数理解析研究所講究録
372巻 1979年 1-16

複素解析空間上の formal Poincare and Dolbeault 補題について

京大 数理研 藤木 明

Xを複素多様体，YをXの解析的部分集合，$U=X-Y$，$j: U \to X$を包含写像とする。また$\Omega_X^{\cdot}$，$\mathcal{E}_X^{\cdot}$を各々X上holomorphic，また(複素)C^∞の，de Rham複体とする。IをX内でのYの定義イデアル，$\bar{I}$をIの(複素)共役とし，$\mathcal{J}=(I+\bar{I})\mathcal{E}_X$，($\mathcal{E}_X=\mathcal{E}_X^0$は$X$上複素数値$C^\infty$函数の層)とおく。この時，$\Omega_X^{\cdot}$，$\mathcal{E}_X^{\cdot}$の$Y$に沿っての完備化，$\hat{\Omega}_X^{\cdot}$，$\hat{\mathcal{E}}_X^{\cdot}$を次のように定義する。

$$\hat{\Omega}_X^{\cdot} = \varprojlim \Omega_X^{\cdot}/I^{n+1}\Omega_X^{\cdot}, \qquad \hat{\mathcal{E}}_X^{\cdot} = \varprojlim \mathcal{E}_X^{\cdot}/\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{E}_X^{\cdot}$$

この時次が成立する。

<u>定理 1.</u> $0 \to \mathbb{C}_Y \to \hat{\mathcal{E}}_X \xrightarrow{d} \hat{\mathcal{E}}_X^1 \to \hat{\mathcal{E}}_X^2 \to \cdots\cdots$

は$\mathbb{C}_Y$のresolutionを与える，つまり上の列は完全列。ここに$\mathbb{C}_Y$はYの$\mathbb{C}$をファイバーとするconstant sheaf.

同様にformal Dolbeault complex

$$\hat{\mathcal{E}}_X^{0,\cdot} = \varprojlim \mathcal{E}_X^{0,\cdot}/\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{E}_X^{0,\cdot}$$

を考えると，

<u>定理 2.</u> $0 \to \hat{\mathcal{O}}_X \to \hat{\mathcal{E}}_X^{0,1} \to \hat{\mathcal{E}}_X^{0,2} \to \hat{\mathcal{E}}_X^{0,3} \to \cdots\cdots$

は $\hat{\mathcal{O}}_Y$ の resolution を与える。 ($\hat{\mathcal{O}}_X = \hat{\Omega}_X^0$)

定理 1, 2 をあわせて直ちに次の系を得る。

<u>系.</u> $0 \to \mathbb{C}_Y \to \hat{\mathcal{O}}_X \to \hat{\Omega}_X^1 \to \hat{\Omega}_X^2 \to \cdots\cdots$ (formal analytic Poincare lemma). Sasakura [11], Hartshorne [4].

今 $\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{\cdot} = \varprojlim_n \mathcal{J}^{n+1}\mathcal{E}_X^{\cdot} = \bigcap_n \mathcal{J}^{n+1}\mathcal{E}_X^{\cdot}$ とおくと 実は 定理 1 より詳しく次が成立する。

<u>定理 1'.</u> 次の可換図式が存在し、各行は完全列, かつ下行は上行の resolution を与える。

$$
(1)\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & j_!\mathbb{C}_U \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}_X \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{\cdot} \arrow[r] & \mathcal{E}_X^{\cdot} \arrow[r] & \hat{\mathcal{E}}_X^{\cdot} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

(ここに $j_!$ は direct image with proper supports, 従って $j_!\mathbb{C}_U$ は定数層 $\mathbb{C}_U$ を Y 上零とおいて X に拡張したものに他ならない。)

<u>注意 1.</u> 定理 2 に対応する図式は次のようになる。

$$
(2)\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & j_!\mathcal{O}_U \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathcal{O}}_X \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathcal{O}}_X/\mathcal{O}_X \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot} \arrow[r] & \mathcal{E}_X^{0,\cdot} \arrow[r] & \hat{\mathcal{E}}_X^{0,\cdot} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

よって、定理 2 は、$\mathcal{H}^0(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot}) \cong j_!\mathcal{O}_U$, $\mathcal{H}^1(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot}) \cong \hat{\mathcal{O}}_X/\mathcal{O}_X$, $\mathcal{H}^i(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot}) = 0$, $i \geq 2$ を意味し、逆にこれは定理 2 を帰結する。

<u>注意 2.</u> Y が各点で局所既約なら $\mathcal{J} = \{\varphi \in \mathcal{E}_X;\ \varphi(y) = 0\ \ \forall y \in Y\}$, つまり Y 上消える C^∞ 函数の全体。(cf. Kantor [7], Malgrange [8])

証明は次の2段階にわかれる。

Step 1: Y が X 内で divisor with normal crossings の場合に具体的な構成によって定理を示す。

Step 2. 一般の場合は、$f:\tilde{X}\to X$ なる固有双有理形写像で、$\tilde{X}$ 非特異かつ $\tilde{Y}=f^{-1}(Y)$ とおく時 イ) $f|_{\tilde{X}-\tilde{Y}}:\tilde{X}-\tilde{Y}\cong X-Y$, ロ) $\tilde{Y}=f^{-1}(Y)$ が $\tilde{X}$ 内で divisor with normal crossings をなす、の2条件をみたすものをとり (cf. Hironaka [6])、$(\tilde{X},\tilde{Y})$ に対する結果 (Step 1) から (X,Y) に対する結果を導く。

