

# Links of complex isolated singularities

東大 教養 森田 茂之

1. 序  $V^{r+1}$  を複素  $(n+1)$ -空間  $\mathbb{C}^{n+1}$  中の  $(r+1)$  次元 analytic set,  $P \in V$  を孤立特異点とする。点  $P$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の球面を  $S_\varepsilon^{2n+1}$  とし,  $L = V \cap S_\varepsilon^{2n+1}$  とおくと  $\varepsilon$  が十分小さいとき  $L$  は  $(2r+1)$  次元向きづけられた  $C^\infty$  多様体となる。  $L$  の  $S_\varepsilon^{2n+1}$  中での法束を  $\nu$  とすると,  $\nu$  には自然に  $p (= n-r)$  次元複素ベクトル束の構造が入る。  $BV(p)$  を  $p$  次元複素ベクトル束の分類空間,  $\mathcal{B}$  の上の普遍ベクトル束とする。  $\mathcal{B}$  の適当な metric に関する disk bundle sphere bundle をそれぞれ  $D(\mathcal{B}), S(\mathcal{B})$  とする。商空間  $D(\mathcal{B})/S(\mathcal{B})$  は普通  $MV(p)$  と記される Thom space と呼ばれる。  $\mathcal{B}$  を  $f: L \rightarrow BV(p)$  と  $\nu$  の分類写像とする。  $\nu$  にも適当に metric を入れておくと  $f$  は写像  $f': D(\nu)/S(\nu) \rightarrow MV(p)$  を誘導する。  $\mathcal{B}$  の  $S_\varepsilon^{2n+1}$  中での管状近傍を  $T$  とすると  $(T, \partial T)$  と  $(D(\nu), S(\nu))$  とは

微分同相である。そこで写像

$$\alpha: S_{\mathbb{C}}^{2n+1} \rightarrow T/\partial T \cong D(V)/S(V) \xrightarrow{f'} MU(p)$$

を考へる。ここで上の写像は  $S_{\mathbb{C}}^{2n+1}$  における  $\bar{T}$  の補集合上一点に付する写像である。  $\alpha$  はホモトピー群

$\pi_{2n+1}(MU(p))$  の元を定義する。この元を以後  $\theta(V, p)$  と

記す。以上の構成は Pontryagin-Thom の construction

と呼ばれるものであるが コボルディズム理論における基底的

のものである。さて  $p=1$  としよう。このときには

点上の写像に因り  $Milnor$  ファイバーと呼ばれるい

うものも考へることにより容易に  $\theta(V, p)=0$  となる。更

に一般に 特異点  $p$  が適当の意味で smoothable である

(たとえば Hartshorne [3] 参照)  $\theta(V, p)=0$  となる。実

際  $\theta(V, p)$  は特異点の smoothability へのある位相的障

害と見えてゐるのである。本稿では  $\theta(V, p)$  に関する

Sullivan の予想 [9] とそれに関連する topics の紹介

をしてゐる。

## 2. 極小モデル

この節では Sullivan に

よる極小モデルの理論を簡単に与えておく。詳しくは [2]

[8][9] を参照したい。

$M$  を  $C^\infty$ -多様体とする。  $\Omega^*(M)$  を  $M$  の

de Rham 複体とすると de Rham の定理により  $\Omega^*(M)$  は  $M$  の実コホモロジーを与える:  $H^*(\Omega^*(M)) \cong H^*(M; \mathbb{R})$ . Sullivan の理論のひとつ重要な帰結は 複体  $\Omega^*(M)$  から  $M$  の実ホモトピー型が完全に決定できるということである。少し詳しく説明しよう。簡単のため以後は  $M$  は単連結かつ  $H^*(M; \mathbb{R})$  有限次元とする。

定義  $\mathbb{R}$  上の differential graded algebra (以後 DGA と略記する)  $M = \bigoplus_{i \geq 0} M^i$  が  $\Omega^*(M)$  の (マロト) モデルであるとは DGA 写像  $f: M \rightarrow \Omega^*(M)$  が  $f^*: H^*(M) \rightarrow H^*(\Omega^*(M))$  が同型となるものが存在するということ。

