数理解析研究所講究録
370巻 1979年 154-164



# Marottoの定理の一般化

名 大 教養　　白岩 謙一
名工大　　　　倉田 雅弘

§1. 1975年 Li-Yorke [1]は, 次のような結果を得た。$f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$を連続写像とする。$f^3(a)\leqq a<f(a)<f^2(a)$となる$a\in[0,1]$があれば, $f$はchaoticである。(P.2 (a)(b) をみたすとき$f$はchaoticであるという.) この結果は1978年 Marotto [2]によって, 次のように高次元の場合に拡張された: $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ $(n\geqq 1)$ を微分可能な写像で, $f(0)=0$, $T_0f$の固有値の絶対値は1より大きいとする。0の十分小さな近傍$U$が存在して, $x\in U$, $f^n x\notin U$, $f^m x=x$, $(0<n<m)$, $T_x^m f$は正則, となる$x$があれば$f$はchaoticである。(このとき0をsnap-back repellerという.)

ここでは, Marottoの定理の一般化を与える。我々の結果は,「微分同相に対して, transversal homoclinic pointがあれば, full shiftと同型な不変集合がある」というSmaleの定理[6]の可微分写像の場合への一般化になって

いる。

$M$を可微分多様体，$f: M \to M$を$C^1$－写像とする。$z_0 \in M$は$f$の双曲型固定点（即ち．$T_{z_0}f$の固有値の絶対値$\neq 0, 1$）とする。$z_0$の近傍では局所的安定多様体$W^s_{loc}(z_0)$，局所的不安定多様体$W^u_{loc}(z_0)$が存在する。$T_{z_0}M = E^s \oplus E^u$；$E^u$（resp. $E^s$）は$T_{z_0}f$の絶対値が1より大きい（resp. 1より小さい）固有値に対応する固有空間の直和，となっている。

定理　$f: M \to M$を$C^1$－写像，$z_0 \in M$を$f$の双曲型固定点とする。更に以下の三つの条件をみたすとする。

(1)　$u = \dim E^u \geqq 1$

(2)　$z_1 \in W^u_{loc}(z_0)$　$(z_1 \neq z_0)$で，ある正の整数$m$に対して$f^m(z_1) \in W^s_{loc}(z_0)$となるものがある。

(3)　$z_1$の$W^u_{loc}(z_0)$に於ける近傍となる$u$－次元disk $B^u$が存在して$f^m|B^u: B^u \to M$は埋め込みで，$f^m(B^u)$は$W^s_{loc}(z_0)$と$f^m(z_1)$で横断的に交わる。

このとき，以下が成り立つ。

(a)　正の整数$N$が存在して，任意の整数$P \geqq N$に対して周期$P$の周期点が存在する。

(b)　$M$の非可算部分集合$S$で以下をみたすものがある（

Sを scrambled set と呼ぶ)。

(i) Sは周期点を含まない。

(ii) $f(S) \subset S$.

(iii) 任意の $x, y \in S$ ($x \neq y$) に対して

$$\limsup_{k \to \infty} d(f^k(x), f^k(y)) > 0$$

(iv) 任意の $x \in S$, 任意の周期点 $y$ に対して

$$\limsup_{k \to \infty} d(f^k(x), f^k(y)) > 0.$$

(v) 非可算集合 $S_0 \subset S$ が存在して, 任意の $x, y \in S_0$ に対して

$$\liminf_{k \to \infty} d(f^k(x), f^k(y)) = 0.$$

§2. 証明の方針。transversal homoclinic point の場合と同様に, 矩形 $E^s(r) \times E^u(r)$ から M への二つの埋め込みで, これらを symbols とする full shift から M の中への写像が自然にひきおこされるようなものを作る。

$\sigma = s, u$ に対して

$$E^\sigma(r) = \{ v \in E^\sigma \mid \|v\| \leqq r \}$$

とする。十分小さな $r_1>0$ に対して，$z_0$ の近傍の上への埋め込み $\Phi: E^s(r_1)\times E^u(r_1)\to M$ で $\Phi(E^\sigma(r_1))=W^\sigma_{loc}(z_0)$ $(\sigma=s,u)$ となるものがある。$z_0$ の $M$ に於ける近傍と，$E^s(r_1)\times E^u(r_1)$ を同一視する。$z_1\in E^u(r_1)$ としてよい。十分小さな $r>0$ を $z_1\notin E^u(r)$, $r_1>r$ となるように選んでおく。

