数理解析研究所講究録
373巻 1979年 28-53

5個の関数計算による
実質的5次のルンゲ・クッタ法

電総研　　戸田英雄
都立農芸高校　小野令美

0. まえおき

$$dy/dx = f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

なる初期値問題の数値解法の一つであるKutta[3)]型の5段公式では，公式の局所打切り誤差の $O(h^5)$ の項までを0とする5次の公式は得られないが，$f(x,y)$ から数式的に求めた f_x や f_y を用いれば5段で5次の公式が極限の公式として導ける[6)]。

しかし $O(h^5)$ の打切り誤差項を完全に0としなくても，$O(h^6)$ の打切り誤差項に比べて無視出来る程度に小さくすればよい。このとき極限の公式で f_x や f_y を用いて計算した値は，有効桁数があまり必要でないことから，f_x や f_y を用いないでも必要とする精度には求められるので，5段公式で実質的に5次の公式が得られる。この場合 m 進 n 桁の演算方式で結果の有効桁数の見積り式も得られた。

1．5段で5次の公式（f_x や f_y を用いる）

1.1 Kutta[3] 型5段公式

$$dy/dx = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

なる初期値問題の数値解法で，刻み巾を h とし

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{5} \mu_i k_i$$

ここに，

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_i = h \cdot f(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad i = 2, 3, 4, 5$$

たゞし，

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

である．ここで μ_i，β_{ij}，α_i は公式に含まれるパラメタで，" Kutta の条件方程式 " を作って決める．

1.2 " Kutta の条件方程式 " の数式解

Kutta 型5段公式の局所打切り誤差をEとすると，

$$E = \sum_{i=1}^{6} E_i h^i + O(h^7)$$

たゞし E_i は $O(h^i)$ の誤差項の h^i の係数であるが，5次の公式とするためには，

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = 0 \quad (\text{Kutta の条件方程式})$$

を作ってこれを満たすように μ_i，β_{ij}，α_i を $f(x, y)$ に無関係に決めねばならない．しかし $E_5 = 0$ とすることは出来ない（証明が与えられている）ので，

(1) $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 0$

(2) $\delta_{51} = \delta_{52} = \delta_{53} = 0$

を満たすように μ_i, β_{ij} を α_i をパラメタとして解く。
（田中[4] のやり方に倣っているが数式的に解く。）

ここで，

(3) $$E_5 = \delta_{51} D^4 f + \delta_{52} D^2 f_y \cdot Df + \delta_{53} D f_y \cdot D^2 f + \delta_{54} f_y^2 \cdot D^2 f$$
$$+ \delta_{55} f_{yy} (Df)^2 + \delta_{56} f_y D f_y \cdot Df + \delta_{57} f_y \cdot D^3 f + \delta_{58} f_y^3 Df$$

たゞし，

(4)
$$D^n f \equiv (\partial/\partial x + f \cdot \partial/\partial y)^n f \;; \quad D^n f_y \equiv (\partial/\partial x + f \cdot \partial/\partial y)^n f_y ,$$
$$n = 1, 2, \cdots,$$
$$\delta_{51} = \left(\sum_{i=2}^{5} \mu_i \cdot \alpha_i^4 - 1/5 \right) / 24$$
$$\delta_{52} = \left(\sum_{i=3}^{5} \mu_i \cdot \alpha_i^2 X_{i1} - 1/10 \right) / 2$$
$$\delta_{53} = \left(\sum_{i=3}^{5} \mu_i \cdot \alpha_i \cdot X_{i2} - 1/15 \right) / 2$$
$$\delta_{54} = \left(\mu_4 \beta_{43} X_{32} + \mu_5 \sum_{i=3}^{4} \beta_{5i} X_{i2} - 1/60 \right) / 2$$
$$\delta_{55} = \left(\sum_{i=3}^{5} \mu_i \cdot X_{i1}^2 - 1/20 \right) / 2$$
$$\delta_{56} = \mu_4 \beta_{43} (\alpha_3 + \alpha_4) X_{31} + \mu_5 \sum_{i=3}^{4} \beta_{5i} \cdot (\alpha_i + \alpha_5) X_{i1} - 7/120$$
$$\delta_{57} = \left(\sum_{i=3}^{5} \mu_i \cdot X_{i3} - 1/20 \right) / 6$$
$$\delta_{58} = \mu_5 \beta_{54} \beta_{43} X_{31}$$
$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} , \quad i = 3, 4, 5$$
$$X_{il} = \sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} \alpha_j^l , \quad i = 3, 4, 5$$

である。

(1) で得られる $O(h^4)$ までの誤差項を 0 とおいた方程式は

$$
(5)\quad
\left|
\begin{array}{llll}
\sum_{i=1}^{5} \mu_i = 1, & \sum_{i=2}^{5} \mu_i \alpha_i = 1/2, \\
\sum_{i=2}^{5} \mu_i \alpha_i^2 = 1/3, & \sum_{i=3}^{5} \mu_i X_{i1} = 1/6, \\
\sum_{i=2}^{5} \mu_i \alpha_i^3 = 1/4, & \sum_{i=3}^{5} \mu_i X_{i2} = 1/12, \\
\sum_{i=3}^{5} \mu_i \alpha_i X_{i1} = 1/8, & \\
\mu_4 \beta_{43} X_{31} + \mu_5 \sum_{i=3}^{4} \beta_{5i} X_{i1} = 1/24 &
\end{array}
\right.
$$

となる．また (2) の方程式は

$$
(6)\quad
\left|
\begin{array}{l}
\sum_{i=2}^{5} \mu_i \alpha_i^4 = 1/5, \\
\sum_{i=3}^{5} \mu_i \alpha_i^2 X_{i1} = 1/10, \\
\sum_{i=3}^{5} \mu_i \alpha_i X_{i2} = 1/15
\end{array}
\right.
$$