以下 Step 2 について述べる。

まず問題は局所的であるから、X は $\mathbb{C}^m=\mathbb{C}^m(z_1,\cdots,z_m)$ の開集合とみなしてよい。さらに $z_i=x_{2i-1}+\sqrt{-1}x_{2i}$ とおいて $\mathbb{C}^m$ と $\mathbb{R}^{2m}=\mathbb{R}^{2m}(x_1,\cdots,x_{2m})$ と同一視する。ここでもちろん $\dim_{\mathbb{C}}X=m$。$n=2m$ とおき $I=(i_1,\cdots,i_n)$ で整数 $i_\alpha\geqq 0$ の n 組を表す。$|I|=\sum_\alpha i_\alpha$ とおく。

定義 1. [8, I, Def. 2.3] a) 整数 $k\geqq 0$ に対し、Whitney の意味での Y 上の C^k 関数の層 ${}_k\tilde{\mathcal{E}}_Y$ を次の前層より定める：V を Y の任意の開集合とする時、${}_k\tilde{\mathcal{E}}_Y(V)=\{(g_I)\,;\,|I|\leqq k,\ g_I$ は Y 上の連続関数で以下に述べる条件(#)をみたす$\}$。b) $\tilde{\mathcal{E}}_Y=\varprojlim_k {}_k\tilde{\mathcal{E}}_Y$ とおき Y 上の (Whitney の意味での) C^∞ 函数の層という。(${}_k\tilde{\mathcal{E}}_Y$ の定義から自然にそれらが射影的系をなすことがわかる。)

さて条件(#)を説明する。まず任意の $y\in Y$ と Y 上の連続関数

の組 $G=(g_I)$ に対し、多項式 $T_y^k G(x)$ を式

$$T_y^k G(x)=\sum_{|I|\leq k}(x-y)^I/I!\, g_I(y)$$

で定義する。ここに $(x-y)^I=\prod_\alpha (x_\alpha-y_\alpha)^{i_\alpha}$, $I!=i_1!\cdots i_n!$。この $T_y^k G$ を用いて $R_y^k(G)=(R_y^k(G)_I)$, $|I|\leq k$, を式

$$R_y^k(G)_I=g_I-\partial^I(T_y^k G)/\partial x^I$$

により定義する。この時条件(#)とは

(#) $\forall I$ に対し $|R_y^k(G)_I(x)|=o(|x-y|^{k-|I|})$ $\forall x,y\in Y$,

$|x-y|\longrightarrow 0$

定義により自然写像 $r:\mathcal{E}_X\to\tilde{\mathcal{E}}_Y$ が存在する。実際、$r(h)=(\partial^I h/\partial x^I)_I$ とすればよい。今 r の核を $\mathcal{E}_{X,Y}$ と表す。明らかに、$\mathcal{E}_{X,Y}$ は X 上の C^∞ 函数で、Y の各点で任意階の導関数が零になるもの、つまり flat along Y なるものの全体を表す。

<u>定理</u>(Whitney) [8, I, Th. 4.1] r は全射であり従って次は完全列である。

(3) $0\to\mathcal{E}_{X,Y}\to\mathcal{E}_X\to\tilde{\mathcal{E}}_Y\to 0$

さて我々の第1の observation は、(1)の下行($\cdot=0$)が(3)と自然に同形になり従って上の Whitney の定理により完全列となることである。まず定義から自然な包含写像 $\iota: \mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X\to\mathcal{E}_{X,Y}$ が存在することに注意する。ι がさらに全射でもあることは、次の Malgrange の定理よりの結論である。

<u>定理</u>(Malgrange) [8, VI, Th. 1.1'] U を $\mathbb{R}^n$ の開集合, $f_1,\cdots,f_b$

をU上の実解析関数，ϕをU上のC^∞関数とする。この時次は同値である。 1) $\exists\psi_i, 1\leq i\leq b$, C^∞関数 on U s.t. $\varphi=\sum_{i=1}^{b}\psi_i f_i$
2) 各$u\in U$に対し，$T_u\varphi, T_uf_i$をuにおけるφ, f_iのTaylor級数，$\{T_uf_i\}$をuにおける形式的巾級数環$\hat{\mathcal{O}}_{U,u}$内においてT_uf_iの生成するイデアルとする。この時 $T_u\varphi\in\{T_uf_i\}$ $\forall u\in U$.