定義 DGA  $M$  が  $M$  の極小モデルであるとは  $M$  はモデルであって二条件 (i)  $M$  は graded algebra として自由 (ii)  $dM \subset M^+ M^+$  つまり  $M$  の微分  $d$  による image は decomposable elements より成る。とみたことという。

次の定理は基本的である。

定理 1 (i)  $M$  には極小モデル  $\rho: M(H) \rightarrow \Omega^*(H)$  が存在する。

(ii)  $\rho': M'(H) \rightarrow \Omega^*(H)$  と他の極小モデルとある  $D&A$  写像  $f: M(H) \rightarrow M'(H)$  が存在し  $f^*: H^*(M(H)) \cong H^*(M'(H))$  かつ  $\rho$  と  $\rho' \circ f$  と同次の意味でホモトピーである。即ち  $D&A$  写像  $F: M(H) \rightarrow \Omega^*(H) \otimes (t, dt)$  が存在して  $F|_{t=0, dt=0} = \rho$ ,  $F|_{t=1, dt=0} = \rho' \circ f$ 。ここに  $(t, dt)$  は  $R[t] \otimes \Lambda(dt)$  の次数  $= 0$ ,  $dt$  の次数  $= 1$  である。

(iii)  $f: M \rightarrow N$  と  $(\infty)$ -写像とある。このとき  $D&A$  写像  $\hat{f}: M(N) \rightarrow M(H)$  がホモトピーを除いて唯一つ存在してこの図式が可変になる。

$$\begin{array}{ccc} M(N) & \xrightarrow{\hat{f}} & M(H) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ \Omega^*(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega^*(H) \end{array}$$

さて  $M$  のホモトピー群  $\pi_k(M)$  には *Whitehead* 積と呼ばれる演算が定義される。即ち  $\pi_p(M)$  の元  $\alpha$  と  $\pi_q(M)$  の元  $\beta$  とに對してある元  $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q-1}(M)$  が次のように定義される。 $\alpha, \beta$  はそれぞれ写像  $a: (D^p, \partial D^p) \rightarrow (M, x_0)$ ,  $b: (D^q, \partial D^q) \rightarrow (M, x_0)$  により代表さ

これより  $[\alpha, \beta]$  は写像  $c: \partial(D^{p+q}) = D^p \times \partial D^q \cup \partial D^p \times D^q \rightarrow M$ ,  $c(x, y) = a(x)$  (if  $y \in \partial D^q$ ),  $b(y)$  (if  $x \in \partial D^p$ ) により定義される。Whitehead 積に関する性質がある。

$$(i) \quad [\alpha, \beta] = (-1)^{pq} [\beta, \alpha]$$

$$(ii) \quad (-1)^{pr} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{qp} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{rq} [[\gamma, \alpha], \beta] = 0$$

$$(\gamma \in \pi_r(M))$$

従って  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間  $\pi_{*}(M) \otimes \mathbb{R}$  には  $\mathbb{R}$  上の graded Lie algebra の構造が入る。

また  $m(M)$  を  $M$  の極小モデルとする。  $I = m^{+}(M) / m^{+}(M)m^{+}(M)$  を  $m(M)$  の indecomposable element の全体とすると自然な同型

$$I \cong \text{Hom}(\pi_{*}(M) \otimes \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

が得られる。更に  $m(M)$  の微分  $d$  により誘導される  $I$  上の余積は上の同型により Whitehead 積の dual に対応する。

### 3. Formal spaces と Formal mappings 前節

述べたように  $M$  の実ホモトピー型は  $M$  の極小モデル  $m(M)$  により完全に決定される。(しかし多様体の中には(或いは、一般に空間の中には) その実ホモトピー型が

コホモロジー環  $H^*(M; \mathbb{R})$  により既に決定されるという  
ことがある。このような空間は次のように定式化される [2]。

定義  $M$  が formal であるとは DGA 写像  
 $\psi: M(M) \rightarrow H^*(M; \mathbb{R})$  が  $\psi^*: \text{コホモロジー同型}$  と  
なるものが存在するを意味する。ここに  $H^*(M; \mathbb{R})$  の微分は  
恒等的に 0 とする。

$M$  が formal のときに行う極小モデル  $M(M)$  は  
 $H^*(M; \mathbb{R})$  から構成することが出来る。更に写像に関するは  
次のように定義する。

