

## 超関数への数値的接近

日大 理工 竹澤 照

序. 1920年後半に Dirac は連続固有値の直交規格化の関係を離散固有値のそれと全く同様に形式的に扱うために、無限大の量を表わす  $\delta(x)$  を導入し、

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \delta(0) = +\infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

と定義した。しかしこのような性質をもつ通常の関数は存在しない。にもかかわらず彼は名著「量子力学」の中で数学的には正しいとはいえない演算で、物理的には正しい種々の結果を与えている。Dirac 自身、 $\delta(x)$  は象徴的な意味のものであって、通常の関数のようにおのおのの  $x$  の値に対して関数の値が定まるものではなく、積分  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$  に意味を持たせ、通常の関数と區別し *improper function* と呼んでいる。この奇形な関数が Dirac の delta 関数と呼ばれ導入された最初の超関数である。以来、数学的正当性を与える幾多の研究が多くの数学者によってなされ、超関数の理

論が飛躍的に進歩し、1950年に Schwartz の *distribution*<sup>2)</sup> で一応の集大成を見た。<sup>注)</sup> しかし関数空間・位相等の定義や記号の使用が、数学者以外には難解で近き難いものであった。1955年に Mikusinski<sup>3)</sup> の考へを受けついで Temple<sup>4)</sup> が超関数, *generalized function* を関数列によつて定義するという古典解析学で使われる概念だけを用いて平易な形に表現しなおした。更に Lighthill<sup>5)</sup> や Gel'fand<sup>6)</sup> によつて簡単化され、一層近き易いものとなった。更に一歩進め、筆者は宇野・洪<sup>7)</sup> の考へを受けつぎ、現実の問題の中での超関数を扱い、それらへの数値的接近を試みたものである。即ち超関数は象徴的なものであっておのおのの点での関数の値が定まるものではないとすることに逆らい、超関数といえども関数値が定まり、グラフも描けることを主張する。本論文では亦一種フレドホルム型積分方程式の解に現われる超関数及熱伝導方程式の初期値問題の逆問題として、初期値に現われる超関数を扱う。特に衝撃・パルス・一点集中応力トルクなどとしていたるところで登場するデルタ関数及その導超関数について例示し、その直観を与へ、より一層超関数を身近なものとする。

---

注) その後の発展に佐藤の *hyper function* や *ultra-hyper function* がある。

§1 Temple は超関数を「基本列  $\{f_\nu(x)\}$  は一つの超関数  $f(x)$  を定める」と定義している。

基本列とは  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(x) F(x) dx$

が存在するような関数列  $\{f_\nu(x)\}$  のことである。但し  $f_0(x)$  も  $f(x)$  もいたるところ微分可能であり且すべて  $\alpha \in \mathbb{N}$  に対して関数自身とそのすべての導関数が  $|x| \rightarrow \infty$  で  $O(|x|^{-\alpha})$  とする(このような性質をもつ関数を良い関数又は急減少関数と呼ぶ)。又関数列  $\{\frac{d}{dx} f_\nu(x)\}$  が超関数  $f(x)$  の導超関数を与へるものであるとしている。この操作を繰り返すことにより  $f(x)$  の  $m$  階導超関数  $f^{(m)}(x)$  を定める基本列を作ることが出来る。良く知られているように

$$\begin{aligned} \text{関数列} \quad & \{ \sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2} \}, \\ & \{ \nu/\pi (1+\nu^2) \} \\ & \{ \sin \nu x / \pi x \} \end{aligned}$$

は  $\delta(x)$  に収束する基本列である。以下に  $\{\frac{d^m}{dx^m} f_\nu(x)\}$  を列挙し、それらを図示する。

関数列  $\{\sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2}\}$  に対して:

$$\{\sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2}\}' = -2\nu\sqrt{\nu/\pi} x e^{-\nu x^2}$$

$$\{\sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2}\}'' = -2\nu\sqrt{\nu/\pi} (1-2\nu x^2) e^{-\nu x^2}$$

$$\{\sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2}\}''' = \sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2} (12\nu^2 x - 8\nu^3 x^3)$$

$$\{\sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2}\}^{(IV)} = \sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2} (12\nu^2 - 48\nu^3 x^2 + 16\nu^4 x^4)$$

4

$$\{\sqrt{v/\pi}e^{-vx^2}\}^{(V)} = \sqrt{v/\pi}e^{-vx^2} (-120v^3x+160v^4x^3-32v^5x^5)$$

fig 1 の上段がこれらを図示したものである。 ( $v=5, 15, 45$ )

関数列  $\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}$  但し  $\epsilon=1/v$  に対して

$$\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}' = -2\epsilon x/\pi(x^2+\epsilon^2)^2$$

$$\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}'' = -2\epsilon(-3x^2+\epsilon^2)/\pi(x^2+\epsilon^2)^3$$

$$\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}''' = -24\epsilon x(x^2-\epsilon^2)/\pi(x^2+\epsilon^2)^4$$

$$\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}^{(IV)} = -24\epsilon x(x^2-\epsilon^2)/\pi(x^2+\epsilon^2)^4$$

$$\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}^{(V)} = -240\epsilon(3x^5-10\epsilon^2x^3+3\epsilon^4x)/\pi(x^2+\epsilon^2)^6$$

fig 1. の中段がこれらを図示したものである。

( $v=5, 10, 15$ )

関数列  $\{\sin vx/\pi x\}$  に対して

$$\{\sin vx/\pi x\}' = (vx \cos vx - \sin vx)/\pi x^2$$

$$\{\sin vx/\pi x\}'' = \{-2vx \cos vx + (2-v^2x^2)\sin vx\}/\pi x^3$$

$$\{\sin vx/\pi x\}''' = \{vx(6-v^2x^2)\cos vx - 3(2-v^2x^2)\sin vx\}/\pi x^4$$

$$\{\sin vx/\pi x\}^{(IV)} = \{(-24vx+4v^3x^3)\cos vx + (24-12v^2x^2+v^4x^4)\sin vx\}/\pi x^5$$

$$\{\sin vx/\pi x\}^{(V)} = \{(120vx-20v^3x^3+v^5x^5)\cos vx \\ + (-120+60v^2x^2-5v^4x^4)\sin vx\}/\pi x^6$$

fig 1. の下段がこれらを図示したものである。 ( $v=7$ )

