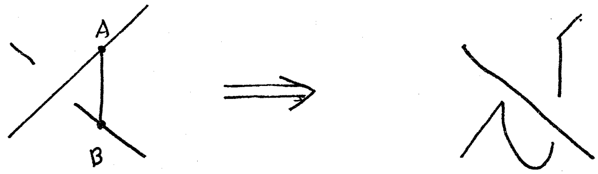
$\Longleftrightarrow$ unknotting number 1 をもつ knot は prime である。

proof) $\Rightarrow$). $\overline{K}$ を unknotting number 1 の knot とし、non-trivial な knots K_1, K_2 があって、$\overline{K} = K_1 \underset{S^2}{\#} K_2$ となったとする。$\overline{K}$ の regular projection を選んで、ある crossing point で、上下道を入れ換えて trivial knot になったとする：



$\overline{K}$　　　　　trivial knot.

overcrossing point $\overset{A}{}$ と undercrossing point $\overset{B}{}$ を vertical に結ぶ arc を Γ とする：



$\overline{K}$　　　　　trivial

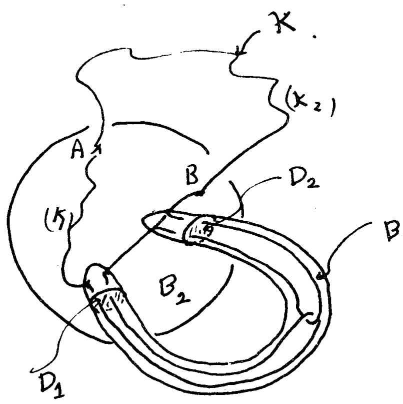
Γ と S^2 とは、general position にあるとしてよい。$\#(S^2 \cap \Gamma) = n$ とすれば、trivial knot $\in K_1 \phi_n K_2$ となって、矛盾。

逆も，ほとんど明らかである。□

そこで，$U(n)$について，知られていることを，次にのべる。

Th.0. (Schubert)

$U(0)$は正しい。□



Th.1. (Kinoshita－Terasaka)

$U(1)$は正しい。□

筆者は，次の事を証明した。

Th.2. $U(2)$は正しい。

以下に，証明のoutlineを示す。

$n=2$であるから，$\partial\Gamma=\{a,b\}\subset K_1$とする。(上図)

$B_0^2=B_1$，S^2に関して，K_1を含む3-cellをB_2，$B_1\cup B_2=V$とおく。

Vはsolid torus。$D_0^i=D_i$ $(i=1,2)$とおく。

lemma. 0. $K\in K_1\oplus_2 K_2$に対し，上のVを考えた時，次の(i)～(iii)をみたす(W, D)が存在するなら，K_1はtrivial knotである。

(i) D: disc in S^3 s.t. $\partial D=K$.

(ii) W: solid torus in S^3 s.t. $V\subset \mathring{W}$ かつ $V\not\simeq 0$ in W

($V\not\simeq 0$は，homotopic to 0でないことを意味する)。

(iii) $D\subset\mathring{W}$ □

(証明は，Wのuniversal coverを考える。(略))。

このlemmaを用いて，次のことがわかる。

lemma. 1. trivial knot $\in K_1\oplus_2 K_2$で，VがS^3の中でknotしてい

る（Vのcoreがknotしている）なら，K_1はtrivial knotである。

よって，Th.2.の証明において，Vがunknottedの時のみ示せばよい。

<u>Th.2.の証明</u>.

K_1, K_2 : non-trivial，$K \in K_1 \# K_2$ が trivial knot，上のVがunknot と仮定して，矛盾を導く。この時，

<u>lemma</u> 2．次の様なdisc Dが存在する．

(i) $\partial D = K$.

(ii) $D \cap \partial V = l \cup c_1 \cup \cdots \cup c_M$ で，lは，AとBを結ぶ simple arc, c_iは，simple closed curve.

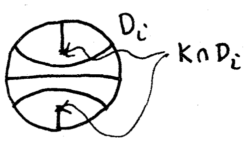
(iii) c_iは，innermost on D で，c_iがD上でboundするdiscをd_iとすると，$d_i \subset \overline{V^c}$．（$d_i$は，Vの外側で張っている）

(iv) c_iは，次の2つの場合のいずれか．

(イ) c_iは，Vのlongitude (i.e. $c_i \not\sim 0$ on ∂V).