実際 もし $h_1=\cdots=h_d=0$ がXにおけるYのイデアル層の生成元とする時，$\{f_i\}=\{\mathrm{Re}\,h_j, \mathrm{Im}\,h_k\}$とおけば，$\{T_uf_i\}=\mathcal{O}_{X,u}$, $\forall u\in X$. が成立し，(あるいはもっと一般に，h_j達の共通零点がYに一致するならば，同様のことが成立し)，また一方$\phi\in\mathcal{E}_{X,Y}$ならば，$T_u(\mathrm{Re}\,\phi)=T_u(\mathrm{Im}\,\phi)=\{0\}$, $\forall u\in Y$, が成立するから，上の定理により，$\mathrm{Re}\,\phi$及び$\mathrm{Im}\,\phi$が，従ってϕがh_i及び$\bar{h}_j$の一次結合でかける。よって$\phi\in\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X$である。

さてこの同形性により自然写像$\tilde{\mathcal{E}}_Y^{\cdot}\to\hat{\mathcal{E}}_X^{\cdot}$が存在する。これを$\beta$とすると$\beta$は単射である。ここで逆写像$\gamma=\beta^{-1}:\hat{\mathcal{E}}_X^{\cdot}\to\tilde{\mathcal{E}}_Y^{\cdot}$を構成しよう。$\varphi\in\hat{\mathcal{E}}_X^{\cdot}$をとり$\varphi=(\varphi_m)_m$, $\varphi_m\in\mathcal{E}_X^{\cdot}/\mathcal{J}^{m+1}\mathcal{E}_X$, とおき，$\tilde{\varphi}_m\in\mathcal{E}_X$を勝手な拡張とする。この時 $\gamma(\varphi)=(\partial^I\tilde{\varphi}_m/\partial x^I)_I$, $m=|I|$, $0\leq m<\infty$, とおくと$\gamma(\varphi)$は$\tilde{\varphi}_m$の取り方によらず$\tilde{\mathcal{E}}_Y^{\cdot}$のwell-definedな元を定めることが容易にわかる。$\gamma=\beta^{-1}$なることも構成から明白である。よって我々は(1)下列の完全性を得た。

従って定理1'の主張を得るには，$\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{\cdot}=\mathcal{E}_{X,Y}^{\cdot}$が$j_!\mathbb{C}_U$のresolutionであることを示せばよい。最初に

補題 1. $f:\tilde{X}\to X$ を Step 2 のとおりとする時次が成立。

$$f_*\tilde{\mathcal{J}}^\infty\mathcal{E}^\cdot_{\tilde{X}} = \mathcal{J}^\infty\mathcal{E}^\cdot_X.$$

ここに $\tilde{\mathcal{J}}=(g+\bar{g})\mathcal{E}^\cdot_{\tilde{X}}$，$\tilde{\mathcal{J}}$ は $\tilde{Y}$ の定義イデアルの層。

証明. D を X 上の任意の微分作用素とする。この時任意の $\tilde{x}\in\tilde{X}$ に対し $\tilde{x}$ の近傍で定義された微分作用素 $\tilde{D}_{\tilde{x}}$ および正則関数 $h_{\tilde{x}}$ が存在し，任意の $g\in\mathcal{E}_X$ に対し，$(Dg)\circ f=\tilde{D}_{\tilde{x}}(g\circ f)\cdot(1/h_{\tilde{x}})$ が成立する。(cf. Poly [9, 4.4]). さて任意の $\tilde{g}\in f_*\tilde{\mathcal{J}}^\infty\mathcal{E}_{\tilde{X}}$ に対し，明らかに一意的な連続関数 g on X が存在し $\tilde{g}=g\circ f$ となる。補題はこの g が C^∞ かつ $g\in\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X$ を示せば示される。これは上の注意と次の事実から従う。任意の $g_1\in\tilde{\mathcal{J}}^\infty\mathcal{E}_{\tilde{X}}$ を任意の $h_1\in\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ に対し $g_1/h_1\in\tilde{\mathcal{J}}^\infty\mathcal{E}_{\tilde{X}}$ (cf. [8, IV. Prop. 1.4]).

これから直ちに定理 1′ が従う。実際，Step 1 での同形 $\tilde{j}_!\mathbb{C}_{\tilde{U}}\cong\tilde{\mathcal{J}}^\infty\mathcal{E}^\cdot_{\tilde{X}}$ に対し Rf_* を作用させると，左辺は，$Rf_*(\tilde{j}_!\mathbb{C}_{\tilde{U}})\cong Rf_*R\tilde{j}_!\mathbb{C}_{\tilde{U}}\cong Rj_!\mathbb{C}_U\cong j_!\mathbb{C}_U$，右辺は，$Rf_*\tilde{\mathcal{J}}^\infty\mathcal{E}^\cdot_{\tilde{X}}\cong f_*\tilde{\mathcal{J}}^\infty\mathcal{E}^\cdot_{\tilde{X}}=\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}^\cdot_X$ となる。(ただし計算はすべて $\mathbb{C}$ ベクトル空間の層のなすアーベル圏の derived category で考えている。) でてきた同形 $j_!\mathbb{C}_U\cong\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}^\cdot_X$ が自然なものと一致する事も容易にわかる。

定理 2 のためにはさらに次の補題に注意する必要がある。

補題 2. $f:\tilde{X}\to X$ を Step 2 のとおりとする。この時次が成立する。

$$\hat{f}_*\hat{\Omega}^p_{\tilde{X}}\cong\hat{\Omega}^p_X, \quad R^q f_*\Omega^p_X\cong R^q\hat{f}_*\hat{\Omega}^p_X, \quad q\geq 1.$$