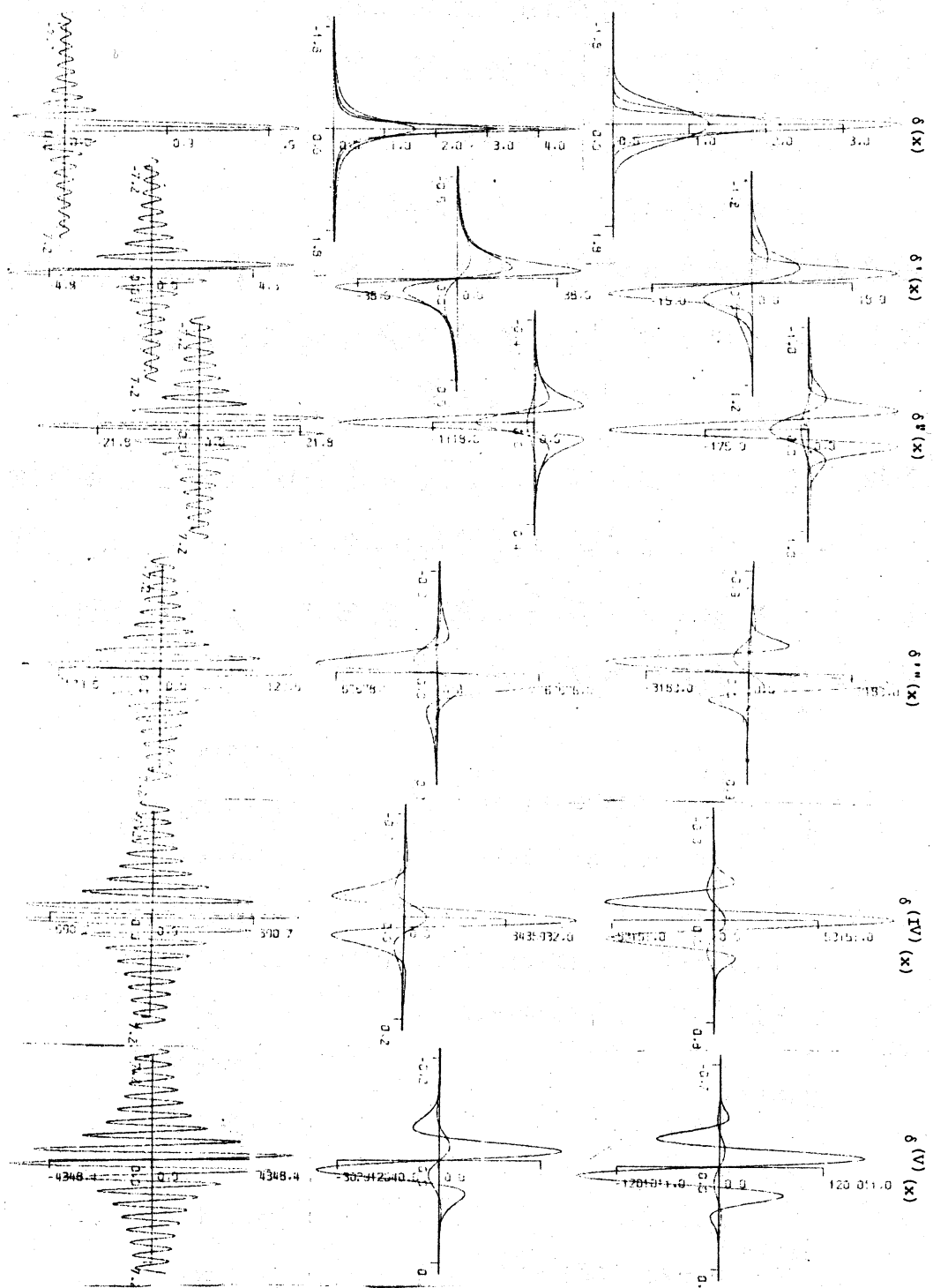


Fig. 1

2.2 区間  $(0, 1)$  内に有限個の点  $a_1, a_2, \dots, a_L$  で  $g(x)$  又は  $g^{(m)}(x)$  に  $\sigma_m(a_\ell)$  だけの跳び即ち

$$\sigma_m(a_\ell) = g^{(m)}(a_\ell+) - g^{(m)}(a_\ell-)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad \ell = 1, 2, \dots, L$$

の有る関数を積分方程式の右辺に与へる。すると前述の積分方程式の解の中の  $g^{(m)}(x)$  を超関数の意味での微分

$$g^{(m)}(x) = g^{(m)}(x) + \sum_{\ell=1}^L \sum_{p=0}^{m-1} \sigma_p(a_\ell) \delta^{(m-1-p)}(x-a_\ell)$$

で置き換へることによつて、 $\delta$  及びその導超関数  $\delta^{(m)}$  を含む解が得られる。但し上式での  $g^{(m)}(x)$  は点  $a_\ell, \ell = 1, 2, \dots, L$  を除いたところでの通常の  $m$  階導関数である。以下に区間  $(0, 1)$  内に跳びのある関数を列挙する。

$$g-1 \quad g(x) = \begin{cases} 48x^2 & , 1/4 < x < 0 \\ -8(x+1)(x-11/20) & , 1/2 < x < 1/4 \\ 8(x-2)(x-9/20) & , 3/4 < x < 1/2 \\ 16(-1) & , 1 < x < 3/4 \end{cases}$$

$$\sigma_0(1/2) = -1.2, \sigma_2(1/2) = 32, \sigma_1(1/4) = -31.6, \sigma_2(1/4) = -112$$

$$\sigma_1(3/4) = 15.6, \sigma_2(3/4) = 16$$

$$g-2 \quad g(x) = \begin{cases} -x & , 0 < x < 1/4 \\ 1-x & , 1/4 < x < 1 \end{cases}$$

$$\sigma_0(1/4) = 1$$

$$g-3 \quad g(x) = \begin{cases} x/2 & , 0 < x < 1/4 \\ -x/2 + 1/4 & , 1/4 < x < 1 \end{cases}$$

$$\sigma_1(1/4) = 1, g(1) = -1/4$$

## §2. 第一種フレドホルム型積分方程式

2.1  $K(x, y)$  が対称核のときの第一種フレドホルム型積分方程式 
$$\int_0^1 K(x, y) h(y) dy = g(x) \quad (1)$$

の解  $h(x)$  に含まれる超関数を扱うことにする。ここで扱う核(対称核なる故  $x \geq y$  のみ記す)はそれに対する解を列挙する。

K-1  $L[u] = 2u'' - 2u$  の Green 関数

$$K(x, y) = e^{-|x-y|}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2}[g(0) - g'(0)]\delta(x) + \frac{1}{2}[g(1) + g'(1)]\delta(x-1)$$

K-2  $u(0) = u(1) = 0$  ときの  $L[u] = u''$  の Green 関数

$$k(x, y) = y(1-x), x \geq y$$

$$h(x) = -g''(x) - g(0)\delta'(x) - g(1)\delta'(x-1)$$

K-3  $u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1)$  ときの  $L[u] = u^{(IV)}$  の Green 関数

$$K(x, y) = \frac{1}{6}y(x-1)(x^2 + y^2 - 2x), x \geq y$$

$$h(x) = g^{(IV)}(x) + g(0)\delta'''(x) + g''(0)\delta'(x) - g(1)\delta'''(x-1) - g''(1)\delta'(x-1)$$

K-4  $u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = u^{(IV)}(0) = u^{(IV)}(1) = 0$  ときの Green 関数

$$L[u] = u^{(IV)}$$

$$K(x, y) = \frac{1}{360}y(x-1)\{-3x^4 + 12x^3 - (10y^2 + 8)x + (20y^2 - 8)x - 3y^4\}, x \geq y$$

$$h(x) = -g^{(VI)}(x) - g(0)\delta^{(V)}(x) - g''(1)\delta'''(x-1) + g^{(IV)}(1)\delta'(x-1)$$

K-5 Poisson 核

$$K(x, y) = \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma\cos 2\pi(x-y)+\gamma^2}, 0 < \gamma < 1 \quad (\gamma = 0.75 \text{ とした})$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k a_k \cos 2k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k b_k \sin 2k\pi x \quad \text{のとき}$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2k\pi x$$

$$g-4 \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & , 0 \leq x \leq 1/4 \\ x^2/2 + x/4 - 1/32 & , 1/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\sigma_2(1/4) = 1, g''(0) = 2, g(1) = 5/4, g''(1) = 1$$

$$g-5 \quad g(x) = \begin{cases} 27x^3 & , 0 \leq x \leq 1/4 \\ (x-1)(-37x^2 + 11x - 1) & , 1/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\sigma_3(1/4) = -384, g''(1) = -126$$

$$g-6 \quad g(x) = \begin{cases} 81x^4 & , 0 \leq x \leq 1/4 \\ -175x^4 + 256x^3 - 96x^2 + 16x - 1 & , 1/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\sigma_4(1/4) = -6144, g^{(IV)}(0) = 1944, g^{(IV)}(1) = -4200$$

$$g-7 \quad g(x) = \begin{cases} 243x^5 & , 0 \leq x \leq 1/4 \\ (x-1)(-781x^4 + 499x^3 - 141x^2 + 19x - 1) & , 1/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\sigma_5(1/4) = -122880, g''(1) = -3780, g^{(IV)}(1) = -63000$$

g-8 Weierstrass の関数

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k x \pi), (a=13, b=0.5, k \text{ は } 50 \text{ までとした})$$

### 2.3 三角級数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\pi x/l} \quad (2)$$

は次のとき、一つの超関数  $f(x)$  を定める。

i)  $|k| \rightarrow \infty$  のとき、ある  $N$  を選んで  $C_k = O(|k|^N)$  と書けるとき、(2) は一つの Schwartz distribution  $f(x)$  に収束する

ii)  $|k| \rightarrow \infty$  のとき、任意の  $C > 1$  に対して  $C_k = O(C^{|k|})$  と書けるとき、(2) は一つの hyperfunction  $f(x)$  に収束する。