<u>Main lemma</u>　$B^u\subset E^u(r_1)$ を $u$-次元 disk, $B^s$ を中心が $0$ である $s$-次元 disk とする。

$$\psi: B^s\times B^u\to E^s(r_1)\times E^u(r_1)$$

を埋め込みで，$\psi|B^u$ は inclusion となるものとする。任意の $\varepsilon>0$, $L>0$ に対して正の整数 $N(\psi,\varepsilon,L)$ が存在して，以下をみたす。

任意の整数 $n\geqq N(\psi,\varepsilon,L)$ に対して，次の (2.1)〜(2.8) をみたす埋め込み

$$\phi=\phi(\psi,\varepsilon,L,n): E^s(r)\times B^u\to E^s(r_1)\times E^u(r_1)$$

が存在する。

(2.1)　$y\in B^u$ に対して $\phi(E^s(r)\times y)\subset\psi(B^s\times y)$

(2.2)　$f^{-n}\phi(E^s(r)\times B^u)\subset E^s(r)\times E^u(r)$.

(2.3)　$f^{-n}\phi(\partial E^s(r)\times B^u)\subset\partial E^s(r)\times E^u(r)$.

(2.4)　$x\in E^s(r)$ に対して，$\pi^s f^{-n}\phi(x\times B^u)=x$.

(2.5) $\quad v \in T(f^{-n}\phi(E^s(r)\times y))$, $y \in B^u$ に対して,

$$\|v^u\| < \varepsilon \|v^s\|.$$

(2.6) $\quad v \in T(\phi(E^s(r)\times y))$, $y \in B^u$ に対して,

$$\|(Tf^{-n}v)^s\| > L\|v^s\|.$$

(2.7) $\quad v \in T(f^{-n}\phi(x\times B^u))$, $x \in E^s(r)$ に対して,

$$\|(Tf^n v)^s\| < \varepsilon \|(Tf^n v)^u\|,$$

(2.8) $\quad \|(Tf^n v)^u\| > L\|v^u\|.$

ただし,(2.5)~(2.8)で $v \neq 0$ とする。$v \in TE$, $v \in T(E^s(r)\times E^u(r))$ に対して $v^\sigma$ を $v$ の $E^\sigma(r)$-成分, $\pi^\sigma$: $E^s(r)\times E^u(r) \to E^\sigma(r)$ を自然な projection とする ($\sigma = s, u$).

証明の概略.

Palis の $\lambda$-lemma [3] は, $E^u(r_1)$ に横断的な disk-family $\{\psi(B^s\times y) \mid y \in B^u\}$ に関して一様に成り立つ。従って, $B^s\times B^u$ に於ける $B^u$ の近傍 $V$ があって, $f^{-n}(\psi(B^s\times y)\cap V)$ は $n$ を大きくとることにより, $E^u(r)$ に ($C^1$-の意味で)任意に近ずけることができる。$y \in B^u$, $x \in E^s(r)$ に対して

$$\chi(x, y) = f^{-n}(\psi(B^s\times y)\cap V)\cap(x\times E^u(r))$$

とおく.

$$\phi(x, y) = f^n(\chi(x, y))$$

と定義すると，(2.1)～(2.4)をみたす。Nを十分大きくすると $n \geqq N$ に対して，(2.5)～(2.8)が成り立つ。

§3 Shiftの構成．次にMain lemmaを用いて，矩形の二つの埋め込みで，full-ShiftのSymbolsとなるようなものを構成する。

Lemma 1. 正の整数 $N_1$ があって，任意の整数 $N_0 \geqq N_1$ に対して，矩形の対からの埋め込み

$$\phi_i : (E^s(r) \times E^u(r_1),\ E^s(r) \times B^u_i) \to E^s(r_1) \times E^u(r_1)$$

$(i = 0, 1)$ があって，$i, j = 0, 1$ に対して以下をみたす。

(3.1) $f^{N_i}(\phi_i(E^s(r) \times B^u_i)) \subset \phi_j(E^s(r) \times E^u(r_1))$

(3.2) $f^{N_i}(\phi_i(E^s(r) \times \partial B^u_i)) \subset \phi_j(E^s(r) \times (E^u(r_1) - B^u_j))$

(3.3) $(f^{N_i})_* : H_{u-1}(\phi_i(E^s(r) \times \partial B^u_i)) \to H_{u-1}(\phi_j(E^s(r) \times (E^u(r_2) - B^u_j))$ は同型．ここで $H_{u-1}(\ \ )$ は $(u-1)$-次ホモロジー群．$(f^{N_i})_*$ は $f^{N_i}$ からひきおこされた準同型。

(3.4) $x \in E^s(r)$ に対して，$\pi^s \phi_i(x \times B^u_i)$ は一点。

$\pi^s \phi_i(E^s(r) \times B^u_i) = E^s(r)$.