となる．

これを α_i ($i = 2(1)5$) をパラメタとして解き（ただし $\alpha_i \neq \alpha_j$，$i \neq j$ で $0 < \alpha_i \leqq 1$ とする）δ_{54}，δ_{57} に代入すると，どちらも $(1-\alpha_5)$ の因子を持つので $\alpha_5 = 1$ と決めれば，

$$\delta_{54} = \delta_{57} = 0$$

となる。これは，田中[4),5)] が数値的探索で $\alpha_5 = 1$ とした根拠である．

$\alpha_5 = 1$ として，分母に含まれる因子はすべて 0 でないとして $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ をパラメタとした (5) と (6) の解は次のように求められる：

$$
\left.
\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{30\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 10(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 5(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 3}{60\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \\
\mu_2 &= \frac{10\alpha_3\alpha_4 - 5\alpha_3 - 5\alpha_4 + 3}{60\alpha_2(1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)} \\
\mu_3 &= -\frac{10\alpha_2\alpha_4 - 5\alpha_2 - 5\alpha_4 + 3}{60\alpha_3(1-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)} \\
\mu_4 &= \frac{10\alpha_2\alpha_3 - 5\alpha_2 - 5\alpha_3 + 3}{60\alpha_4(1-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_2)} \\
\mu_5 &= -\frac{30\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 20(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 15(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 12}{60(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)} \\
\beta_{31} &= \frac{\alpha_3\left\{(5\alpha_3 + 20\alpha_2^2 - 15\alpha_2)\alpha_4 - 3\alpha_3 - 10\alpha_2^2 + 9\alpha_2\right\}}{2\alpha_2(10\alpha_2\alpha_4 - 5\alpha_2 - 5\alpha_4 + 3)} \\
\beta_{32} &= \frac{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(3-5\alpha_4)}{2\alpha_2(10\alpha_2\alpha_4 - 5\alpha_2 - 5\alpha_4 + 3)} \\
\beta_{41} &= \frac{1}{2\alpha_2\alpha_3(10\alpha_2\alpha_3 - 5\alpha_3 - 5\alpha_2 + 3)} \\
&\quad \times \alpha_4\left\{(2-5\alpha_2)\alpha_4^2 + (5\alpha_3^2 + 5\alpha_2\alpha_3 - 5\alpha_3 + 5\alpha_2^2 - 2\alpha_2)\alpha_4 \right. \\
&\qquad \left. + 20\alpha_2^2\alpha_3^2 - 15\alpha_2^2\alpha_3 - 15\alpha_2\alpha_3^2 + 11\alpha_2\alpha_3\right\} \\
\beta_{42} &= \frac{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_2)(-5\alpha_3^2 + 5\alpha_3 - 3\alpha_2 + 5\alpha_2\alpha_4 - 2\alpha_4)}{2\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)(10\alpha_2\alpha_3 - 5\alpha_2 - 5\alpha_3 + 3)}
\end{aligned}
\right\} \quad (7)
$$

$$\beta_{43} = \frac{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(2-5\alpha_2)}{2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(10\alpha_2\alpha_3-5\alpha_2-5\alpha_3+3)}$$

$$\beta_{51} = \frac{1}{2\alpha_2\alpha_3\alpha_4 P_5}$$

$$\times\Big[\alpha_4^2\{(60\alpha_2^2-60\alpha_2+20)\alpha_3^2+(-60\alpha_2^2+75\alpha_2-25)\alpha_3+20\alpha_2^2-30\alpha_2+10\}$$

$$+\alpha_4\{(-60\alpha_2^2+75\alpha_2-25)\alpha_3^2+(75\alpha_2^2-105\alpha_2+36)\alpha_3-25\alpha_2^2+39\alpha_2-14\}$$

$$+\{(20\alpha_2^2-30\alpha_2+10)\alpha_3^2+(-30\alpha_2^2+46\alpha_2-16)\alpha_3+10\alpha_2^2-16\alpha_2+6\}\Big]$$

(7)

のつづき

$$\beta_{52} = -\frac{(1-\alpha_2)}{2\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)P_5}$$

$$\times\Big[\alpha_4^2(20\alpha_3^2-25\alpha_3-5\alpha_2+10)+\alpha_4(-25\alpha_3^2-5\alpha_3\alpha_2+36\alpha_3+5\alpha_2^2$$

$$+3\alpha_2-14)-5\alpha_3^2\alpha_2+10\alpha_3^2+10\alpha_3\alpha_2-16\alpha_3-3\alpha_2^2-2\alpha_2+6\Big]$$

$$\beta_{53} = \frac{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}{2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)P_5}$$

$$\times\Big[\alpha_4^2(-20\alpha_2+10)+\alpha_4(25\alpha_2-14)+5\alpha_2\alpha_3-2\alpha_3-10\alpha_2+6\Big]$$

$$\beta_{54} = -\frac{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)(10\alpha_2\alpha_3-5\alpha_2-5\alpha_3+3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)P_5}$$

ここで，

$$P_5 = 30\alpha_2\alpha_3\alpha_4-20(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_2)+15(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)-12$$

である。

1.3 偏微係数 f_x, f_y を用いた5段5次の公式（極限の公式）

E_5 の中で残る $\delta_{55}, \delta_{56}, \delta_{58}$ に（7）を代入すると

$$
(8)\quad
\left|
\begin{aligned}
\delta_{55} &= -\frac{\alpha_2^2(10\alpha_3\alpha_4-5\alpha_3-5\alpha_4+3)}{96(10\alpha_2\alpha_4-5\alpha_2-5\alpha_4+3)(10\alpha_2\alpha_3-5\alpha_2-5\alpha_3+3)} \\
&\quad\times\frac{70\alpha_2\alpha_3\alpha_4-30(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_2)+15(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)-9}{30\alpha_2\alpha_3\alpha_4-20(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_2)+15(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)-12} \\
\delta_{56} &= -\delta_{58} = \frac{\alpha_2(1-\alpha_4)}{48(10\alpha_2\alpha_4-5\alpha_2-5\alpha_4+3)}
\end{aligned}
\right.
$$

となる。 5次の公式は $\delta_{55} = \delta_{56} = \delta_{58} = 0$ でなければならないから，次の三通りの場合：

（A） $\alpha_2 = 0$

（B−1） $\alpha_4 = 1$ でかつ $10\alpha_3\alpha_4 - 5\alpha_3 - 5\alpha_4 + 3 = 0$

（B−2） $\alpha_4 = 1$ でかつ $70\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 30(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 15(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 9 = 0$