例へば

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin(2k-1) 2\pi x + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \delta(2\pi x - \pi/2 + k\pi)$$



$$2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cos(2k-1) 2\pi x = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \delta'(2\pi x - \pi/2 + k\pi)$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin(2k-1) 2\pi x = -\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \delta''(2\pi x - \pi/2 + k\pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi k x = 1/2 \cot \pi x$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \cos 2\pi k x = 1/4 \cos^2 \pi x$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^3 \cos 2\pi k x = (\cos^2 \pi x + 3 \sin^2 \pi x) / 8 \cos^4 \pi x$$

これらに関する  $g(x)$  を列挙する

$$\begin{aligned} g-9 \quad g(x) &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin k\pi x \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left( -\pi x + \pi x \log \pi x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pi x)^{2k+1}}{k(2k+1) \cdot 2 \cdot (2k)!} \right) |B_{2k}| \end{aligned}$$

但し  $B_{2k}$  はベルヌーイ数,  $k$  は 20 までとった。

$$g-10 \quad g(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^{2k-1} (-1)^{k-1} \sin(2k-1) 2\pi x$$

$$g-11 \quad g(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^{2k-1} (-1)^{k-1} k \cos(2k-1) 2\pi x$$

$$g-12 \quad g(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^{2k-1} (-1)^k k^2 \sin(2k-1) 2\pi x$$

$$g-13 \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k 2\pi x$$

$$g-14 \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} r^k k \cos k 2\pi x$$

$$g-15 \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k r^k k^3 \cos k 2\pi x$$

## 2.4 数値解法

積分方程式の左辺を数値積分公式で離散化し, それと同数の点  $x_i$  を与へ, 連立一次方程式

$$\sum_{j=1}^n W_j K(x_i, y_j) h(y_j) = g(x_i), i=1, 2, \dots, n$$

をLU分解法 (Doolittle 法) で解くことにする。

$$\text{合形則: } W_0 = W_n = 1/2, W_j = 1, j=1, \dots, n-1$$

$$x_i = i/n, i=0, 1, \dots, n$$

$$y_j = j/n, j=0, 1, \dots, n$$

中点則:  $w_j = 1, j=1, 2, \dots, n$

$$x_i = i/n - 1/2n, i=1, 2, \dots, n$$

数値計算は全て16進8桁(10進で約17.1桁)の浮動小数点演算で行う。

## 2.5 計算例

核	$g(x)$	$h(x)$	数値解(数値積分公式)
K-1	$g-1$	$1/2g(x) - 1/2g''(x)$ $+15.8\delta(x-1/4) + 0.6\delta'(x-1/2)$ $+7.8\delta(x-3/4) + 8\delta(x-1)$	table 1-1(台形則)
K-1	$g-1$	$+7.8\delta(x-3/4) + 8\delta(x-1)$	table 1-2(中点則)
K-2	$g-1$	$-g''(x) + 31.6\delta(x-1/4)$ $+1.2\delta'(x-1/2) - 15.6\delta(x-3/4)$	table 2 ( " )
K-3	$g-2$	$\delta'''(x-1/4)$	table 3 ( " )
k-3	$g-3$	$\delta''(x-1/4) + 1/4\delta'(x-1)$	table 4 ( " )
K-3	$g-4$	$\delta'(x-1/4) + 2\delta'(x)$ $-5/4\delta'''(x-1) - \delta'(x-1)$	table 5 ( " )
K-3	$g-5$	$-384\delta(x-1/4) + 126\delta'(x-1)$	table 6 ( " )
K-4	$g-2$	$\delta^{(V)}(x-1/4)$	table 7 ( " )
K-4	$g-3$	$-\delta^{(IV)}(x-1/4) - 1/4\delta^{(V)}(x-1)$	table 8 ( " )

K-4	g-4	$-\delta''(x-1/4)-2\delta''(x)+\delta''(x-1)$	table 9 (中点則)
K-4	g-5	$384\delta''(x-1/4)-126\delta''(x-1)$	table 10 ( " )
K-4	g-6	$6144\delta'(x-1/4)-1944\delta'(x)-4200\delta'(x-1)$	table 11 ( " )
K-4	g-7	$122880\delta(x-1/4)3780\delta''(x-1)-63000\delta'(x-1)$	table 12 ( " )
K-2	g-4	$-2H(-x+1/4)-H(x-1/4)+5/4\delta(x-1)$	table 13 ( " )
K-2	g-5	$-162xH(-x+1/4)+(222x-96)H(x-1/4)-126\delta(x-1)$	table 14 ( " )
K-2	g-8		table 15 ( " )
K-5	g-9	$\delta(x-1/4)-\delta(x-3/4)$	table 16 ( " )
K-5	g-11	$\delta'(x-1/4)-\delta'(x-3/4)$	table 17 ( " )
K-5	g-12	$-\delta''(x-1/4)+\delta''(x-3/4)$	table 18 ( " )
K-2	g-9	$1/2 \cot \pi x$	table 19 ( " )
K-5	g-13	$1/2 \cot \pi x$	table 20 ( " )
K-5	g-14	$1/4 \cos^2 \pi x$	table 21 ( " )
K-5	g-15	$(\cos^2 \pi x + 3\sin^2 \pi x) / 8\cos^4 \pi x$	table 22 ( " )

2.6  $\delta^{(m)}(x-a)$  の現われるところでは他の点での値に比べ大きな数値が得られている。しかもこの点附近の数値は分割数  $n$  に大きく依存することが観測される。それらを解析

してみよう。

結果 I. 分割数  $n$  を倍に増したときの  $\delta^{(m)}$  の存在する点での計算値の変化の倍率をおのおのの核に対して下表に示す。

( $n$  は 8 から 256 まで行った)。

$\delta^{(K)}$	K-1	K-2	K-3	K-4	K-5
$\delta$	2.002	2.0000000000000000	1.9999999999	2.0000	2.0000000000000000
$\delta'$	4.002	4.0000000000000000	3.99999998	3.9993	4.1
$\delta''$			7.99999998	8.0000	7.8
$\delta'''$			16.00000000	16.01	
$\delta^{(IV)}$				32.0000	
$\delta^{(V)}$				64.0000	

このことから  $\delta$  及  $\delta^{(m)}$  の大きさは  $n$  の  $(m+1)$  乗に比例することがわかる。又表中の数値は 2 倍, 4 倍, ... からはずれる桁数で打切っている。実はこの桁数が  $\delta^{(m)}$  の存在しない他の分点での通常の解  $a$  と  $a$  での精度とほぼ一致している。

結果 II 積分の分点  $x_i$  と  $f(x)$  の跳びの点  $a_e$  とが丁度一致するとき,  $f(x_i)$  に適当な値  $C$  を与へ計算を実行する。その結果

$$\text{核 I 及 II での } \int_0(a_e) \delta'(x-a_e) \text{ が } (C-f(a_e-)) \delta'(x-a_e+\frac{1}{2m})$$

$$\text{と } (f(a_e+)-C) \delta'(x-a_e-\frac{1}{2m})$$

とに分かれる。K-3 の  $\delta'''$ , K-4 での  $\delta^{(IV)}$  も同様な現象が見られる。

結果Ⅲ 区間の端での  $\delta \sim \delta^{(D)}$  は内部でのものの2倍の高さをもつ。

結果Ⅳ  $K-1$  又は  $K$  で  $\sigma_2(a_e)$  や  $\sigma_3(a_e)$  を持つ  $g(x)$  を与へると、 $\sigma_2(a_e)$  では分割数  $n$  に依存せず、一定値  $\sigma_3(a_e)$  では  $n$  に逆比例するものが現れ、その形状は Fig. 5 である。これらは積分を離散化したために現れたものであろう。 $K-3$  では  $\sigma_4, \sigma_5$ ,  $K-4$  では  $\sigma_6, \sigma_7$  で同様の現象がみられる。以上より、サード種フレドホルム型積分方程式に現れる  $\delta$  関数及其の導関数は、前述のような数値解法を採用したとき

$$\delta^{(m)}(x-a) = C_m n^{m+1} \varphi_m(x)$$

と表わされる。ここに  $C_m$  及  $\varphi_m(x)$  は核により定まるものである。例へば Fig. 2 に示すように核  $K-1$  と  $K-2$  に対して

$$C_0 = C_1 = 1,$$

$$\varphi_0(x) = \frac{h}{h} \frac{x-a}{h} \Pi(x)$$

$$\varphi_1(x) \begin{cases} -\operatorname{sgn}(x-a) \Pi(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$$