実際Banica[1]により，$R^q\widehat{f_*\Omega^p_{\tilde X}} \cong R^q\hat f_*\hat\Omega^p_{\tilde X}$, $\forall q \geqq 0$．ところが $q \geqq 1$ の時，$R^qf_*\Omega^p_{\tilde X}$ の台は Y 上にあるから，$R^q\widehat{f_*\Omega^p_{\tilde X}} \cong R^qf_*\Omega^p_{\tilde X}$ である。また X は非特異だから $f_*\Omega^p_{\tilde X} \cong \Omega^p_X$ である。

<u>定理2の証明。</u> Step 1で示された $(\tilde X, \tilde Y)$ に関する結果と，完全列

$$0 \to \mathcal{J}^\infty \mathcal{E}^{0\cdot}_{\tilde X} \to \mathcal{E}^{0\cdot}_{\tilde X} \to \hat{\mathcal{E}}^{0\cdot}_{\tilde X} \to 0$$

に対し，Rf_* を作用させて long cohomology exact sequence をとった結果とから，

$$0 \to \mathcal{H}^0(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}^{0\cdot}_X) \to f_*\mathcal{O}_{\tilde X} \to \hat f_*\hat{\mathcal{O}}_{\tilde X} \to \mathcal{H}^1(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}^{0\cdot}_X) \to R^1f_*\mathcal{O}_{\tilde X} \to$$
$$R^1\hat f_*\hat{\mathcal{O}}_{\tilde X} \to \mathcal{H}^2(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}^{0\cdot}_X) \to R^2f_*\mathcal{O}_{\tilde X} \to R^2\hat f_*\hat{\mathcal{O}}_{\tilde X} \to \cdots$$

を得る。補題2の $p=0$ の場合から，容易に $\mathcal{H}^0(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}^{0\cdot}_X) \cong j_!\mathcal{O}_U$, $\mathcal{H}^1(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}^{0\cdot}_X) \cong \hat{\mathcal{O}}_X/\mathcal{O}_X$, $\mathcal{H}^i(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}^{0\cdot}_X) = 0$, $i \geqq 2$ を得る。注意1によりこれで定理の証明が終わる。

一方同じStep 1, Step 2に従って系の証明も直接に得られることがわかった。（本質的にT. Bloomの[12, Prop.3.1]の証明と同じ。）さらにこの方法では，笹倉氏の講演で述べられたような精密な形をも与えうる。（ここでは述べないが。）

<u>系の直接証明。</u> 補題2により，2つの複体 $f_*\Omega^{\cdot}_{\tilde X}$ と $\hat f_*\hat\Omega^{\cdot}_{\tilde X}$ の間の自然写像が quasi-isomorphism であることを見ればよい。このため2つのスペクトル列 $E_2^{p,q} = H^p(R^qf_*\Omega^{\cdot}_{\tilde X}) \Rightarrow \mathbb{R}^qf_*\Omega^{\cdot}_{\tilde X}$, $\hat E_2^{p,q} = H^pR^q\hat f_*\hat\Omega^{\cdot}_{\tilde X} \Rightarrow \mathbb{R}^q\hat f_*\hat\Omega^{\cdot}_{\tilde X}$ を比較する。普通のPoincaré補題及びStep 1から $\mathbb{R}^qf_*\Omega^{\cdot}_{\tilde X} \cong \mathbb{R}^q\hat f_*\hat\Omega^{\cdot}_{\tilde X} \cong R^qf_*\mathbb{C}_{\tilde X}$ である。一方

補題2により $E_2^{p,q} \cong \hat{E}_2^{p,q}$, $q>0$, が成立する。これから $E_2^{p,0} \cong \hat{E}_2^{p,0}$ が従う。

この証明方法は、実際にはもう少し一般の結果を与える。

[ ]. すなわち、

<u>定理3.</u> X を複素空間、Y をその部分空間で X の singular locus を含むものとする。この時次が成立する：自然写像

$$\alpha: \Omega^{\cdot}_{X|Y} \xrightarrow{\sim} \hat{\Omega}^{\cdot}_X$$

は quasi-isomorphism。ここで $\Omega^{\cdot}_{X|Y}$ は $\Omega^{\cdot}_X$ の Y への sheaf theoretic な制限。（Y が1点の時が上で述べた Bloom の定理）

次に(1)及び(2)の下列の analytic な表現を求めることを考える。$M(X)$ を $\mathcal{O}_X$-加群のなすアーベル圏、$\mathcal{C}(X)$ を $\mathcal{O}_X$-加群の複体 $\{\mathcal{F}^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ でその微分 $d_i: \mathcal{F}^i \to \mathcal{F}^{i+1}$ が1階の微分作用素であるもののなす圏とする。$\mathcal{C}(X)$ における射 $f: \mathcal{F}^{\cdot} \to \mathcal{G}^{\cdot}$ は $\mathcal{O}_X$-線形写像 $f^i: \mathcal{F}^i \to \mathcal{G}^i$ の組で $d_{i+1}\cdot f^i = f^{i+1}\cdot d_i$ を満たすもので与えられる。(詳しくは[5, §1]参照。) $M(X)$, $\mathcal{C}(X)$ 共に enough injectives を持つアーベル圏である。($\mathcal{C}(X)$ については[, Prop. 2.1])。$M(X)$ は、$F \in Ob M(X)$ に対し $F^{\cdot} \in \mathcal{C}(X)$ を $F^0 = F$, $F^i = 0$, $i \neq 0$, で定義することにより $\mathcal{C}(X)$ の部分圏とみなしうる。$DM(X)$, $D\mathcal{C}(X)$ で $M(X)$ 及び $\mathcal{C}(X)$ の導来圏を表す。上の注意により $DM(X)$ を $D\mathcal{C}(X)$ の部分圏とみなしてよい(cf. [3, p.377]). $1\times F$ で定義