が考えられるが，α_2 および $(1-\alpha_4)$ はパラメタの分母に含まれている因数なので，このまゝでは0とすることはできない。

しかし，μ_1，μ_2，β_{i1}，β_{i2} $(i = 3, 4, 5)$ は因数 $1/\alpha_2$ をもつが，$\mu_1+\mu_2$，$\beta_{i1}+\beta_{i2}$，$\mu_2\alpha_2$，$\beta_{i2}\alpha_2$ $(i = 3, 4, 5)$ は因数 $1/\alpha_2$ を持たないという性質から Kutta の公式の1部を次のように変形する：

$$(9)\quad \left|\begin{array}{l} \mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 = (\mu_1+\mu_2) k_1 + \mu_2 \alpha_2 \cdot \dfrac{k_2-k_1}{\alpha_2} \\ \beta_{i1} k_1 + \beta_{i2} k_2 = (\beta_{i1}+\beta_{i2}) k_1 + \beta_{i2}\alpha_2 \cdot \dfrac{k_2-k_1}{\alpha_2} \end{array}\right. ,\ i=3,4,5$$

すると，

$$(10)\qquad \lim_{\alpha_2\to 0} \frac{k_2-k_1}{\alpha_2} = h^2 (f_x + f\cdot f_y)$$

なので，

$\dfrac{k_2-k_1}{\alpha_2}$ の代りに

$$(11)\qquad h^2 (f_x + f\cdot f_y)$$

を用いれば　$\alpha_2=0$　とすることが出来る．

　また，μ_4，μ_5 はともに，因数 $1/(1-\alpha_4)$ をもつが，$\mu_4+\mu_5$，$\mu_4(1-\alpha_4)$，$\dfrac{\beta_{4j}-\beta_{5j}}{1-\alpha_4}$，$\dfrac{\beta_{54}}{1-\alpha_4}$ をつくると，これらは因数 $1/(1-\alpha_4)$ をもたないから

$$(12)\qquad \mu_4 k_4 + \mu_5 k_5 = (\mu_4+\mu_5) k_5 + \mu_4(1-\alpha_4)\cdot \frac{k_4-k_5}{1-\alpha_4}$$

と変形して，　　(11) と同様に

$\dfrac{k_4-k_5}{1-\alpha_4}$ の代りに

$$(13)\qquad -h^2 f_x + h\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\beta_{4j}-\beta_{5j}}{1-\alpha_4} k_j - \frac{\beta_{54}}{1-\alpha_4} k_4 \right)\cdot f_y$$

を用いれば，$\alpha_4=1$ とすることができる．

　これが微係数 f_x，f_y を用いた 5段5次の公式（極限の公式）である．

1.4 可変なパラメタの決定（$O(h^6)$ の誤差項をできるだけ小さくする）

極限の公式のパラメタ α_i は次の表のようになる：

公式	5次の公式とするために決まる α_i	可変なパラメタ
A 型	$\alpha_2 = 0$	α_3 , α_4
B−1 型	$\alpha_4 = 1$, $\alpha_3 = \frac{2}{5}$	α_2
B−2 型	$\alpha_4 = 1$, $\alpha_3 = \frac{15\alpha_2 - 6}{40\alpha_2 - 15}$	α_2

極限の公式における $O(h^6)$ の誤差項は

A 型では　$E_6 = \sum_{j=1}^{15} \delta_{6j}\cdot(\alpha_2=0, \alpha_3, \alpha_4)\cdot F_{6j}$

B 型では　$E_6 = \sum_{j=1}^{15} \delta_{6j}\cdot(\alpha_2)\cdot F_{6j}$

とかける。ここで F_{6j} は $f(x,y)$ の高階の導関数である。

E_6 をできるだけ小さくするために，関数によらない部分 δ_{6j} を小さくすることを考え，三つの尺度すなわち，$\max_j |\delta_{6j}|$ ，$\sqrt{\sum_j \delta_{6j}^2/15}$ および Lotkin による導関数の上界を用いた $|\delta_{6j}|$ の和の上界，これらで見て最もよい α_i を次のように決定した[6]。

$$
(14)\quad
\left|
\begin{array}{lll}
\text{A 型} & \alpha_3 = \frac{1}{2} , & \alpha_4 = \frac{5}{9} \\
\text{B−1 型} & \alpha_2 = \frac{1}{3} & \\
\text{B−2 型} & \alpha_2 = \frac{1}{4} & (\alpha_3 = 9/20 \text{ となる。})
\end{array}
\right.
$$

2．5段で実質的に5次の公式（f_x や f_y を用いない）

$\alpha_2=0$ または $1-\alpha_4=0$ ならば $\delta_{55}=\delta_{56}=\delta_{58}=0$ となるが，0 でなくてもじゅうぶん小さくすれば $|\delta_{55}|$, $|\delta_{56}|$, $|\delta_{58}|$ を $O(h^6)$ の誤差にくらべて無視できる程度に小さくすることができる．

しかし $\alpha_2=\varepsilon \fallingdotseq 0$ $(\varepsilon>0)$ とすると μ_1, μ_2, $\overbrace{\beta_{i1},\ \beta_{i2}}^{(i=3,4,5)}$ は因数 $1/\alpha_2$ をもつので $\mu_1,\beta_{i1}\to-\infty$, $\mu_2,\beta_{i2}\to\infty$ $(i=3,4,5)$ となり $\mu_1k_1+\mu_2k_2$ および $\beta_{i1}k_1+\beta_{i2}k_2$ のところで大きな桁落ちが起るから，このままの形で計算したのではだめで(9)式の変形を用いる．また $1-\alpha_4=\varepsilon\fallingdotseq 0$ $(\varepsilon>0)$ とすると同様に $\mu_4\to\infty$, $\mu_5\to-\infty$ となり $\mu_4k_4+\mu_5k_5$ で大きな桁落ちが起るから（B-2 型でこの桁落ちの度合と打切り誤差をある尺度を用いて表わし，最適な ε を定めたのが田中の公式[4),5)]である）(12)式を用いる．このようにすれば桁落ちはそれぞれ k_2-k_1, k_4-k_5 のところだけとなる．

$(k_2-k_1)/\alpha_2$, $(k_4-k_5)/(1-\alpha_4)$ は極限の公式で f_x や f_y を用いて計算した量であるが，これらの値の絶対値は通常 $|y_n|$ にくらべて小さいから，あまり精度は要らない！しかも k_2-k_1 または k_4-k_5 で大きく桁落ちするものほど必要な有効桁数は少くてよいので，このままの形で計算する．