となる。但し  $h = 1/n$ ,  $x = a + \eta h$ ,  $\eta = [-1, 1]$  及  $\Pi(x)$  は  $\eta$  の区間  $[-1, 1]$  内でのみ 1 で他では 0 となる単位関数である。

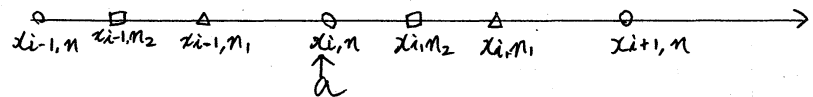
他の核に対しては  $\varphi_m(x)$  の具体形を示すことは困難であるが Fig. 3 が  $K-3$ , Fig. 4 が  $K-4$  に対する形状である。なおこれらの図は次のように描いたものである。

分割数  $n$  のときの分点の座標を  $x_{i, n}$ ,  $i=1, \dots, n$

"  $n_1$  " "  $x_{i, n_1}$  "

"  $n_2$  " "  $x_{i, n_2}$  "

としたときの、点  $x_{i, n_1}$ ,  $x_{i, n_2}, \dots$  での計算値  $h(x_{i, n_1})$ ,  $h(x_{i, n_2})$ ,  
 $\dots$  を  $\delta^{(m)}$  のところでは  $h(x_{i, n_1}) \times (n/n_1)^{m+1}$ ,  $h(x_{i, n_2}) \times (n/n_2)^{m+1}$ ,  
 $\dots$  と分割数  $n$  のときの値に換算した値を  $\delta^{(m)}(x-a)$  のある点  
 $a$  を中心に分割数  $n$  での  $n$  区間内にプロットしたものである。



図からみらるるように Temple のこれと極めて一致した形状を示している。又 Dirac は  $\delta(0) = +\infty$  の  $\infty$  はむやみに大きなものではなく、原点を中心に幅  $\varepsilon$  をもたせたとき  $\varepsilon^{-1}$  の程度の無限大であるといっている。筆者の得た数値解はここのことを極めて合理的に物語っている。この手法により未知の積分方程式の解に含まれる  $\delta$  及びその導関数を検出することが可能となる。即ち数値解が分割数  $n$  の  $m+1$  乗に比例して得られる部分には、 $\delta^{(m)}(x-a)$  が在る。但し Weierstrass の関数のような関数を右辺にもつ積分方程式、即ち解にいたるところ  $\delta^{(m)}$  を含む場合は除外する。