する関手 $\mathcal{C}(X)\to\mathcal{C}(X)$, $D\mathcal{C}(X)\to D\mathcal{C}(X)$ については，この意味で，$M(X)$, $DM(X)$ を保存することが直ちにわかる。

まず $\mathcal{C}(X)\to\mathcal{C}(X)$ なる左完全関手 $j_!^m(\mathcal{F}^\cdot)$, $\hat{\Gamma}(\mathcal{F}^\cdot)$ を

$$j_!^m(\mathcal{F}^\cdot) = \varprojlim_k \Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot), \qquad \hat{\Gamma}(\mathcal{F}^\cdot) = \varprojlim_k \mathcal{F}^\cdot/\Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot)$$

で定義する。ここに $\Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot) = \mathcal{J}^k\mathcal{F}^\cdot + d(\mathcal{J}^k\mathcal{F}^{\cdot-1})$. $Rj_!^m$, $R\hat{\Gamma}$ を夫々 $j_!^m$, $\hat{\Gamma}$ の導来関手とする。

補題 3 $\mathcal{F}^\cdot\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}(X)$ に対し，次の functorial な triangle[†] が $D\mathcal{C}(X)$ において存在する。（†) cf. [3, I §1]）

(4)
$$\begin{tikzcd} & \hat{\mathcal{F}}^\cdot \arrow[dl] & \\ Rj_!^m(\mathcal{F}^\cdot) \arrow[rr] & & \mathcal{F}^\cdot \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

証明． pro-$\mathcal{C}(X)$ で自然数により添数づけられた $\mathcal{C}(X)$ の objects の射影系のなすアーベル圏とする。この時射影的極限 $\varprojlim$ は pro-$\mathcal{C}(X)\to\mathcal{C}(X)$ なる左完全関手とみられる。その右導来函手を $R\varprojlim$ で表す。さて今任意の $\mathcal{F}^\cdot$ に対し

$$0\to(\Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot))_k\to(\mathcal{F}^\cdot)_k\to(\mathcal{F}^\cdot/\Sigma_m^\cdot(\mathcal{F}^\cdot))_m\to 0$$

は，pro-$\mathcal{C}(X)$ における完全列。従って $R\varprojlim$ を作用させて $D\mathcal{C}(X)$ における triangle

$$\begin{tikzcd} & R\hat{\Gamma}(\mathcal{F}^\cdot) \arrow[dl] & \\ Rj_!^m(\mathcal{F}^\cdot) \arrow[rr] & & R\Gamma(\mathcal{F}^\cdot) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

を得る．（$(\mathcal{F}^\cdot)_k$ は $(\mathcal{F}^\cdot)_k = \mathcal{F}^\cdot$ なる constant system, $\mathcal{F}^\cdot \underset{\mathrm{dot.}}{=} \Gamma(\mathcal{F}^\cdot) = \varprojlim(\mathcal{F}^\cdot)_k$）明らかに $R\Gamma(\mathcal{F}^\cdot)\cong\mathcal{F}^\cdot$. 一方 $R^i\varprojlim = 0$, $i\geq 2$ (Roos) (cf. [4,

I. Prop. 4.1)，また $\mathcal{F}^{\cdot}/\Sigma_k^{\cdot}(\mathcal{F}^{\cdot}) \to \mathcal{F}^{\cdot}/\Sigma_{k-1}^{\cdot}(\mathcal{F}^{\cdot})$ surjective だから Mittag-Leffler の条件をみたし $R^1\varprojlim(\mathcal{F}^{\cdot}/\Sigma_k^{\cdot}(\mathcal{F}^{\cdot})) = 0^{*)} \Rightarrow R\varprojlim(\mathcal{F}^{\cdot}/\Sigma_k^{\cdot}(\mathcal{F}^{\cdot})) \cong \varprojlim \mathcal{F}^{\cdot}/\Sigma_k^{\cdot}(\mathcal{F}^{\cdot})$。(*) [4, I, Cor. 4.3]) さらに $\varprojlim \mathcal{F}^{\cdot}/\Sigma_k^{\cdot}(\mathcal{F}^{\cdot}) \cong \varprojlim \mathcal{F}^{\cdot}/\mathcal{J}^k\mathcal{F}^{\cdot} = \hat{\mathcal{F}}^{\cdot}$. Q. E. D.