2.1 $\alpha_2=\varepsilon \fallingdotseq 0 \ (\varepsilon>0)$ のA型公式の係数

(9)式の変形を行ない, $\alpha_3=1/2$, $\alpha_4=5/9$ とおいた係数:

$$
(15)\quad \left|\begin{array}{l}
\mu_1+\mu_2=\dfrac{-900\alpha_2^3+2012\alpha_2^2-1533\alpha_2+466}{300(1-\alpha_2)(1-2\alpha_2)(5-9\alpha_2)}, \\[2ex]
\mu_2\alpha_2=\dfrac{3}{20(1-\alpha_2)(1-2\alpha_2)(5-9\alpha_2)}, \\[2ex]
\mu_3=-\dfrac{4(2+5\alpha_2)}{15(1-2\alpha_2)}, \quad \mu_4=\dfrac{2187}{400(5-9\alpha_2)}, \quad \mu_5=\dfrac{31-40\alpha_2}{240(1-\alpha_2)}, \\[2ex]
\beta_{31}+\beta_{32}=\dfrac{1}{2}, \quad \beta_{32}\alpha_2=\dfrac{1-2\alpha_2}{4(5\alpha_2+2)}, \\[2ex]
\beta_{41}+\beta_{42}=\dfrac{5(-90\alpha_2^2-76\alpha_2+61)}{729(1-2\alpha_2)}, \quad \beta_{42}\alpha_2=\dfrac{5(5-9\alpha_2)(5-8\alpha_2)}{1458(1-2\alpha_2)}, \\[2ex]
\beta_{43}=\dfrac{10(5-9\alpha_2)(2-5\alpha_2)}{729(1-2\alpha_2)}, \\[2ex]
\beta_{51}+\beta_{52}=\dfrac{-450\alpha_2^3+358\alpha_2^2-447\alpha_2+359}{5(1-2\alpha_2)(5-9\alpha_2)(31-40\alpha_2)}, \\[2ex]
\beta_{52}\alpha_2=\dfrac{(1-\alpha_2)(-72\alpha_2^2+157\alpha_2+7)}{2(1-2\alpha_2)(5-9\alpha_2)(31-40\alpha_2)}, \\[2ex]
\beta_{53}=-\dfrac{10(1-\alpha_2)(10+7\alpha_2)}{(1-2\alpha_2)(31-40\alpha_2)}, \quad \beta_{54}=\dfrac{2916(1-\alpha_2)}{5(5-9\alpha_2)(31-40\alpha_2)}.
\end{array}\right.
$$

2.2 $\alpha_2 = \varepsilon \fallingdotseq 0$ のA型公式の打切り誤差の主要項

打切り誤差の主要項： $h^5(E_5 + E_6 h)$

(16) $$E_6 = \sum_{j=1}^{15} \delta_{6j}(\alpha_2, \alpha_3 = 1/2, \alpha_4 = 5/9) \cdot F_{6j}$$

$\alpha_2 = \varepsilon \fallingdotseq 0$ ならば

(17) $$\delta_{6j}(\alpha_2, \alpha_3 = 1/2, \alpha_4 = 5/9) \fallingdotseq \delta_{6j}(\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1/2, \alpha_4 = 5/9)$$

なので、これを δ_{6j} と略記すると、

(18) $$\left| \begin{aligned} &|\delta_{61}| &&= 1/32400 &&\fallingdotseq .309_{10}-4 \\ &|\delta_{62}| &&= 1/6480 &&\fallingdotseq .154_{10}-3 \\ &\delta_{63} = \delta_{66} = \delta_{613} = \delta_{6\,15} = 0 && && \\ &|\delta_{64}| = |\delta_{65}| &&= 1/720 &&\fallingdotseq .139_{10}-2 \\ &|\delta_{67}| = |\delta_{68}| &&= |\delta_{6\,10}| = |\delta_{6\,11}| = |\delta_{6\,12}| = |\delta_{614}| && \\ & &&= 1/2160 &&\fallingdotseq .463_{10}-3 \\ &|\delta_{69}| &&= 1/3240 &&\fallingdotseq .309_{10}-3 \end{aligned} \right.$$

(19) $$E_5 = \sum_{j=5,6,8} \delta_{5j}(\alpha_2, \alpha_3 = 1/2, \alpha_4 = 5/9) \cdot F_{5j},$$

(F_{5j} は (3) の δ_{5j} の係数)

(20) $$\left| \begin{aligned} &\delta_{55} = -\frac{3\alpha_2^2(50\alpha_2 - 27)}{32(5\alpha_2 + 2)(40\alpha_2 - 31)} \fallingdotseq -\frac{81}{1984}\alpha_2^2 \\ &\delta_{56} = -\delta_{58} = \frac{\alpha_2}{12(5\alpha_2 + 2)} \fallingdotseq \frac{\alpha_2}{24} \end{aligned} \right.$$

2.3 $|E_5 h^5| \ll |E_6 h^6|$ となるような α_2 の決定

(20)から $|\delta_{56}| = |\delta_{58}| \gg |\delta_{55}|$ なので

$$|\delta_{56}| \doteqdot \frac{\alpha_2}{24} \doteqdot (|\delta_{6j}|\text{の代表}) \times (h\text{の代表})$$
$$= 1/2160 \times 10^{-3}$$

とすると $\alpha_2 \doteqdot .11_{10}-4$ となり，$2^{-16} \doteqdot .15_{10}-4$ なので $\alpha_2 = 2^{-16}$ と決める．このようにすれば，たとえば E_6 が 0 で E_5 が比較的大きい場合のような例を除けば，$|E_5 h^5| \ll |E_6 h^6|$ となろう．

2.4 $\alpha_2 = \varepsilon \doteqdot 0$ $(\varepsilon > 0)$ のA型公式

$$(21) \quad y_{n+1} = y_n + (\mu_1 + \mu_2) k_1 + \mu_2 \alpha_2 (k_2 - k_1)/\alpha_2 + \sum_{i=3}^{5} \mu_i k_i$$