定義  $C^\infty$ -写像  $f: M \rightarrow N$  が formal である  
とは  $M, N$  が共に formal かつ次の図式がホモトピー可換の  
を意味する。

$$\begin{array}{ccc} M(N) & \xrightarrow{\psi} & H^*(N; \mathbb{R}) \\ \hat{f} \downarrow & & f^* \downarrow \\ M(M) & \xrightarrow{\psi} & H^*(M; \mathbb{R}) \end{array}$$

ここに  $\psi$  は  $M, N$  の formalities を与える DGA 写像。

formal space と formal map に関する定理

としは次のことが著しい。

定理2 ([2]) コンパクト Kähler 多様体及び  
それらの間の正則写像は formal である。

4.  $\pi_*(H^*(p)) \otimes \mathbb{R}$  ここで本題にもどろう。  
まず  $\mathcal{O}(V, E)$  の層で成群  $\pi_*(H^*(p))$  を決定したいの  
があるが Torsion は無視して  $\pi_*(H^*(p)) \otimes \mathbb{R}$  を考える。  
(それに伴って  $\mathcal{O}(V, E)$  を  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(V, E)$  と記す) まず定義  
により  $H^*(p) = D(\xi)/S(\xi)$  である。これは多様体では  
ないが 多様体の対により近似できることがわかる。従って  
2, 3 節の結果が使える。(2, 3 節の結果は一般の単複  
体に対して  $\mathbb{Q}$  上で成立する。本稿では簡単のために  $\mathbb{C}$ -  
多様体だけを考えていたのである)。

まず  $H^*(p)$  は formal space であることがわかる。  
従ってその実ホモロジー群 1 上のコホモロジー環  $H^*(H^*(p); \mathbb{R})$   
により決まる。ところが Thom 同型により

$$\begin{aligned} \tilde{H}^*(H^*(p); \mathbb{R}) &= \text{Ideal of } c_p \text{ in } H^*(BU(p)) \\ &= c_p \mathbb{R}[c_1, \dots, c_p]. \end{aligned}$$

$F(p)$  は  $H^*(p)$  におけるコホモロジー類  $c_p$  を消した空  
間である。 $F(p)$  は  $H^*(p)$  上の  $S^{2p-1}$  ファイバー である

ファイバー空間の全空間と考えることが出来る。従って

Gysin 系列により

$$\begin{aligned}\tilde{H}^*(F(p)) &\cong H^*(C_p R[c_1, \dots, c_p](y)), \quad dy = C_p \\ &\cong \tilde{H}^*\left(\bigvee_{\alpha} S^{l(C_p(\alpha))}\right).\end{aligned}$$

そうす。ここに  $C_{\alpha}$  は  $c_1, \dots, c_{p-1}$  の monomial 全体を動かして  $l(C_p(\alpha)) = C_p(\alpha)$  の次数,  $V$  は one point union である。空間  $F(p)$  は formal であることがわかるので結局

$$F(p) \underset{\text{有理 h.e.}}{\sim} \bigvee_{\alpha} S^{l(C_p(\alpha))}$$

そうす。従って Hilton [4] により次のことがわかる。

$$\pi_* (F(p)) \underset{\otimes \mathbb{R}}{\cong} \{C_p(\alpha) \mid \alpha \text{ は } \pm \text{ 成える } \} \text{ free Lie algebra } (= L \text{ と記す})$$

### 5. Links of complex isolated singularities.

$P$  は  $V$  の孤立特異点とし  $C_{\mathbb{R}}(V, P) \in \pi_{2n+1}(MU(p)) \otimes \mathbb{R}$  と考へる。  $\pi_{2n+1}(MU(p)) \otimes \mathbb{R} \cong \pi_{2n+1}(F(p)) \otimes \mathbb{R} \cong L$  であるので  $C_{\mathbb{R}}(V, P) \in L$  と考へるよい。 Sullivan はこの元に関する予想を述べた ([9])。

予想  $C_{\mathbb{R}}(V, P)$  は  $L$  の元として bracket とひもつが含みきれないだろう。

この予想は志賀 [7] により特別な  $(V, P)$  に対して



証明されたのであるが後述する Barth の結果 [1] により  
彼の議論は全く一般の  $(V, P)$  に対して通用するので結局  
Sullivan の予想は肯定的に解かれたことになる。議論を詳  
しく述べることはこのようになる。