(4) を用いると (1), (2) の analytic な表示が次のごとく得られる。

<u>命　題 1.</u> 1) (4) で $\mathcal{F}^{\cdot} = \Omega_X^{\cdot}$ とおく。すると (4) は，$D\mathcal{C}(X)$ に於て，完全列 (1) の下行 ($\mathcal{C}(X)$ 内で考えている) に同伴な triangle と自然に同形である。 2) $\mathcal{F}$ を X 上の解析的連接層とし，$\mathcal{F}^{\cdot} = \mathcal{F}$ (従って $\mathcal{F}^{\cdot} \in M(X)$) とする。この時 (4) は，$DM(X)$ において完全列 (2) の下行 $\otimes\mathcal{F}$ に同伴な $DM(X)$ における triangle と自然に同形である。

(注). アーベル圏における完全列はその導来圏における triangle を自然に定める。[3, P.63 Remark]

命題の証明の前に 2) について解説しておく。まず定理 2 は任意の連接 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対しその Y に沿っての formal completion $\hat{\mathcal{F}}$ の自然な fine resolution を与えることを見ておく。

<u>命題 2.</u> $\forall x \in Y$ に対し $\hat{\mathcal{E}}_{X,x}$ は $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群として忠実に平坦である。

<u>証　明</u> $\tilde{\mathcal{F}}$ を presheaf $U \to \prod_{u \in U} \mathfrak{F}_u$; ($\mathfrak{F}_u$: $u \in U$ における形式的巾級数環) により定義される X 上の $\mathcal{O}_X$-加群の層とする。各 $x \in Y$ に対して，自然な環の包含関係 $\mathcal{O}_{X,x} \subseteq \hat{\mathcal{E}}_{X,x} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{x}$ が存在する。 $\tilde{\mathcal{F}}_x$ は [8, III. Cor. 4.13] により忠実に平坦な $\mathcal{O}_{X,x}$-加

群であるから，任意のイデアル $\mathfrak{a}\subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ に対し，$\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{J}}_x\cap\hat{\mathcal{E}}_{X,x}=\mathfrak{a}\hat{\mathcal{E}}_{X,x}$ なることを見れば十分である(cf. [8, III. Prop. 4.7]). 実際これは，[8, VI, Th. 1.2] の特殊な場合である。(そこの記号で $\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{J}}_x\cap\hat{\mathcal{E}}_{X,x}=\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{J}}_x(Y)\cap\hat{\mathcal{E}}_{X,x}$ となることに注意.) Q.E.D.

<u>系</u>　$\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_X$-加群，$\hat{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ の Y に沿っての formal completion とする。この時複体 $\mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\hat{\mathcal{F}}) \overset{def}{=} \hat{\mathcal{E}}_X^{0,\cdot}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}\cong \mathcal{E}_X^{0,\cdot}\otimes_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}\hat{\mathcal{F}}$ は $\hat{\mathcal{F}}$ の自然な fine resolution を与える。

また $\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\mathcal{F})=\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}$, $\mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\mathcal{F})=\mathcal{E}_X^{0,\cdot}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}$ とおくと，$\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}$ を(2)の下行に作用させることにより完全列

$$(5)\qquad 0\to\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\mathcal{F})\longrightarrow\mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\mathcal{F})\longrightarrow\mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\hat{\mathcal{F}})\to 0$$

を得る。命題1 2)にいう'(2)の下行$\otimes\mathcal{F}$'とは(5)に他ならない。

<u>命題1の証明.</u>　1) ${}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot)=\mathcal{J}^k\mathcal{E}_X^\cdot+d(\mathcal{J}^k\mathcal{E}_X^{\cdot-1})$ とおく。pro-$\mathcal{C}(X)$ 内の完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma_k(\Omega_X^\cdot) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_X^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_X^\cdot/\Sigma_k(\Omega_X^\cdot) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot) \arrow[r] & \mathcal{E}_X^\cdot \arrow[r] & \mathcal{E}_X^\cdot/{}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

から triangles の間の写像

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{\Omega}_X^\cdot \arrow[dl] & & & & \hat{\mathcal{E}}_X^\cdot \arrow[dl] & \\
Rj_!^{\infty}\Omega_X^\cdot \arrow[rr] & & \Omega_X^\cdot \arrow[ul] \arrow[r] & {} & R\varprojlim {}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot) \arrow[rr] & & \mathcal{E}_X^\cdot \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

が得られる(補題3参照)。$\hat{\Omega}_X^\cdot\to\hat{\mathcal{E}}_X^\cdot$, $\Omega_X^\cdot\to\mathcal{E}_X^\cdot$ は夫々上の系及び通常の Dolbeault-Grothendieck 補題により同形であるから上の triangles は同形である。一方 $\mathcal{E}_X^\cdot\to\hat{\mathcal{E}}_X^\cdot$ の surjectivity は

$R^1\varprojlim{}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot)=0$ と同値であり，$R^i\varprojlim{}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot)=0,\ i\geq 2$ とあわせて (cf. 補題3の証明), $R\varprojlim{}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot)\cong\varprojlim{}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot)\cong\varprojlim \mathcal{J}^k\mathcal{E}_X^\cdot\cong\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^\cdot$ を得る。　2) $\mathcal{J}=\mathcal{O}_X$ の場合は 可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{J}^k & \to & \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^k & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{J}^k\mathcal{E}_X^{0,\cdot} & \to & \mathcal{E}_X^{0,\cdot} & \to & \mathcal{E}_X^{0,\cdot}/\mathcal{J}^k\mathcal{E}_X^{0,\cdot} & \to & 0
\end{array}$$

から上と同様に示される。一般の場合は，$(Rj_!^\infty\mathcal{O}_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{J}\cong Rj_!^\infty\mathcal{J}$ を示して $\mathcal{J}=\mathcal{O}_X$ の場合から導く。