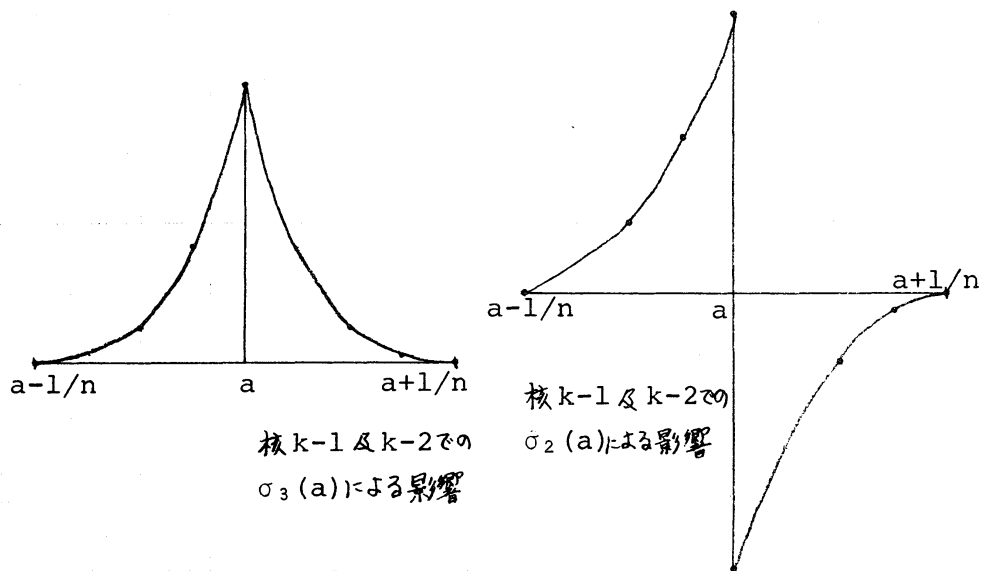


Fig.5

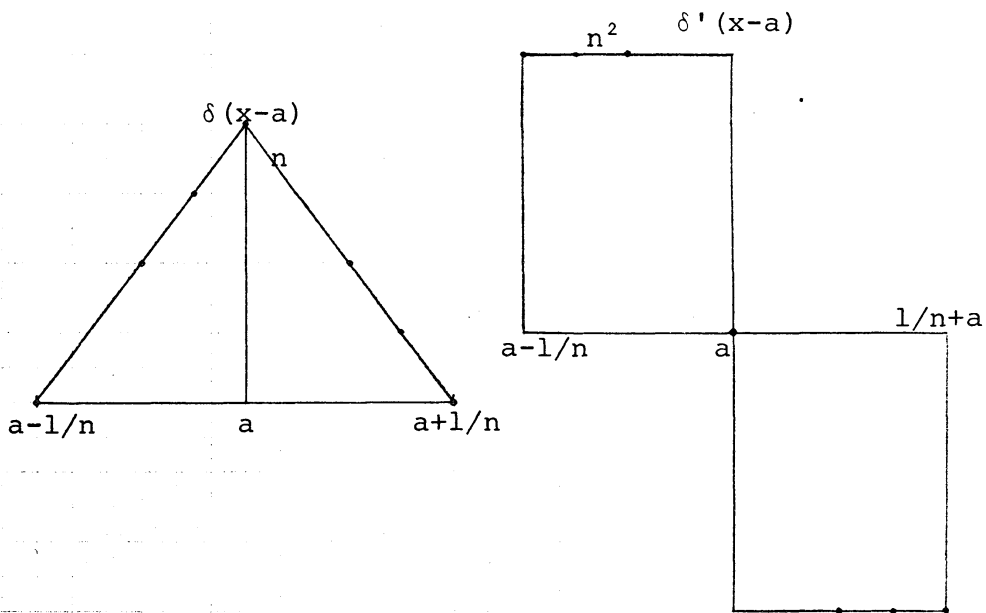


Fig. 2  
核  $k-1$  及  $k-2$  での  $\delta^{(m)}(x-a)$

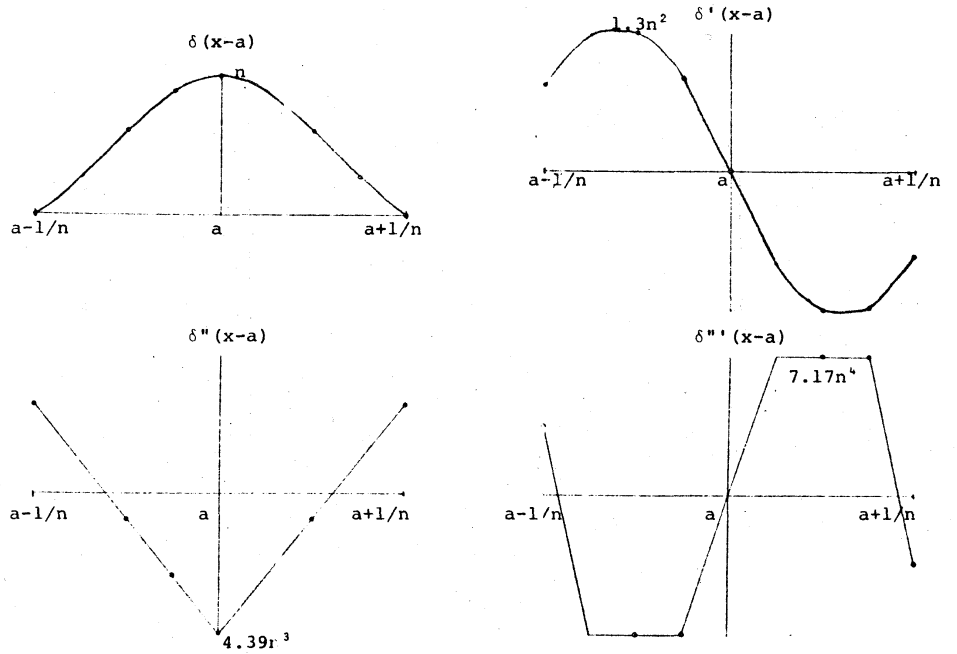


Fig. 3  
 $k=3 \Rightarrow \delta^{(m)}(x-a)$

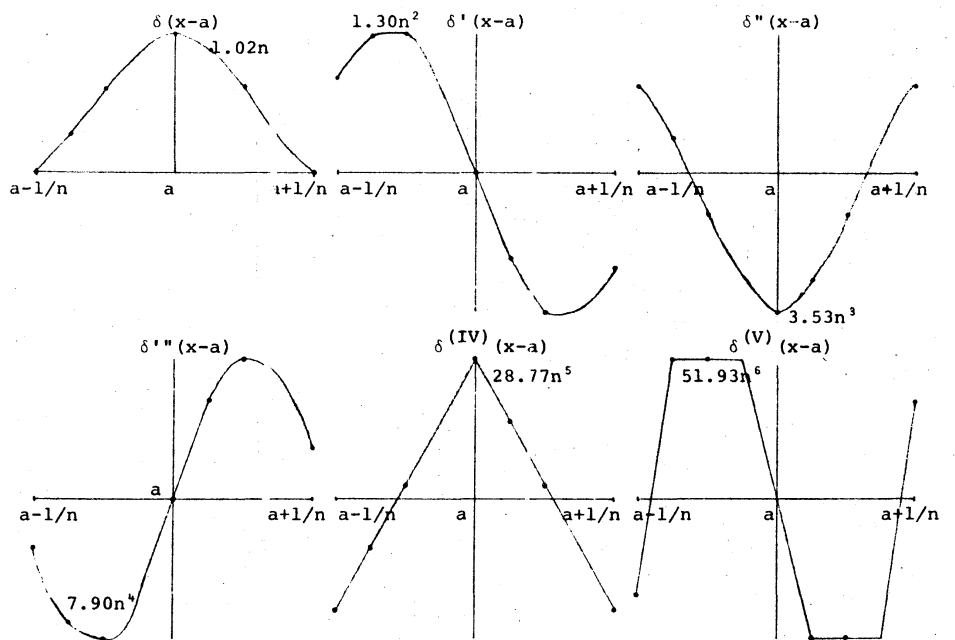


Fig. 4  
 $k=4 \Rightarrow \delta^{(m)}(x-a)$



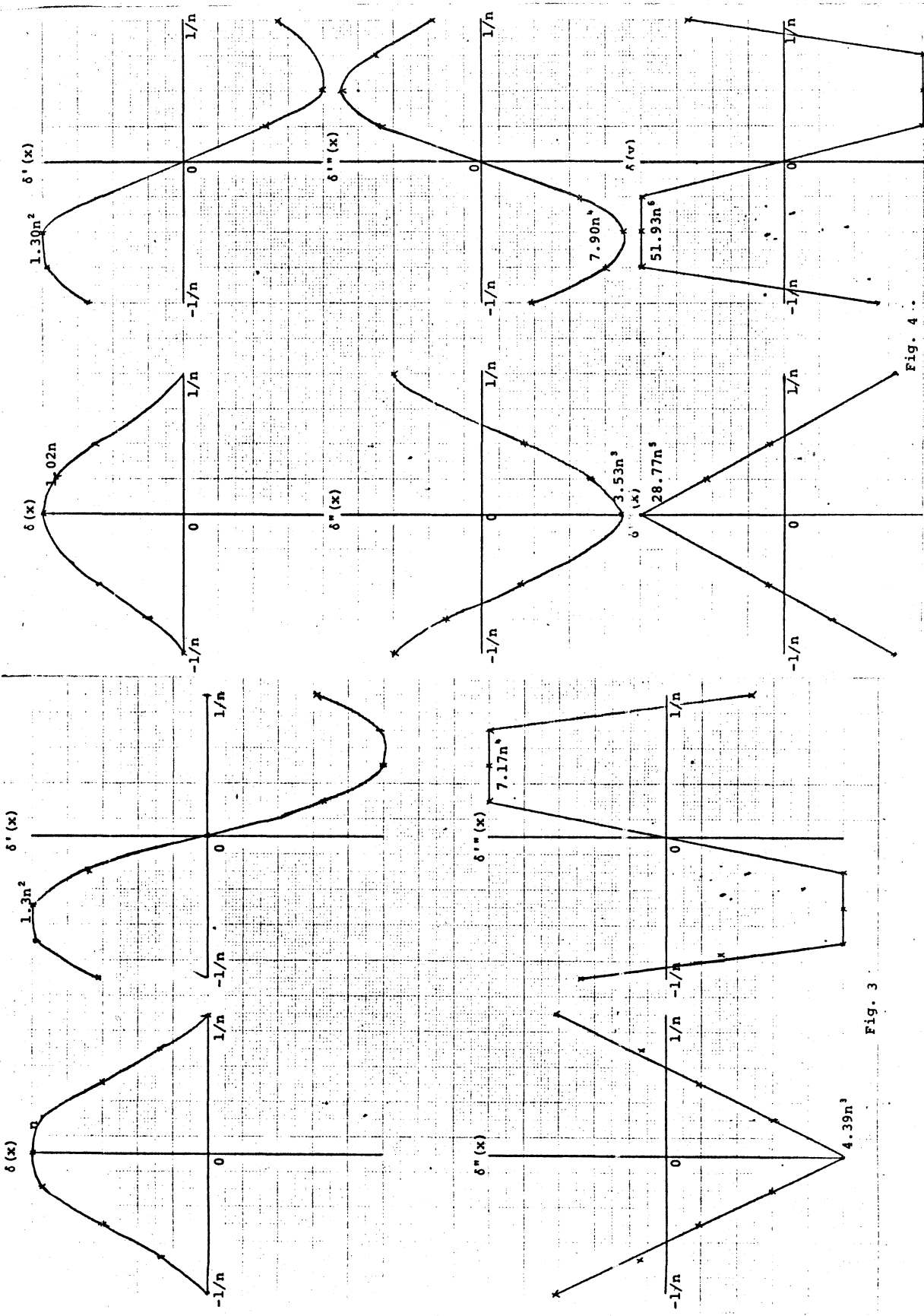


Fig. 4..