(3.5) $y \in B^u_i$ に対して $\pi^u f^{N_i} \phi_i(E^s(r) \times y)$ は一点。

(3.6) $v \in T(f^{N_i} \phi_i(x \times B^u_i))$, $x \in E^s(r)$ に対して

$$2\|v^s\| < \|v^u\|$$

(3.7) $v \in T(\phi_i(E^s(r) \times y))$, $y \in B^u_i$ に対して

$$2\|V^u\| < \|V^s\|$$

(3.8) $V \in T(\varphi_i(x \times B^u_i))$, $x \in E^s(r)$ に対して,

$$\|(Tf^{N_i}V)^u\| > 8\|V^u\|.$$

(3.9) $V \in T(\varphi_i(E^s(r) \times y))$, $y \in B^u_i$ に対して,

$$8\|(Tf^{N_i}V)^s\| < \|V^s\|$$

(3.10) $A_0 = \varphi_0(E^s(r) \times B^u_0)$, $A_1 = \varphi_1(E^s(r) \times B^u_1)$

とすると $A_0 \cap A_1 = \phi$.

(3.11) 整数 $k$ $(0 \leqq k \leqq N_1 - 1)$ があって, $0 \leqq i \leqq N_0 - 1$ に対して, $f^k(A_1) \cap f^i(A_0) = \phi$, $0 \leqq i \neq k \leqq N_1 - 1$ に対して, $f^k(A_1) \cap f^i(A_1) = \phi$.

ただし, (3.6) ~ (3.9) で $V \neq 0$.

証明の概略. $D^u$ を十分小さな $u$ - 次元 disk で $E^u(r_1)$ に於ける $z_1$ の近傍となっているものとする。$\lambda$ - lemma により, $N_3 > 0$ が十分大きければ $f^{N_3}(D^u)$ は $C^1$-metric で $E^u(r_1)$ に任意近くできる。このとき, $\pi^u f^{N_3} | (D^u$ の十分小さな近傍) の階数は $u$ となるから, 陰関数の定理により, 埋め込み

$$\psi : E^s(\delta') \times D^u \longrightarrow E^s(r_1) \times E^u(r_1)$$

で, $\psi | D^u =$ inclusion, $y \in D^u$ に対して,

$\pi^u f^{N_3} \psi(E^s(\delta') \times y) =$ 一点 となるものがある. $\delta' > 0$, $D^u$ を適当に選ぶと