ここに

$$\left|\begin{aligned}
k_1 &= h f(x_n, y_n) \\
k_2 &= h f(x_n + \alpha_2 h,\ y_n + \beta_{21} k_1) \\
k_3 &= h f(x_n + \alpha_3 h,\ y_n + (\beta_{31} + \beta_{32}) k_1 + \beta_{32} \alpha_2 (k_2 - k_1)/\alpha_2) \\
k_4 &= h f(x_n + \alpha_4 h,\ y_n + (\beta_{41} + \beta_{42}) k_1 + \beta_{42} \alpha_2 (k_2 - k_1)/\alpha_2 \\
&\qquad + \beta_{43} k_3) \\
k_5 &= h f(x_n + h,\ y_n + (\beta_{51} + \beta_{52}) k_1 + \beta_{52} \alpha_2 (k_2 - k_1)/\alpha_2 \\
&\qquad + \beta_{53} k_3 + \beta_{54} k_4)
\end{aligned}\right.$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{65536}, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_4 = \frac{5}{9},$$

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{2\,18601\,25849\,02641}{7\,03635\,90338\,14950},$$

$$\mu_2\alpha_2 = \frac{3518\,43720\,88832}{1\,17272\,65056\,35825},$$

$$\mu_3 = -\frac{2\,62154}{4\,91505}, \quad \mu_4 = \frac{89\,57952}{81\,91775}, \quad \mu_5 = \frac{84649}{6\,55350},$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{65536},$$

$$\beta_{31} + \beta_{32} = \frac{1}{2}, \qquad \beta_{32}\alpha_2 = \frac{32767}{2\,62154},$$

$$\beta_{41} + \beta_{42} = \frac{7\,27744\,51175}{17\,39408\,67072}, \qquad \beta_{42}\alpha_2 = \frac{24853\,84535}{2\,89901\,44512},$$

$$\beta_{43} = \frac{2\,38593\,63865}{17\,39408\,67072},$$

$$\beta_{51} + \beta_{52} = \frac{3\,36825\,32270\,73521}{7\,27087\,21245\,55144},$$

$$\beta_{52}\alpha_2 = \frac{8212\,37111\,27555}{3\,63543\,60622\,77572},$$

$$\beta_{53} = -\frac{7\,15824\,60575}{2\,21895\,50264}, \qquad \beta_{54} = \frac{10\,43661\,12768}{2\,77370\,22479},$$

である．

2.5 $\alpha_2 = \varepsilon \doteqdot 0$ のA型公式による結果の有効桁数の見積り

$\alpha_2 \doteqdot 0$ のために $k_2 - k_1$ の計算で起る桁落ちを考慮しても，$k_i\ (i=3,4,5)$ と y_{n+1} の有効桁数は，m 進法 n 桁演算で，$n - 14\log_m 2$ 以上保たれる．（ただし $|\beta_{i2}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2|$ が加えあわせる項のうち最大である場合を除く）

これは次のようにして示される：

k_3 の計算における $y_n + (\beta_{31}+\beta_{32})k_1 + \beta_{32}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2$ の有効桁数を N_3 とすると，

i) $\max\{|y_n|, |(\beta_{31}+\beta_{32})k_1|, |\beta_{32}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2|\} = |y_n|$

ならば N_3 は y_n と $\beta_{32}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2$ の m 進法での桁数の差と，k_2-k_1 の m 進法での有効桁数の和になるから

$$
\begin{aligned}
(22)\quad N_3 &= \log_m|y_n| - \log_m|\beta_{32}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2| \\
&\quad + \{n - (\log_m|k_1| - \log_m|k_2-k_1|)\} \\
&= n - \log_m\beta_{32}\alpha_2 + \log_m\alpha_2 + \log_m|y_n/k_1|
\end{aligned}
$$

仮定から $|(\beta_{31}+\beta_{32})k_1| = |\alpha_3 k_1| < |y_n|$ なので

$$N_3 > n - \log_m\beta_{32}\alpha_2 + \log_m\alpha_2 + \log_m\alpha_3,$$

(15)からわかるように $\beta_{32}\alpha_2 \doteqdot 1/8$ なので

$$
\begin{aligned}
&\doteqdot n - \log_m 1/8 + \log_m 2^{-16} + \log_m 1/2 \\
&= n - 14\log_m 2 \doteqdot n - 4.21 \quad (m=10\text{のとき})
\end{aligned}
$$

ii) $\max\{|y_n|, |(\beta_{31}+\beta_{32})k_1|, |\beta_{32}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2|\} = |(\beta_{31}+\beta_{32})k_1|$

ならば，N_3 は $(\beta_{31}+\beta_{32})k_1$ と $\beta_{32}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2$ の m 進法での桁数の差と k_2-k_1 の m 進法での有効桁数の和になるから

$$(23)\quad \begin{aligned} N_3 &= \log_m|(\beta_{31}+\beta_{32})k_1| - \log_m|\beta_{32}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2| \\ &\quad + \{n-(\log_m|k_1|-\log_m|k_2-k_1|)\} \\ &= n-\log_m\beta_{32}\alpha_2+\log_m\alpha_2+\log_m\alpha_3 \\ &\doteqdot n-14\log_m 2 \end{aligned}$$

となり $|\beta_{32}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2|$ が最大である場合を除けば

$$(24)\quad N_3 \geqq n-14\log_m 2 \ .$$

k_4, k_5 の計算で $y_n+(\beta_{41}+\beta_{42})k_1+\beta_{42}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2+\beta_{43}k_3$ および $y_n+(\beta_{51}+\beta_{52})k_1+\beta_{52}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2+\beta_{53}k_3+\beta_{54}k_4$ の有効桁数をそれぞれ N_4, N_5 とすると N_3 と全く同様にして

$$(25)\quad \begin{aligned} N_4 &\geqq n-\log_m\beta_{42}\alpha_2+\log_m\alpha_2+\log_m(\beta_{41}+\beta_{42}) \\ &\doteqdot n-\log_m 2^{15}\cdot 5^2/61 \doteqdot n-4.13 \quad (m=10\text{ のとき}) \end{aligned}$$

$$(26)\quad \begin{aligned} N_5 &\geqq n-\log_m\beta_{52}\alpha_2+\log_m\alpha_2+\log_m\beta_{54}+\log_m|k_4/k_1| \\ &\doteqdot n-\log_m 2^{13}\cdot 5\cdot 7/729 \doteqdot n-2.59 \quad (m=10\text{ のとき}) \end{aligned}$$

となり，また y_{n+1} の計算の有効桁数を N_6 とすると同様に

$$(27)\quad \begin{aligned} N_6 &\geqq n-\log_m\mu_2\alpha_2+\log_m\alpha_2+\log_m\mu_4+\log_m|k_4/k_1| \\ &\doteqdot n-\log_m 2^{18}\cdot 5/729 \doteqdot n-3.25 \quad (m=10\text{ のとき}) \end{aligned}$$