Fig. 3

2.7 積分方程式(1)が解を持つための必要十分条件としての Picard の定理がある。即ち

$$K'(x, y) = \int K(x, s)K(y, s) ds$$

を考へ、この核の固有値を  $\{\lambda_k^2\}$ 、それに対応する固有関数を  $\{M_k(x)\}$  とする。(1)の右辺を  $M_k(x)$  によつて Fourier 展開し、

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k M_k(x)$$

としたとき、解  $u(x)$  が存在するための必要十分条件は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 C_k^2 \quad (2)$$

が収束することである。この定理を満さない場合の一例が

$$f(x) \text{ に } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{\pi^2 n^2}$$

を考へ、 $K=2$  の場合である。すると  $K'(x, y)$  の固有値は  $n^4 \pi^4$ 、 $C_n$  は  $\frac{1}{n^2 \pi^2}$  であるので(2)式は

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \pi^4 \frac{1}{n^4 \pi^4} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

となり発散する。しかし形式解は  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x$  である。これは発散級数であるが、超関数の意味で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{2} x$$

となるものである。Poisson核で解いても同様の結果が得られる。

## 2.8 初期値ないし境界値問題の逆問題

領域の内部で所定の偏微分方程式の解となつてゐる関数が領域の境界に接近するときの振舞を知りべやうとするもので

ある。このことを数値的に調べ超関数を見ようとするところである。

$$\text{熱伝導方程式} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

$$\text{の両端断熱} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \quad (4)$$

の場合を取り扱う。  $t > 0$  での (3) の解が  $t=0$  でどうなるかを調べる。ここで得た数値的様相が断熱条件の熱伝導の物理的意味と合致している。

$$i) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n^2 t} \cos nx$$

$t=0$  とすると

$$u(x, 0) = \cos x - 2 \cos 2x + 3 \cos 3x - \dots$$

でこれは超関数の意味で  $1/4 \cos^2 \frac{x}{2}$  に等しい。即ち初期値が  $1/4 \cos^2 \frac{x}{2}$  である。数値実験の結果  $x=\pi$  で丁度  $1/4 \cos^2 \frac{\pi}{2}$  と反対の符号となりこのような特異点での様子をグラフに描くとすれば右図のようなものである。

$$ii) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 e^{-n^2 t} \cos nx$$

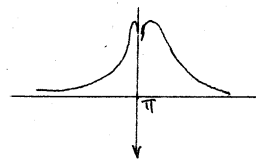
$t=0$  とすると

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 \cos nx$$

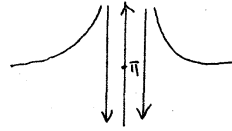
となり、これは超関数の Fourier 展開の意味で

$$\left\{ \cos^2 \frac{x}{2} + 3 \sin^2 \frac{x}{2} \right\} / 8 \cos^4 \frac{x}{2}$$

に等しい。ところが数値解は  $x=\pi$  付近でこの式とはなれだし  $\pm\infty$  と振動してくる。これをグラフに描くとすれば、



下図のようになり quintett 的様相を持つたものである。



終わりに

数値計算は日本大学理工学部 HITAC 8700, OKITAC 4300C 及 東京大学大型計算機センターの HITAC 8700/8800 で行なわれた。なお、本研究に際し終始御指導下さいました日本大学・宇野利雄博士並に有益な御助言を頂いた京都大学・松信教授に、心からの謝意を表す。

#### References

- 1) P.A.M. Dirac: The Principles of Quantum Mechanics, Oxford UP, 1930
- 2) L. Schwartz: Theorie des Distribution, tomes I et II, Hermem et Cie, 1950-1
- 3) 佐藤幹夫: 超関数の理論, 数学, 10巻, 1号,
- 4) J.G. Mikusinski: Fundam. Math, 35, 235, 1948
- 5) G. Temple: Theory of Generalized Functions, Proc. Roy. Soc. A 228, 1955
- 6) M.J. Lighthill: An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions, Cambridge UP, 1958
- 7) I.M. Gel' Fand and G.E. Shilov: Obobshchennye Funktsii, Vypusk I, Moscow, 1958
- 8) T. UNO and I. Hong: A Relation between Some Fredholm Type Linear Integral Equations of First Kind and Linear Algebraic Simultaneous Equations, Mathematica Japonicae, 20, 1975

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0312500000000000	-71.99999999999995	-96.00000000000000
2	0.0937500000000000	-96.00000000000010	-96.00000000000000
3	0.1562500000000000	-95.99999999999984	-96.00000000000000
4	0.2187500000000000	170.80000000000000	-96.00000000000000
5	0.2812500000000000	254.80000000000000	16.00000000000000
6	0.3437500000000000	15.99999999999983	16.00000000000000
7	0.4062500000000000	16.00000000000023	16.00000000000000
8	0.4687500000000000	319.19999999999996	16.00000000000000
9	0.5312500000000000	-319.19999999999998	-16.00000000000000
10	0.5937500000000000	-15.99999999999997	-16.00000000000000
11	0.6562500000000000	-16.00000000000007	-16.00000000000000
12	0.7187500000000000	-142.80000000000000	-16.00000000000000
13	0.7812500000000000	-154.79999999999999	-32.00000000000000
14	0.8437500000000000	-32.00000000000011	-32.00000000000000
15	0.9062500000000000	-31.99999999999985	-32.00000000000000
16	0.9687500000000000	-24.00000000000007	-32.00000000000000

table 1-1

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0312500000000000	-47.58204929888065	-47.97656250000000
2	0.0937500000000000	-47.75789537441226	-47.78936250000000
3	0.1562500000000000	-47.38301739605985	-47.41406250000000
4	0.2187500000000000	86.49249017494321	-46.85156250000000
5	0.2812500000000000	128.6939966464990	9.377343750000000
6	0.3437500000000000	9.103027059426824	9.108593750000000
7	0.4062500000000000	8.803124677744815	8.808593750000000
8	0.4687500000000000	159.9733295189506	8.477343750000000
9	0.5312500000000000	-159.9733295189506	-8.477343750000000
10	0.5937500000000000	-8.803124677744857	-8.808593750000000
11	0.6562500000000000	-9.103027059426882	-9.108593750000000
12	0.7187500000000000	-77.73043237154724	-9.377343750000000
13	0.7812500000000000	-78.71637495378655	-17.367187500000000
14	0.8437500000000000	-17.74393238486118	-17.054687500000000
15	0.9062500000000000	-16.66905441250875	-16.679687500000000
16	0.9687500000000000	107.9316622030501	-16.242187500000000

table 1-2

I	X	H(X)	EXACT
0	0.0000000000000000	-47.96876423567291	-48.00000000000000
1	0.0625000000000000	-47.87504474133488	-47.90625000000000
2	0.1250000000000000	-47.59388625832049	-47.62500000000000
3	0.1875000000000000	-47.12528878663013	-47.15625000000000
4	0.2500000000000000	234.1480184524233	-46.50000000000000
5	0.3125000000000000	9.241263313975469	9.246875000000000
6	0.3750000000000000	8.956980847816621	8.962499999999999
7	0.4375000000000000	162.1415041043650	8.646875000000000
8	0.5000000000000000	-153.7999479360352	-8.300000000000000
9	0.5625000000000000	-8.641458550211773	-8.646875000000000
10	0.6250000000000000	-8.956980847816503	-8.962500000000000
11	0.6875000000000000	-9.241263313975552	-9.246875000000000
12	0.7500000000000000	-138.2104899810773	-9.500000000000000
13	0.8125000000000000	-17.20794150495287	-17.218750000000000
14	0.8750000000000000	-16.86430333904650	-16.875000000000000
15	0.9375000000000000	-16.45818553024803	-16.468750000000000
16	1.0000000000000000	239.8438211783645	-16.000000000000000

table 2

n=32		H(x)	H(x)
1	0.0156250000000000	1737.331368161832	-15.67263648157728
2	0.0487500000000000	-7211.994174042081	47.01790942045342
3	0.0781250000000000	19110.64505076499	-172.3990010964042
4	0.1093750000000000	-71230.58610494999	642.5780947784444
5	0.1416250000000000	265811.6993720854	-2397.913377829815
6	0.1718750000000000	-992716.2113794717	8949.775416807210
7	0.2041250000000000	3702253.146137998	-33398.38428943274
8	0.2343750000000000	-7525540.373164557	26340.47774101518
9	0.2656250000000000	7525540.346509026	-26340.47732527111
10	0.2968750000000000	-3702253.012870617	-33398.38704199150
11	0.3281250000000000	992015.7049744930	8949.70842618813
12	0.3593750000000000	-265809.8070273368	-2397.896328519852
13	0.3916250000000000	71223.52313348831	642.5144717026910
14	0.4218750000000000	-19084.28550511840	-172.1615587478812
15	0.4531250000000000	5113.618887850606	46.13176374283208
16	0.4843750000000000	-1370.190050184564	-12.36549641066904
17	0.5156250000000000	367.1413164478471	3.330221856332389
18	0.5468750000000000	-98.37521759779953	-0.9553910654776311
19	0.5781250000000000	26.35955794204034	0.4913429029417491
20	0.6093750000000000	-7.063720585994520	-1.0099814825033683
21	0.6416250000000000	1.892529108613402	3.548583955713464
22	0.6718750000000000	-0.5070995612876068	-13.18435485838989
23	0.7031250000000000	0.1358748667007297	49.18883555523795
24	0.7343750000000000	-0.36405996457958611-01	-183.5709872337707
25	0.7656250000000000	0.97539108171413711-02	685.0951133489710
26	0.7968750000000000	-0.26131433069797611-02	-2556.809466340206
27	0.8281250000000000	0.70044189650110621-03	9542.142752269943
28	0.8593750000000000	-0.18881291945394751-03	-35611.76154301333
29	0.8906250000000000	0.52385023117685121-04	132904.9034200311
30	0.9218750000000000	-0.15377476604700921-04	-496007.8521371457
31	0.9531250000000000	0.45961956928707701-05	1851126.505128365
32	0.9843750000000000	-0.15603266668762731-05	-3762770.168376140