$$f^{N_3}\psi(E^s(\delta') \times D^u) \subset E^s(r) \times E^u(r_1)$$

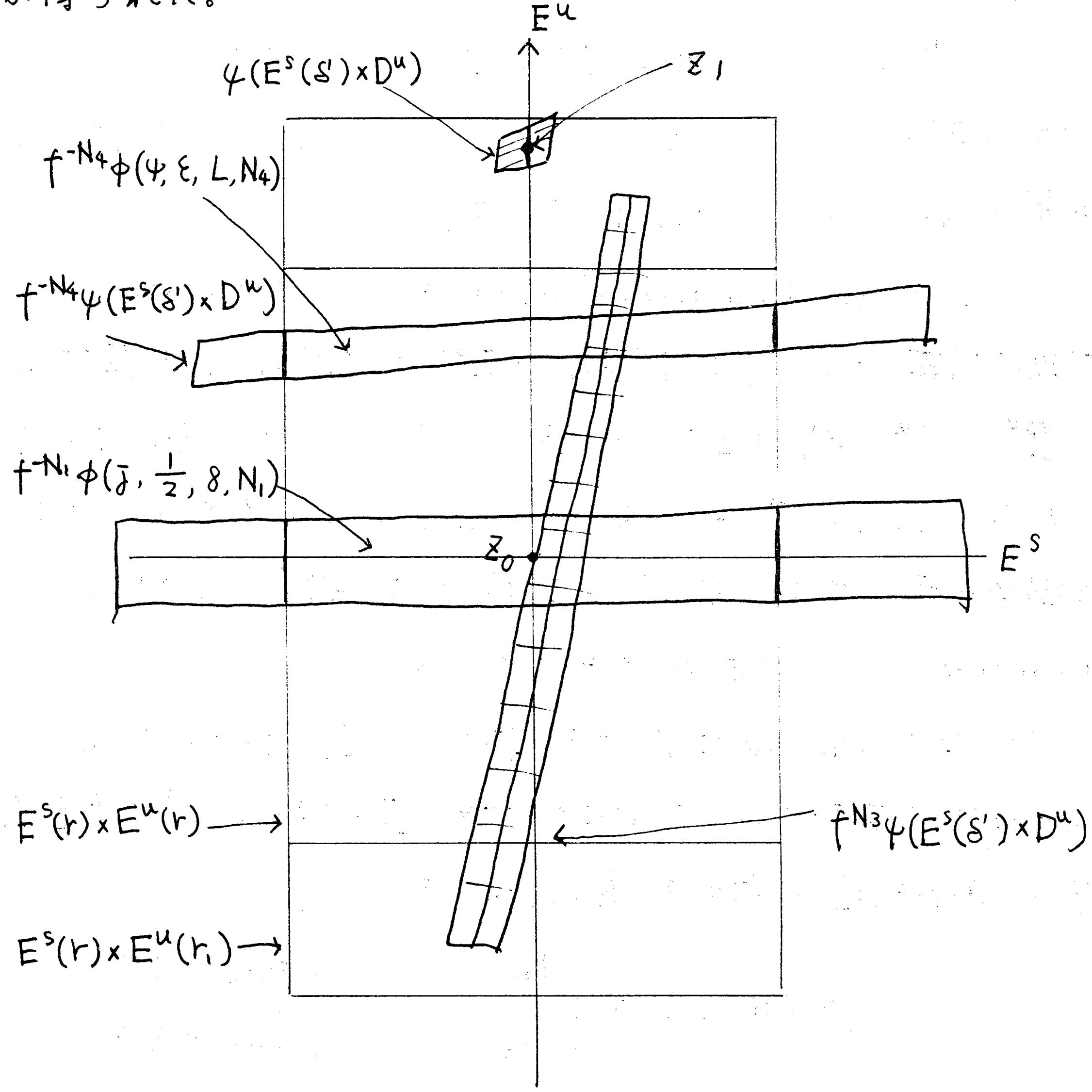
$$f^{N_3}\psi(\partial E^s(\delta') \times D^u) \subset E^s(r) \times (E^u(r_1) - E^u(r))$$

とできる。

十分小さな $\varepsilon$, $L^{-1}>0$ に対して, Main lemma で, 整数 $N_4 = N(\psi, \varepsilon, L)$ と埋め込み

$$\Phi(\psi, \varepsilon, L, N_4): E^s(r)\times D^u \to E^s(r_1)\times E^u(r_1)$$

が得られた。




自然な inclusion

$$j: E^s(r)\times E^u(r) \to E^s(r_1)\times E^u(r_1)$$

に対して，Main lemma で整数 $N_2 = N(\delta, \frac{1}{2}, 8)$ と $n \geqq N_2$ に対して埋め込み

$$\phi(\delta, \tfrac{1}{2}, 8, n) : E^s(r) \times E^u(r) \to E^s(r_1) \times E^u(r_1)$$

がある。$N_3$ を十分大きくとっておくと $N_3 + N_4 \geqq N_2$ となっている。$N_1 = N_3 + N_4$ とおく。

$$f^{-N_4}\phi(\psi, \varepsilon, L, N_4) : E^s(r) \times D^u \to E^s(r) \times E^u(r_1)$$

を微分同相 $\varphi_1 : E^s(r) \times E^u(r_1) \longrightarrow E^s(r) \times E^u(r_1)$ に拡張する。

任意の $N_0 \geqq N_1$ $(\geqq N_2)$ に対して，

$$f^{-N_0}\phi(\delta, \tfrac{1}{2}, 8, N_0) : E^s(r) \times E^u(r) \to E^s(r) \times E^u(r_1)$$