(ロ) $c_i \sim 0$ on ∂V のときは，c_iは，∂V上でdisc d_i'をboundするが，d_j'は，lを内部に含んでいる。

(v) $D \cap D_i \subset D_i$ $(i=1,2)$ は，下図の如くである。



(vi) l 又は c_j の subarc γ_1 と，∂D_i $(i=1 \text{ or } 2)$ の subarc γ_2 とでできた closed curve γ が，∂V上で，$\partial(D_1 \cup D_2)$ とは γ_2 のみで交わ

るdisc d をboundする時には、dの内部に必ずAヌはBが含まれている。

$m_i=\#(\ell\cap\partial D_i)$ $(i=1,2)$ とすると、上の(vi)の条件より、$m_1=m_2$ がわかるから、$m=m_1=m_2$ とおく。

$p_{ij}=\#(c_j\cap\partial D_i)$ とおくと、同様に $p_{1j}=p_{2j}$ で $\equiv p_j$ とおく。さらに、$p_1+\cdots+p_\mu=p$ とおく。

$D_0=D\cap V$ として、$D_0\cap(D_1\cup D_2)$ を D_0 で観察する。

$N_0=\#(\partial D_0\cap(\partial D_1\cup\partial D_2))$ とおくと、

$$N_0=\#(\ell\cap\partial D_1)+\#(\ell\cap\partial D_2)+\sum_{i=1}^{\mu}\#(c_i\cap\partial D_1)+\sum_{i=1}^{\mu}\#(c_i\cap\partial D_2)+4$$
$$=2m+2p+4.$$

そこで、上の N_0 個の点を結ぶ ∂D_0, $D_0\cap(D_1\cup D_2)$ のsubarcは

$N_1=\frac{3}{2}N_0$ 本 (N_0 コの各点に3本ずつ集まるから) あるが、これらを $\lambda_1,\cdots,\lambda_{N_1}$ とする。そこで、$O_1,\cdots,O_{N_2}$ を、$D_0-\bigcup_{i=1}^{N_1}\lambda_i$ のconnected componentsとする。

ここで、上の m, p_i について、$m\leq 1$ or $^{\exists}i\leq\mu$ $p_i\leq 2$ なら、K_2 がunknotとなって矛盾ゆえ、$m\geq 2$ かつ、$^{\forall}i$, $p_i\geq 3$ としてよい。

そこで、上の $\{O_i\}$ に関して、場合分けする。

Case 1. 各 O_i が、open 2-cellの時。

この時、N_0 個のpointsを0-cell, $\lambda_1,\cdots,\lambda_{N_1}$ を1-cell, $\overline{O}_1,\cdots,\overline{O}_{N_2}$ を2-cellとする。D_0 のcell分解が与えられたこと

になる。簡単のため，O_i の closure も O_i とかくことにする。
次の言葉を使う：O_i が m-辺形 とは，∂O_i が m 個の 1-cell からなっている時。
そこで，まず次式が成立する：

$$N_0 - N_1 + N_2 = 1 - \mu.$$

これより，

$$N_2 = \frac{1}{2} N_0 + 1 - \mu = m + p + 3 - \mu \qquad (*)$$

次に，$O_1, \cdots, O_{N_2}$ を次の様に分類する．

i) ∂O_i が knot 上の点を含む．

（この様な O_i の個数は，高々 5 個）

ii) ∂O_i が，knot 上の点を含まない。これをさらに分ける．

イ) $O_i \subset B_1$ ロ) $O_i \subset B_2$

イ) の 2-cell が α コ，ロ) の 2-cell が β コとする。

Assertion 1. 上の ii) のイ) の 2-cell は，2 辺形，4 辺形，6 辺形では，ありえない。□

このことより，次の 2 組の式のうち，一方が成り立つ：

① $\begin{cases} \alpha + \beta + 4 \geq N_2 \\ m + p - 2 \geq 4\alpha \end{cases}$ ② $\begin{cases} \alpha + \beta + 5 \geq N_2 \\ m + p - 4 \geq 4\alpha \end{cases}$

Assertion 2 ii) のロ) の 2-cell に，2 辺形が含まれていれば，(4) に帰着されて，矛盾が出る。□

よって，ii) のロ) の 2-cell は，すべて，4 辺形以上としてよい。

そこで，更に，次の２つの場合に分ける．

A) ii) の b) の 2-cell に，実際 4辺形が含まれる場合．

B) ii) の b) の 2-cell は，すべて 6辺形以上の時．

A) の時には次式が成立する．

$$2\beta \leq p + m - 1 - 2\mu \quad \cdots \quad (**)A$$

B) の時

$$3\beta \leq p + m - 1 \quad \cdots \quad (**)B.$$

(*) と {①, ②}，{(**)A, (**)B} の，いずれの組み合せ（例えば {(*), ①, (**)A}）からも，矛盾がでて（単純計算）Case 1. の証明がおわる。

Case 2. は，cell-decomposition になっていない場合であるが，cell-分割になっている部分を取り出して，上と同様の議論をする。以上で証明おわり。

$n \geqq 3$ については，今の所不明である。

Reference.

[1] Kinoshita-Terasaka: Osaka Math. J. 9(1957) 131～153

[2] H. Terasaka: Osaka Math. J. 12(1960) 113～144.

[3] H. Schubert: Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 3. Abh. (1949)