次に今まで述べてきたことの 'dual' に対応する事実について簡単に述べる。

$'\mathcal{D}_X^\cdot$ を X 上の (複体の) currents の芽のなす層，$'\mathcal{D}_{Y^\infty}^\cdot=\Gamma_Y('\mathcal{D}_X^\cdot)$，つまり Y に台が含まれるような currents の層，$'\mathcal{D}_{X/Y^\infty}^\cdot={}'\mathcal{D}_X^\cdot/{}'\mathcal{D}_{Y^\infty}^\cdot$ とする。明らかな完全列

(5)　$0\to{}'\mathcal{D}_{Y^\infty}^\cdot\to{}'\mathcal{D}_X^\cdot\to{}'\mathcal{D}_{X/Y^\infty}^\cdot\to 0$

が存在する。(5) は次の意味で (1) の下列の dual であることに注意しておく。V を X の任意の開集合とする時，通常の位相に関し $\Gamma(V,\mathcal{E}_X^\cdot)$ は FS (Frechet-Schwartz)-複体であるが，この位相に関し $\Gamma(V,\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^\cdot)$ は閉 (Whitney), よって $\Gamma(V,\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^\cdot)$, $\Gamma(V,\hat{\mathcal{E}}_X^\cdot)$ も自然に FS-複体の構造を持つ。一方 $\Gamma(V,\mathcal{E}_X^\cdot)\times\Gamma_c(V,{}'\mathcal{D}_X^\cdot)\to\mathbb{C}$ なる自然な perfect pairing に関し $\Gamma(V,\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^\cdot)$ の零化空間が $\Gamma_c(V,{}'\mathcal{D}_{Y^\infty}^\cdot)$ に他ならず，従って $\Gamma_c(V,{}'\mathcal{D}_{Y^\infty}^\cdot)$, $\Gamma_c(V,{}'\mathcal{D}_{X/Y^\infty}^\cdot)$ は夫々，$\Gamma(V,\hat{\mathcal{E}}_X^\cdot)$, $\Gamma_\bullet(V,\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^\cdot)$ の位相 dual となり自然に DFS-

複体の構造を持つ。ここに c はコンパクト台を表す。さてこの意味で定理1の dual が存在するはずだが これはすでに Poly [9] により得られている。

<u>定理</u>(Poly) 局所コホモロジー群の triangle と(5)に同伴なそれは

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & Rj_*\mathbb{C} \arrow[dl] & \\
R\Gamma_Y(\mathbb{C}) \arrow[rr] & & \mathbb{C} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\quad\cong\quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & {'\mathcal{D}^{\cdot}_{X|Y\infty}} \arrow[dl] & \\
{'\mathcal{D}^{\cdot}_{Y\infty}} \arrow[rr] & & {'\mathcal{D}^{\cdot}_X} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

同形。(X上の $\mathbb{C}$-ベクトル空間の層のなすアーベル圏の導来圏で。)

さて前と同様 (5)の analytic な表示を考えるのだが、その前に Dolbeault に対応する次の完全列にも注意しておく。

(6) $0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, {'\mathcal{D}^{n,\cdot}_{Y\infty}}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, {'\mathcal{D}^{n,\cdot}_X}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, {'\mathcal{D}^{n,\cdot}_{X|Y\infty}}) \to 0$

ここに $\mathcal{F}$ は任意の連接 $\mathcal{O}_X$-加群。実際, [, VII. Th. 2.4] により ${'\mathcal{D}^{n,\cdot}_{Y\infty,x}}$ は injective な $\mathcal{O}_{X,x}$-加群である。$(x \in Y)$

共変左完全関手 $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ を次式で定義する。

$$\Gamma_{*Y}(\mathcal{F}^{\cdot}) = \varinjlim_k \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{k+\cdot}, \mathcal{F}^{\cdot})$$

$$j^m_*(\mathcal{F}^{\cdot}) = \varinjlim_k \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}^{k+\cdot}, \mathcal{F}^{\cdot})$$

完全列 $0 \to \mathcal{J}^{k+\cdot} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{k+\cdot} \to 0$ に左完全関手 $\varinjlim \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\ , \mathcal{F}^{\cdot})$ を apply して $D\mathcal{C}(X)$ における triangle

(7)
$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & Rj^m_*(\mathcal{F}^{\cdot}) \arrow[dl] & \\
R\Gamma_*(\mathcal{F}^{\cdot}) \arrow[rr] & & \mathcal{F}^{\cdot} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

を得る。同様に関手 $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$

$$\mathcal{H}om^m_{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{\cdot}, \Omega^n_X) = \varinjlim_k \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}^{k+\cdot}\mathcal{F}^{\cdot}, \Omega^n_X)$$

$$\mathcal{H}om_{*Y}(\mathcal{F}^{\cdot};\Omega^n_X) = \varinjlim_{k} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^{\cdot}/\mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F}^{\cdot};\Omega^n_X)$$

を定義し triangle

$$(8)\qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & R\mathcal{H}om^m_U(\mathcal{F}^{\cdot};\Omega^n_X) \arrow[dl] & \\ R\mathcal{H}om_{*Y}(\mathcal{F}^{\cdot};\Omega^n_X) \arrow[rr] & & R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^{\cdot};\Omega^n_X) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

を得る。ここに $n=\dim X$.