となる。

$N_3\doteqdot n-14\log_m 2$ は N_4, N_5, N_6 より小さいので k_3, k_4, k_5, y_{n+1} の有効桁数は少なくとも N_3 桁すなわち $n-14\log_m 2$ 桁は保証される。

2.6 $\alpha_4 = 1 - \varepsilon \doteqdot 1 \quad (\varepsilon > 0)$ の公式

2.6.1 B－1 型公式

A型公式の場合と同様に $1-\alpha_4 = \varepsilon \doteqdot 0$, $\alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = 2/5$ のとき

(28) $\delta_{6j}(\alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = 2/5, \alpha_4) \doteqdot \delta_{6j}(\alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = 2/5, \alpha_4 = 1)$

とみなせるから，これを δ_{6j} と略記すると

$$
(29)\quad \left|\begin{array}{lll}
|\delta_{61}| & = 1/36000 & \doteqdot .278_{10}-4 \\
|\delta_{62}| & = 1/7200 & \doteqdot .139_{10}-3 \\
|\delta_{63}| = |\delta_{66}| = |\delta_{69}| & = 1/3600 & \doteqdot .278_{10}-3 \\
\delta_{64} = \delta_{67} = \delta_{6\,11} = \delta_{6\,12} = 0 & & \\
|\delta_{65}| & = 1/720 & \doteqdot .139_{10}-2 \\
|\delta_{68}| & = 1/300 & \doteqdot .333_{10}-2 \\
|\delta_{6\,10}| & = 1/1800 & \doteqdot .556_{10}-3 \\
|\delta_{6\,13}| & = 7/7200 & \doteqdot .972_{10}-3 \\
|\delta_{6\,14}| & = 1/2400 & \doteqdot .417_{10}-3 \\
|\delta_{6\,15}| & = 1/1200 & \doteqdot .833_{10}-3 \ .
\end{array}\right.
$$

$$
(30)\quad \left|\begin{array}{l}
\delta_{55} = \dfrac{(1-\alpha_4)(7\alpha_4-6)}{192(5\alpha_4-4)(13\alpha_4-11)} \doteqdot \dfrac{1-\alpha_4}{384} \\[2ex]
\delta_{56} = -\delta_{58} = -\dfrac{1-\alpha_4}{48(5\alpha_4-4)} \doteqdot -\dfrac{1-\alpha_4}{48}
\end{array}\right.
$$

A型の場合と同様に

$$|\delta_{56}| \doteqdot \frac{1-\alpha_4}{48} \doteqdot (|\delta_{6j}|\text{の代表}) \times (h\text{の代表})$$
$$= 1/3600 \times 10^{-3}$$

とすると，$1-\alpha_4 \doteqdot .13_{10}-4$ となり，$2^{-16} \doteqdot .15_{10}-4$ なので $1-\alpha_4 = 2^{-16}$ に決める.

$1-\alpha_4 \doteqdot 0$ のために k_4-k_5 の計算で起る桁落ちについては y_{n+1} の有効桁数を N とすると $|\mu_4(1-\alpha_4)(k_4-k_5)/(1-\alpha_4)|$ が加え合わせる項のうち最大でなければ

(31) $$N \geqq n - \log_m \mu_4(1-\alpha_4) + \log_m (1-\alpha_4) + \log_m \mu_3 + \log_m |k_3/k_5|$$
$$\doteqdot n - \log_m 2^{17} \cdot 3/125 \doteqdot n - 3.50 \quad (m=10 \text{ のとき}).$$

したがって y_{n+1} の有効桁数は少くとも $n-\log_m 2^{17}\cdot 3/125$ 桁は保証される.

2.6.2 B－2 型公式

$1-\alpha_4 = \varepsilon \doteqdot 0$，$\alpha_2 = 1/4$，$\alpha_3 = 9/20$ のとき

(32) $$\delta_{6j}(\alpha_2=1/4, \alpha_3=9/20, \alpha_4) \doteqdot \delta_{6j}(\alpha_2=1/4, \alpha_3=9/20, \alpha_4=1)$$

なのでこれを δ_{6j} と書くと

(33) $$\left|\begin{array}{ll} |\delta_{61}| & = 13/576000 \doteqdot .226_{10}-4 \\ |\delta_{62}| & = 13/115200 \doteqdot .113_{10}-3 \\ |\delta_{63}| = |\delta_{66}| & = 13/57600 \doteqdot .226_{10}-3 \end{array}\right.$$

(33) のつづき

$$
\left|\begin{array}{llll}
|\delta_{64}| = |\delta_{611}| & = 1/2880 & \fallingdotseq & .347_{10}-3 \\
|\delta_{65}| & = 1/720 & \fallingdotseq & .139_{10}-2 \\
|\delta_{67}| & = 1/960 & \fallingdotseq & .104_{10}-2 \\
|\delta_{68}| & = 3/800 & \fallingdotseq & .375_{10}-2 \\
|\delta_{69}| = |\delta_{6\,12}| & = 1/7200 & \fallingdotseq & .139_{10}-3 \\
|\delta_{610}| & = 7/7200 & \fallingdotseq & .972_{10}-3 \\
|\delta_{6\,13}| & = 1/14400 & \fallingdotseq & .694_{10}-4 \\
|\delta_{614}| & = 1/4800 & \fallingdotseq & .208_{10}-3 \\
|\delta_{6\,15}| & = 1/2400 & \fallingdotseq & .417_{10}-3
\end{array}\right.
$$

(34)

$$
\left|\begin{array}{l}
\delta_{55} = -\dfrac{(1-\alpha_4)(3-2\alpha_4)}{320(10\alpha_4-7)(7\alpha_4-6)} \fallingdotseq -\dfrac{1-\alpha_4}{960} \\[2ex]
\delta_{56} = -\delta_{58} = -\dfrac{1-\alpha_4}{48(10\alpha_4-7)} \fallingdotseq -\dfrac{1-\alpha_4}{144}
\end{array}\right.
$$

$|\delta_{6j}|$ の代表として $.5_{10}-3$ とすると,

$$|\delta_{56}| \fallingdotseq (1-\alpha_4)/144 \fallingdotseq .5_{10}-6$$

から, $1-\alpha_4 \fallingdotseq .72_{10}-4$ となり, $2^{-14} \fallingdotseq .61_{10}-4$ なので $1-\alpha_4 = 2^{-14}$ に決める.