を微分同相 $\varphi_0 : E^s(r) \times E^u(r_1) \to E^s(r) \times E^u(r_1)$ に拡張する。

$B_1^u = D^u$，$B_0^u = E^u(r)$ とする。$\varepsilon, L^{-1} > 0$ を十分小さくとっておくと，($Tf^{N_3}\psi$ に依っている)，(3.6)～(3.9) の $i = 1$ の場合が示される。(3.1)～(3.9) の他の部分は，Main lemma (2.1)～(2.8) からでてくる。

次に上の lemma の $A_i = \varphi_i(E^s(r) \times B_i^u)$ $(i = 0, 1)$ を symbols とする two-sided shift $\Sigma = \{A_0, A_1\}^{\mathbb{Z}}$ を考える。$\underline{a} = (a_i) \in \Sigma$ に対して $k(\underline{a}, i)$ を

$$k(\underline{a}, i) = \begin{cases} N_0 & a_i = A_0 \text{ のとき} \\ N_1 & a_i = A_1 \text{ のとき} \end{cases}$$

とする。

$$F^{-i}(\underline{a}) = \begin{cases} (f|a_0)^{-k(\underline{a},0)} \circ \cdots \circ (f|a_{i-1})^{-k(\underline{a},i-1)}(a_i) & \text{if } i > 0 \\ a_0 & \text{if } i = 0 \\ f^{k(\underline{a},-1)}(\cdots f^{k(\underline{a},i+1)}(f^{k(\underline{a},i)}(a_i) \cap a_{i+1}) \cap \cdots) \cap a_0 & \text{if } i < 0 \end{cases}$$

とおく。すると

<u>Prop.</u> (a) $\underline{a} \in \Sigma$ に対して $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} F^{-i}(\underline{a})$ = 一点。

(b) $P : \Sigma \to M$ を $P(\underline{a}) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} F^{-i}(\underline{a})$ と定義すると $P$ は連続。

(c) $\underline{a} = (a_i) \in \Sigma$, $\underline{b} = (b_i) \in \Sigma$ に対して，$i \geqq 0$ があって

$a_i \neq b_i$ ならば $P(\underline{a}) \neq P(\underline{b})$。

(d) lemma 1 で $N_0 = N_1$ とおいたときは $P\sigma = f^{N_0} \circ P$

となる。ここで $\sigma$ は $\Sigma$ の shift map.

証明の概略。

(3.1)～(3.3) から (a) での $\bigcap_i F^{-i}(\underline{a}) \neq \phi$ がでる。(3.4)～(3.9) から (a) での $\bigcap_i F^{-i}(\underline{a})$ = 一点 と (b), (3.10) から (c) が示される。

§4. 定理の証明の概略. (a) $N = 2N_1$ とおく。任意の $N_0 + N_1 \geqq N$ に対して $\underline{a} = (a_i) \in \Sigma$ を $a_{2i} = A_0$, $a_{2i+1} = A_1$ となる元とすると $\sigma^2(\underline{a}) = \underline{a}$. $f^{N_0+N_1}P(\underline{a}) = P\sigma^2(\underline{a}) = P(\underline{a})$. 故に $P(\underline{a})$ は周期 $N_0 + N_1$ の周期点である。

(b) lemma 1 で $N_0 = N_1$ とおく。$\underline{a} = (a_i) \in \Sigma$ に対して，

$$R(\underline{a}, n) = \#\{a_i \mid 0 \leqq i \leqq n,\ a_i = A_0\}$$

と定義する。実数 $W \in (0, 1)$ に対して，次の(1)，(2)を満す $\Sigma$ の元 $\underline{a}^\omega = (a_i^\omega)$ を一つ選ぶ。

(1) $a_i^\omega = A_0 \Rightarrow i = k^2$ for some $k \in \mathbb{Z}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{R(\underline{a}^\omega, n^2)}{n} = \omega$。

$S_0 = P(\{\sigma^k(\underline{a}^\omega) \mid \omega \in (0, 1),\ k \geqq 0\})$.

$S = \bigcup_{n\geqq 0} f^n(S_0)$ と定義すると Li-Yorke [1], Marotto [2] と同様に $S$ は scrambled set となる.

## 文献


[1] Li & York: Period Three Implies Chaos, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 985-992.

[2] F. R. Marotto: Snap-Back Reppellers Implies Chaos in $\mathbb{R}^n$, Jour. Math. Analysis & Appl., 63 (1978), 199-233.

[3] J. Palis: On Morse-Smale Dynamical Systems, Topology, 8 (1969), 385-404.

[4] S. Smale: Diffeomorphisms with Many Periodic Points, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press (1968), 63-80.