$\mathcal{F}^{\cdot}$ がすべて局所自明なら(たとえば $\mathcal{F}^{\cdot}=\Omega^{\cdot}_X$)

$$\underline{\Gamma}_{*Y}(\mathcal{F}^{\cdot}) \cong R\mathcal{H}om_{*Y}(\mathcal{F}^{\cdot *}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^{\cdot}_X,\Omega^n_X),\quad j^m_*(\mathcal{F}^{\cdot}) = R\mathcal{H}om^m_U(\mathcal{F}^{\cdot *}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^{\cdot}_X,\Omega^n_X)$$

が成立することに注意。命題1の dual として次を得る。

<u>命題3.</u> 1) $D\ell(X)$において,(5)に同伴な triangle と(7)で $\mathcal{F}^{\cdot}=\Omega^{\cdot}_X$ としたものは自然に同形である。

2) $\mathcal{F}$ を任意の連接 $\mathcal{O}_X$-加群とする時,(6)に同伴な triangle と(8)で $\mathcal{F}^{\cdot}=\mathcal{F}$ としたものは,$DM(X)$において自然に同形である。

証明略。最後に以上の応用として Ramis-Ruget の才1双対定理[ ]の 'meromorphic' analogue が得られることを注意しておく。

$\mathcal{F}\in \mathrm{Ob}\,M(X)$ に対し $\Gamma(\mathcal{F})=\Gamma(X,\mathcal{F})$ とする。Ψ を X の閉集合で U 内に含まれるもの全体からなる台の族とする。次の記号を用いる。 $H^i_{\Psi}(U,\mathcal{F}) = R^i(\Gamma\cdot j^m_!)(\mathcal{F})$, $\mathrm{Ext}^i_{*Y,c}(X,\mathcal{F},\Omega^n_X) = R^i(\Gamma_c\cdot\mathcal{H}om_{*Y}(\ ,\Omega^n_X))(\mathcal{F})$, $\mathrm{Ext}^i_{m,c}(U,\mathcal{F},\Omega^n_X) = R^i(\Gamma_c\cdot\mathcal{H}om^m_U(\ ,\Omega^n_X))(\mathcal{F})$.

(c : コムパクト support)

(4)と(8)から完全列

$$(9)\quad \cdots\longrightarrow H^i_{\Psi}(U,\mathcal{F})\longrightarrow H^i(X,\mathcal{F})\longrightarrow H^i(\hat{X},\hat{\mathcal{F}})\longrightarrow\cdots$$

$$(10)\quad \cdots\longleftarrow \mathrm{Ext}^{n-i}_{m,c}(U,\mathcal{F},\Omega^n_X)\longleftarrow \mathrm{Ext}^{n-i}_{c}(X,\mathcal{F},\Omega^n_X)\longleftarrow \mathrm{Ext}^{n-i}_{*Y,c}(X,\mathcal{F},\Omega^n_X)\longleftarrow\cdots$$

を得る。この時定理は次の形に述べられる。

<u>定理3</u> (9)の各項に自然なQFS(= quotient of FS)構造，(10)の各項に自然なQDFS(= quotient of DFS)構造，(9)と(10)の間の自然な$\mathbb{C}$-双線形pairingが存在し，このpairingは対応する各空間に同伴なHausdorff位相空間の間の位相双対を引き起こす。このようなQFS, QDFS構造は一意的である。さらにH^iのseparationとExt_c^{n-i+1}のseparationは同値である。(但しXは純次元nと仮定した。)

証明はMalgrangeのSerre双対定理の証明とほぼ同様である。([1，VII.§4]参照)。

文　　献

[1] Banica, C., and Stanasila, O., Algebraic methods in the global theory of complex spaces, John Wiley 1976.

[2] Grothendieck, A., On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. IHES 29 (1966), 95-103

[3] Hartshorne, R., Residues and Duality, Springer Lecture Notes 20 (1966).

[4] Hartshorne, R., On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. IHES _ (1975).

[5] Herrera, M. and Lieberman, D., Duality and de Rham cohomology of infinitesimal neighborhoods, Invent. math. 13 (1971), 97-124.

[6] Hironaka, H., Bimeromorphic smoothing of a complex-analytic variety,

Warwick, 1971.

[7] Kantor, J.-M., Le complexe de Dolbeault-Grothendieck sur les espaces analytiques, Seminaire Lelong, 14e annee, 1973/74, Springer Lecture Note 474.

[8] Malgrange, B., Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966.

[9] Poly, J.-B., Sur l'homologie des courants a supports dans un ensemble semi-analytique, Bull. Soc. Math. France, Memoire 38 (1974), 35-43.

[10] Ramis, J. P., et Ruget, G, Complexes dualisants et théorème de dualité en géométrie analytique complexe, Publ. IHES, 38, 77-91 (1970).

[11] Sasakura, N., Complex analytic de Rham cohomology I, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 718-722, II, ibid. 50 (1974), 292-295, III, 51 (1975) 7-11, IV, 535-539.

[12] Brieskorn, E., Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, Manuscripta Math. 2 (1970), 103-161.