桁落ちについては, y_{n+1} の有効桁数を N とすると $|\mu_4(1-\alpha_4)(k_4-k_5)/(1-\alpha_4)|$ が加え合わせる項のうち最大でなければ

(35) $N \geq n - \log_m \mu_4(1-\alpha_4) + \log_m(1-\alpha_4)$

$\qquad + \log_m \mu_3 + \log_m |k_3/k_5|$

$\qquad \fallingdotseq n - \log_m 2^{11}\cdot 11/5^2 \fallingdotseq n - 2.95$ （$m=10$のとき）.

したがって y_{n+1} の有効桁数は少なくとも $n-\log_m 2^{11}\cdot 11/5^2$ 桁は保証される.

2.7 $\alpha_4 = 1-\varepsilon \fallingdotseq 1$ （$\varepsilon > 0$）のB型公式

(36) $$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{3}\mu_i k_i + (\mu_4+\mu_5)k_5 + \mu_4(1-\alpha_4)(k_4-k_5)/(1-\alpha_4)$$

ここに

$$\left|\begin{array}{l} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_i = hf(x_n+\alpha_i h,\ y_n + \sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}k_j) \quad (\alpha_5 = 1,\ i=2,3,4,5) \end{array}\right.$$

	B−1 型	B−2 型
α_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
α_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{20}$
α_4	$\frac{65535}{65536}$	$\frac{16383}{16384}$
μ_1	$\frac{1\ 96603}{15\ 72840}$	$\frac{98293}{8\ 84682}$

	B－1 型	B－2 型
μ_2	$\frac{27}{10\ 48552}$	$\frac{5462}{36861}$
μ_3	$\frac{81\ 91357}{141\ 55416}$	$\frac{61\ 42750}{133\ 80147}$
$\mu_4+\mu_5$	$\frac{1\ 33433\ 73751\ 01831}{4\ 50331\ 33021\ 59320}$	$\frac{1532\ 36204\ 23985}{5441\ 20358\ 33826}$
$\mu_4(1-\alpha_4)$	$\frac{14073\ 74883\ 55328}{5\ 06622\ 74649\ 29235}$	$\frac{68\ 71947\ 67360}{2720\ 60179\ 16913}$
β_{21}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
β_{31}	$\frac{2\ 62109}{16\ 38275}$	$-\frac{73773}{24\ 57100}$
β_{32}	$\frac{3\ 93201}{16\ 38275}$	$\frac{2\ 94867}{6\ 14275}$
β_{41}	$\frac{56293\ 70695\ 67985}{2\ 25179\ 98136\ 85248}$	$\frac{192\ 36476\ 75049}{137\ 43895\ 34720}$
β_{42}	$-\frac{3\ 37744\ 20285\ 84915}{1\ 12589\ 99068\ 42624}$	$-\frac{1731\ 18225\ 03921}{549\ 75581\ 38880}$
β_{43}	$\frac{8\ 44371\ 24415\ 48725}{2\ 25179\ 98136\ 85248}$	$\frac{302\ 28908\ 79657}{109\ 95116\ 27776}$
β_{51}	$\frac{7157\ 95117}{28629\ 83855}$	$\frac{11271\ 83177}{8049\ 13173}$
β_{52}	$-\frac{5\ 15364\ 62031}{1\ 71777\ 72071}$	$-\frac{192\ 13145}{60\ 97703}$
β_{53}	$\frac{9\ 66293\ 91735}{2\ 57665\ 92577}$	$\frac{60881\ 02163}{22134\ 00681}$
β_{54}	$-\frac{1\ 12589\ 99068\ 42624}{73774\ 96725\ 84622\ 89985}$	$-\frac{27\ 48779\ 06944}{4\ 50053\ 49032\ 85699}$

3．結論

2．で求めた5段で実質的に5次とみなせる三つの公式のどれがよいかはいちがいにはいえない．

桁落ちの面からみると $|\beta_{i2}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2|$ や $|\mu_4(1-\alpha_4)(k_4-k_5)/(1-\alpha_4)|$ が最大となるような場合を除いて，失なわれる桁数は

A型　で　0 桁〜$14\log_m 2$ 桁　　　(10進で 4.2 桁)

B-1型で　0 桁〜$\log_m 2^{17}\cdot 3/125$ 桁　　(10進で 3.5 桁)

B-2型で　0 桁〜$\log_m 2^{11}\cdot 11/5^2$ 桁　(10進で 3.0 桁)

となって B－2 型が最もよい．

局所打切り誤差からながめると

尺度 / 公式	$\delta_{6j}\doteqdot 0$ の個数	$\sqrt{\Sigma\delta_{6j}^2/15}$	$\Sigma\lvert\delta_{6j}\rvert$	Lotkin和	$\lvert\delta_{56}\rvert$
A　型	4	$.592_{10}-3$	$.60\bar{5}_{10}-2$	$.303_{10}-1$	$.636_{10}-6$
B-1 型	4	$.101_{10}-2$	$.850_{10}-2$	$.392_{10}-1$	$.318_{10}-6$
B-2 型	0	$.112_{10}-2$	$.941_{10}-2$	$.455_{10}-1$	$.424_{10}-6$

となりA型が最もよい．

たいていは，桁落ちによる誤差よりも $O(h^6)$ の局所打切り誤差の方が大きく，また $14\log_m 2$ 桁も桁落ちすることはめったにないから，A型公式が最良であるといえよう．

4．数値例　（極限の公式（$O(h^5)$の誤差項は完全に0）との比較）——は $y(x_n)$ とのちがい

▲ は極限の公式とのちがい

例 1)　$dy/dx = -1/2y$，$y(0) = 1$，$h = 0.05$，$y(x) = \sqrt{1-x}$

	x_n	y_n	$y_n - y(x_n)$	$\beta_{32}\alpha_2 \frac{k_2-k_1}{\alpha_2}$	$\beta_{42}\alpha_2 \frac{k_2-k_1}{\alpha_2}$	$\beta_{52}\alpha_2 \frac{k_2-k_1}{\alpha_2}$	$\mu_2\alpha_2 \frac{k_2-k_1}{\alpha_2}$
A型公式	0,500D-01	0,9746794344772095	-0,3687D-11	-0,7812E-04	-0,5358E-04	-0,1412E-04	-0,1875E-04
A型極限の公式	0,500D-01	0,9746794344772164	-0,3680D-11	-0,7813E-04	-0,5358E-04	-0,1411E-04	-0,1875E-04
$y(x_n)$		0,9746794344808964					
	0,950	0,2236026460606580	-0,4152D-05	-0,2470E-02	-0,1694E-02	-0,4465E-03	-0,5930E-03
	0,950	0,2236026468033837	-0,4151D-05	-0,2471E-02	-0,1694E-02	-0,4463E-03	-0,5929E-03
		0,2236067977499790					