定理 3 ([7])  $\sigma_R(V, P)$  は前記の通りである。

- (i)  $n$ : 偶数  $\Rightarrow \sigma_R(V, P) = 0$
- (ii)  $n$ : 奇数  $\Rightarrow \sigma_R(V, P)$  は  $[C_P C_{r-\frac{n-1}{2}},$   
 $C_P C_{r-\frac{n-1}{2}}]$  のスカラー倍。

志賀 [7] の議論は次のようである。  $V$  は non-  
singular proj. manifold  $M \subset \mathbb{C}P^n$  上の affine cone  
とする。このとき  $\emptyset$  が孤立特異点となるが  
Larsen [5] により  $L$  は  $(2r-n)$  連結となる。従って  
分類写像  $f: L \rightarrow BU(p)$  は  $BU(p)$  の  $(2r-n)$  連結  
被覆  $BU(p) \langle 2r-n \rangle$  にリフトする。  $MU(p) \langle 2r-n \rangle$  は  
対応する Thom space となると  $\sigma(V, \emptyset)$  は  $\pi_{2nr}$   
 $(MU(p) \langle 2r-n \rangle)$  の元と思える。ところが  $L$  の bracket  
は二個以上含む次数  $(2n+1)$  の元は  $MU(p) \langle 2r-n \rangle$  には  
リフトしないことが計算によりわかるので上述の結果となる  
のである。一般には  $L$  は  $(2r-n)$  連結と見限るゝいか

そしてこれが Barth [17] の結果:  $H^*(L; \mathbb{C}) = 0$  for  $0 < * \leq 2r-1$  があるという議論は一般の  $(V, E)$  に対して成立するのだろうか。

ここでもう一つ特別にみる。  $V$  は Segre imbedding  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{2n+1}$  上の cone である。このとき  $\mathcal{O}(V, \mathbb{Q})$  は  $[C_1, C_2]$  の non-zero multiple である。 ([3] 参照)

6. 結語. 筆者は Sullivan の予想の意味を考へる過程で次の疑問にぶつかった。

問  $M$  はコンパクト Kähler 多様体  $N$  への余次元  $p$  の部分多様体とする。  $V$  は  $N$  の正束とすると写像

$$M \rightarrow D(V)/S(V)$$

は formal か? 又はもっと弱く写像

$$M \rightarrow MU(p)$$

は formal か?

今のところこの結果が得られていない。

定理 4 ([6])  $M$  は  $\mathbb{C}P^n$  の中の余次元  $p$  の複素部分多様体とする。このとき写像

$$M \rightarrow MU(p)$$

は formal である。

この定理は一言でいうと “余次元  $p$  が小さいとき  $\mathbb{C}P^n$  の中の複素部分多様体は (  $\infty$ -部分多様体にくらべて ) 非常に少ない” ことを意味する。つまり定理 3 において  $V$  が  $puj$  manifold 上の cone のときには定理の主張は定理 4 から従う。

一般の  $M$  に関する問題の正否は今のところ尚さ  
わかっていない。

## 文 献

[1] Barth, W., Lokale Cohomologie bei isolierten Singularitäten analytischer Mengen, Schr. Math. Inst. Univ. Münster (2) Heft 5 (1971), 59 pp.

[2] Deligne, P., P. Griffiths, J. Morgan,

- D. Sullivan, The real homotopy of Kähler manifolds, *Invent. Math.* 29 (1975), 245-274.
- [3] Hartshorne, R., Topological conditions for smoothing algebraic singularities, *Topology* 13 (1974), 241-253.
- [4] Hilton, P. J., On the homotopy groups of the union of spheres, *J. London Math. Soc.* 30 (1955), 154-171.
- [5] Larsen, M. E., On the topology of complex projective manifolds, *Invent. Math.* 19 (1973), 251-260.
- [6] Morita, S., in preparation.
- [7] Shiga, H., Notes on links of complex isolated singular points, preprint.
- [8] Sullivan, D., Differential forms and the topology of manifolds, *Manifolds - Tokyo* (1973), 37-49.
- [9] Sullivan, D., Infinitesimal computations in topology, *Publ. I. H. E. S.* 48 (1978), 269-331.