table 3

table 4

n=32		H(x)	H(x)
1	0.0156250000000000	-5320.789388577130	0.7346548343451994
2	0.0487500000000000	602.3681658188463	-2.203964502794056
3	0.0781250000000000	-160.6832750314668	81.081203175795061
4	0.1093750000000000	40.3693485095298	-30.12084819366994
5	0.1416250000000000	-0.7764646523384775	112.4021895866656
6	0.1718750000000000	-37.25907650692216	-419.487901629632
7	0.2041250000000000	149.8127711529787	1565.549451066830
8	0.2343750000000000	-1329.99208470973	-7378.709894111641
9	0.2656250000000000	1330.155263027047	-7378.709874611498
10	0.2968750000000000	-150.6290439310428	1565.549392549365
11	0.3281250000000000	40.36791286461515	-419.4876955759186
12	0.3593750000000000	-10.81460727809973	112.4013697424186
13	0.3916250000000000	2.897515359593233	-30.11786338993511
14	0.4218750000000000	-0.7754527510928088	8.070063830865188
15	0.4531250000000000	0.2042944050369363	-2.162391959670990
16	0.4843750000000000	-0.41724471191795631-01	0.5795040293844125
17	0.5156250000000000	-0.37396311306514031-01	-0.15562461613120094
18	0.5468750000000000	0.1913798708583602	0.42992608404213021-01
19	0.5781250000000000	-0.7278446259004288	-0.1634627229977340-01
20	0.6093750000000000	2.72077128650161	0.22392525881736561-01
21	0.6416250000000000	-10.15244307999565	-0.7322385471847000-01
22	0.6718750000000000	37.88970240823755	0.2705029037625085
23	0.7031250000000000	-141.4063667771646	-1.008787745947038
24	0.7343750000000000	527.7357644637512	3.764648053510718
25	0.7656250000000000	-1969.536691115091	-14.04980445154437
26	0.7968750000000000	7350.411000511588	52.43456975295457
27	0.8281250000000000	-27432.10731153547	-195.6884745731474
28	0.8593750000000000	102378.0182462105	730.3193285601903
29	0.8906250000000000	-382079.9656738614	-2725.58839681962
30	0.9218750000000000	1425941.844449276	10172.03603016352
31	0.9531250000000000	-5321687.412122683	-37962.55528095704
32	0.9843750000000000	10815303.80404093	335214.1850936532

table 5

table 6

n=32

F	X	H(X)
1	0.15625	42156917.1332212
2	0.166875	-7493036.1030343
3	0.178125	161299.105826370
4	0.190375	-37.107284652338
5	0.14625	856348.12780372
6	0.171875	-195785416.18159
7	0.203125	394673142.25970
8	0.253375	-5576475231.06299
9	0.265625	55764554.7393351
10	0.296875	-3446657295.37945
11	0.325125	19576623143.85383
12	0.353375	-855913.014451653
13	0.39625	36994352.070469
14	0.421875	-1584472682.167458
15	0.453125	644398145.559152
16	0.484375	-2946854.57171284
17	0.515625	126886275.3441425
18	0.546875	-54634225.5131584
19	0.578125	235237.22756363
20	0.609375	-1128715.05679099
21	0.640625	4361168.103638525
22	0.671875	-1877807.9702456
23	0.703125	88535.6951811832
24	0.734375	-348132.716286473
25	0.765625	149893.096627694
26	0.796875	-64537.4054441448
27	0.828125	27785.4034441337
28	0.859375	-11962.1715459658
29	0.890625	5155.77513954955
30	0.921875	-2241.27787816284
31	0.953125	123.401975751167
32	0.984375	-592.27172607071

table 7

F	X	H(X)
1	0.15625	-2621883.06131568
2	0.166875	490284.743896447
3	0.178125	-1031566.43867986
4	0.190375	23113237.54311274
5	0.203125	-53142214.57797416
6	0.215875	11945828.1568617
7	0.228625	-176124582.1460573
8	0.241375	94162149.30264316
9	0.254125	94169345.08535631
10	0.266875	-176119660.5330314
11	0.279625	11943509.8180801
12	0.292375	-53117495.09037051
13	0.305125	22956193.15467549
14	0.317875	-9899146.246355180
15	0.330625	4288764.554124361
16	0.343375	-1947695.584559539
17	0.356125	96322.7486476450
18	0.368875	-74451.1639966873
19	0.381625	1085209.08139063
20	0.394375	-2243583.636875068
21	0.407125	5091487.089591823
22	0.419875	-11773529.73248938
23	0.432625	27321617.64362457
24	0.445375	-6344225.56342919
25	0.458125	147343435.8283725
26	0.470875	-342198997.3907697
27	0.483625	79473543.9848818
28	0.496375	-1845671757.53795
29	0.509125	427955955.463910
30	0.521875	-978832697.254147
31	0.534625	19233252877.59507
32	0.547375	-2768225201.18659

table 8

F	X	H(X)
1	0.15625	-3325532.15247247
2	0.166875	1798831.00587991
3	0.178125	-5517104.30986180
4	0.190375	2555885.025194949
5	0.203125	-515.66.72979675
6	0.215875	-1158313.664951213
7	0.228625	427656.324337945
8	0.241375	-817991.512742978
9	0.254125	8235528.269704770
10	0.266875	-4485395.365843220
11	0.279625	1677375.474392152
12	0.292375	-705379.3911696067
13	0.305125	289248.7152513449
14	0.317875	-91989.27223079961
15	0.330625	4288764.554124361
16	0.343375	-1947695.584559539
17	0.356125	96322.7486476450
18	0.368875	-74451.1639966873
19	0.381625	1085209.08139063
20	0.394375	-2243583.636875068
21	0.407125	5091487.089591823
22	0.419875	-11773529.73248938
23	0.432625	27321617.64362457
24	0.445375	-6344225.56342919
25	0.458125	147343435.8283725
26	0.470875	-342198997.3907697
27	0.483625	79473543.9848818
28	0.496375	-1845671757.53795
29	0.509125	427955955.463910
30	0.521875	-978832697.254147
31	0.534625	19233252877.59507
32	0.547375	-2768225201.18659

table 9

n=32

F	X	H(X)
1	0.15625	165891.4664990992
2	0.166875	-290815.9165168687
3	0.178125	634739.310375043
4	0.189375	-1456658.79620210
5	0.190625	3375655.042842713
6	0.171875	-7839960.866472811
7	0.203125	18284136.10798724
8	0.234375	-12803220.88764261
9	0.265625	-12803037.11741745
10	0.296875	18283814.14310309
11	0.328125	-7839258.11993375
12	0.359375	3374042.55148672
13	0.39625	-1452922.31218930
14	0.421875	626065.4808721241
15	0.453125	-270673.0305839035
16	0.484375	119111.0690790999
17	0.515625	-57245.73303907631
18	0.546875	38489.41395169998
19	0.578125	-48717.6320216237
20	0.609375	95632.6684868941
21	0.640625	-214563.801783296
22	0.671875	495071.9928332370
23	0.703125	-1148393.616757809
24	0.734375	2666512.206077443
25	0.765625	-6192646.83235027
26	0.796875	14382170.76678092
27	0.828125	-33402675.4332413
28	0.859375	77588594.6739509
29	0.890625	-180470674.8251179
30	0.921875	425477688.6562925
31	0.953125	-1135256151.145101
32	0.984375	208616420.495737