例 2)　$dy/dx = y^6$，$y(0) = -2$，$h = 0.01$，$y(x) = -2/(160x+1)^{\frac{1}{5}}$

0,100D-01	-1,650838970093880	0,1257D-02	-0,1536	-0,1053	-0,2776E-01	-0,3687E-01
0,100D-01	-1,650838531746555	0,1258D-02	-0,1536	-0,1053	-0,2775E-01	-0,3686E-01
	-1,652096176384267					
0,200	-0,9938645673664113	0,9442D-11	-0,7818E-04	-0,5363E-04	-0,1413E-04	-0,1877E-04
0,200	-0,9938645673663980	0,9455D-11	-0,7819E-04	-0,5363E-04	-0,1412E-04	-0,1877E-04
	-0,9938645673758531					

例 3)　$dy/dx = -xy$，$y(0) = 1$，$h = 0.1$，$y(x) = \exp(-x^2/2)$

0,100	0,9950124791894952	-0,3187D-11	-0,1250E-02	-0,8573E-03	-0,2259E-03	-0,3000E-03
0,100	0,9950124791898148	-0,2867D-11	-0,1250E-02	-0,8573E-03	-0,2258E-03	-0,3000E-03
	0,9950124791926823					
3,00	0,1110898790035604D-01	-0,8638D-08	0,1382E-03	0,9479E-04	0,2498E-04	0,3317E-04
3,00	0,1110898788005302D-01	-0,8658D-08	0,1382E-03	0,9479E-04	0,2497E-04	0,3317E-04
	0,1110899653824231D-01					

例 1) $dy/dx = -1/2y$, $y(0) = 1$, $h = 0.05$, $y(x) = \sqrt{1-x}$

	x_n	y_n	$y_n - y(x_n)$	$\mu_4(1-\alpha_4)\frac{k_4-k_5}{1-\alpha_4}$
B-1型公式	0,500D-01	0,9746794344820355	0,1139D-11	0,1876E-04
	0,500D-01	0,9746794344820329	0,1137D-11	0,1876E-04
		0,9746794344808964		
	0,950	0,2236074179939644	0,6202D-06	0,1507E-02
	0,950	0,2236074177982346	0,6200D-06	0,1507E-02
		0,2236067977499790		

例 2) $dy/dx = y^6$, $y(0) = -2$, $h = 0.01$, $y(x) = -2/(160x+1)^{\frac{1}{5}}$

0,100D-01	-1,659472679505785	-0,7377D-02	0,2241E-01
0,100D-01	-1,659471600900501	-0,7375D-02	0,2241E-01
	-1,652096176384267		
0,200	-0,9938645673803950	-0,4542D-11	0,1564E-04
0,200	-0,9938645673804059	-0,4553D-11	0,1564E-04
	-0,9938645673758531		

例 3) $dy/dx = -xy$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$, $y(x) = \exp(-x^2/2)$

0,100	0,9950124783667946	-0,8259D-09	0,2736E-03
0,100	0,9950124783666667	-0,8260D-09	0,2736E-03
	0,9950124791926823		
3,00	0,1110898187370353D-01	-0,1466D-07	-0,2850E-04
3,00	0,1110898188405225D-01	-0,1465D-07	-0,2850E-04
	0,1110899653824231D-01		

例 1) $dy/dx = -1/2y$, $y(0) = 1$, $h = 0.05$, $y(x) = \sqrt{1-x}$

	x_n	y_n	$y_n - y(x_n)$	$\mu_4(1-d_4)\frac{k_4-k_5}{1-d_4}$
B−2型公式	0,500D-01	0,9746794344816424	0,7460D-12	0,1690E-04
B−2型 極限の公式	0,500D-01	0,9746794344816374	0,7411D-12	0,1690E-04
$y(x_n)$		0,9746794344808964		
	0,950	0,2236079108997409	0,1113D-05	0,1360E-02
	0,950	0,2236079113696007	0,1114D-05	0,1359E-02
		0,2236067977499790		

例 2) $dy/dx = y^6$, $y(0) = -2$, $h = 0.01$, $y(x) = -2/(160x+1)^{\frac{1}{5}}$

0,100D-01	-1,665665760293473	-0,1357D-01	0,1904E-01
0,100D-01	-1,665662236364354	-0,1357D-01	0,1903E-01
	-1,652096176384267		
0,200	-0,9938645673900593	-0,1421D-10	0,1462E-04
0,200	-0,9938645673900571	-0,1420D-10	0,1462E-04
	-0,9938645673758531		

例 3) $dy/dx = -xy$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$, $y(x) = \exp(-x^2/2)$

0,100	0,9950124787876904	-0,4050D-09	0,2500E-03
0,100	0,9950124787875000	-0,4052D-09	0,2499E-03
	0,9950124791926823		
3,00	0,1110898246910664D-01	-0,1407D-07	-0,2983E-04
3,00	0,1110898248259336D-01	-0,1406D-07	-0,2982E-04
	0,1110899653824231D-01		

参考文献

1) C.Runge, Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen, Math. Ann. 46, 167-178 (1895).

2) K.Heun, Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen, Z.Math.Physik, 45, 23-38 (1900).

3) W.Kutta, Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen, Z.Math.Physik, 46, 435-453 (1901).

4) 田中正次, Runge-Kutta 法の打ち切り誤差に関する研究, 東京大学に提出した論文 (1972).

5) 田中正次, Runge-Kutta 法の打ち切り誤差の評価について, 情報処理, 17, 12, 1143-1151 (1976).

6) 戸田英雄, Runge-Kutta 系のある極限公式の打ち切り誤差についての研究, 電子技術総合研究所研究報告, 772 (1977).