table 10

F	X	H(X)
1	0.15625	5175791.564250568
2	0.166875	-625204.8207496059
3	0.178125	700598.6990952287
4	0.189375	-30873.56362978963
5	0.190625	-1114.5.8521778662
6	0.171875	344494.7407928518
7	0.203125	-1001.72.246370914
8	0.234375	8187393.666764380
9	0.265625	-8189309.385418913
10	0.296875	1008361.819097752
11	0.328125	-362372.2816827758
12	0.359375	153432.5645390312
13	0.39625	-31767.05011430837
14	0.421875	61767.93387984767
15	0.453125	-20305.70236693527
16	0.484375	24135.77754963674
17	0.515625	-46142.04214736052
18	0.546875	102896.4805379962
19	0.578125	-237137.7145949203
20	0.609375	549955.5721220918
21	0.640625	-1276916.997297496
22	0.671875	2965459.447298429
23	0.703125	-6887138.263804957
24	0.734375	15995170.88852169
25	0.765625	-37148359.94319665
26	0.796875	86276221.85711330
27	0.828125	-200377314.0367745
28	0.859375	465441703.4666543
29	0.890625	-1082614969.210208
30	0.921875	2552370715.787762
31	0.953125	-681157621.488678
32	0.984375	1255786733.50885

table 11

F	X	H(X)
1	0.15625	-5660.091791525307
2	0.166875	9957.663029024398
3	0.178125	-21734.30864478976
4	0.189375	49881.02085924073
5	0.190625	-115657.2194598019
6	0.171875	269938.4762974592
7	0.203125	-665522.1572060846
8	0.234375	2437583.575599991
9	0.265625	-2437204.728722954
10	0.296875	659862.6799125159
11	0.328125	-268498.1631025129
12	0.359375	-112344.1367477066
13	0.39625	42208.37147217938
14	0.421875	-3912.108574781341
15	0.453125	-31440.11757133446
16	0.484375	90470.91110856257
17	0.515625	-217634.4173490927
18	0.546875	508692.0543176151
19	0.578125	-1182823.232149582
20	0.609375	2747679.765627468
21	0.640625	-6381674.152111442
22	0.671875	14821381.65005187
23	0.703125	-34422316.24722999
24	0.734375	79444947.73362934
25	0.765625	-185670087.2420315
26	0.796875	431214587.6245684
27	0.828125	-1001499832.582219
28	0.859375	2326310151.663742
29	0.890625	-5412984169.638559
30	0.921875	12756899470.36312
31	0.953125	-34336995157.99233
32	0.984375	62416948926.85266

table 12

I	X	H(X)	EXACT	ERROR (ABS.)
1	0.015625	-1.4999999999999991	-1.999999999999999	-0.50000000000000079
2	0.046875	-1.9999999999999992	-1.999999999999999	-0.75495165674510640-14
3	0.078125	-2.0000000000000004	-1.999999999999999	0.44408920985006260-14
4	0.109375	-1.9999999999999993	-1.999999999999999	-0.64392935428259070-14
5	0.140625	-2.0000000000000000	-1.999999999999999	0.88817841970012520-15
6	0.171875	-1.9999999999999994	-1.999999999999999	-0.53290705182007510-14
7	0.203125	-2.0000000000000002	-1.999999999999999	0.31086244689504380-14
8	0.234375	-1.8750000000000002	-1.999999999999999	-0.12499999999999977
9	0.265625	-1.1250000000000029	-0.9999999999999990	0.12500000000000297
10	0.296875	-1.0000000000000026	-0.9999999999999990	0.27089441800853810-13
11	0.328125	-0.9999999999999293	-0.9999999999999990	-0.70665695517391210-13
12	0.359375	-1.0000000000000063	-0.9999999999999990	0.63948846218409010-13
13	0.390625	-0.999999999999942	-0.9999999999999990	-0.57176485768195560-14
14	0.421875	-0.999999999999966	-0.9999999999999990	-0.53373971908854390-13
15	0.453125	-1.0000000000000010	-0.9999999999999990	0.10436096431476470-13
16	0.484375	-1.000000000000088	-0.9999999999999990	0.88817841970012520-13
17	0.515625	-0.9999999999998811	-0.9999999999999990	-0.11879386363489170-12
18	0.546875	-1.000000000000008	-0.9999999999999990	0.84376949871511890-14
19	0.578125	-1.0000000000000100	-0.9999999999999990	0.10036416142611410-12
20	0.609375	-0.9999999999999777	-0.9999999999999990	-0.22232216068118750-13
21	0.640625	-0.9999999999999143	-0.9999999999999990	-0.85653706349830820-13
22	0.671875	-1.0000000000000086	-0.9999999999999990	0.86375351315837170-13
23	0.703125	-1.0000000000000099	-0.9999999999999990	0.95479180117763460-14
24	0.734375	-1.0000000000000074	-0.9999999999999990	0.74606987254810510-13
25	0.765625	-0.9999999999998315	-0.9999999999999990	-0.16839307726002050-12
26	0.796875	-1.0000000000000074	-0.9999999999999990	0.74829031859735550-13
27	0.828125	-0.9999999999998748	-0.9999999999999990	-0.12514989045087070-12
28	0.859375	-1.0000000000000167	-0.9999999999999990	0.16808776592824860-12
29	0.890625	-0.9999999999997920	-0.9999999999999990	-0.20791701693667610-12
30	0.921875	-0.999999999999943	-0.9999999999999990	-0.56621374255882980-14
31	0.953125	-1.0000000000000158	-0.9999999999999990	0.15831780331154730-12
32	0.984375	1471.2500000000000	-0.9999999999999990	-1472.2500000000000

table 13

n=32				
I	X	H(X)	EXACT	ERROR (ABS.)
1	0.015625	-2.5312499999999998	-2.531249999999999	-0.88817841970012520-15
2	0.046875	-7.5937500000000014	-7.593749999999999	0.15099033134902120-13
3	0.078125	-12.656249999999997	-12.656249999999999	-0.18207657603852560-13
4	0.109375	-17.718749999999993	-17.718749999999999	-0.63948846218409010-13
5	0.140625	-22.781249999999991	-22.781249999999999	0.17763568394002500-13
6	0.171875	-27.843749999999996	-27.843749999999999	-0.35527136788005000-13
7	0.203125	-32.906250000000009	-32.906249999999999	0.92370555648813020-13
8	0.234375	-37.968749999999976	-37.968749999999999	-0.25000000000002344
9	0.265625	-36.781250000000007	-37.031249999999999	-0.2499999999999218
10	0.296875	-30.093749999999999	-30.093749999999999	0.00000000000000000000
11	0.328125	-23.156249999999997	-23.156249999999999	-0.21316282072803000-13
12	0.359375	-16.218749999999973	-16.218749999999999	-0.26645352591003750-12
13	0.390625	-9.2812500000000240	-9.281249999999999	0.24114044094858390-12
14	0.421875	-2.343749999999964	-2.3437500000000000	-0.35083047578154940-13
15	0.453125	4.593749999999924	4.593749999999999	0.75495165674510640-13
16	0.484375	11.531249999999990	11.531249999999999	0.90594198809412770-13
17	0.515625	18.468750000000016	18.468749999999999	-0.16697754290362350-12
18	0.546875	25.406249999999994	25.406249999999999	0.49737991503207010-13
19	0.578125	32.343749999999977	32.343749999999999	0.22026824808563100-12
20	0.609375	39.281250000000022	39.281249999999999	-0.22737367544323200-12
21	0.640625	46.218749999999990	46.218749999999999	0.92370555648813020-13
22	0.671875	53.156249999999990	53.156249999999999	0.92370555648813020-13
23	0.703125	60.093750000000007	60.093749999999999	-0.78159700933611020-13
24	0.734375	67.031249999999986	67.031249999999999	0.12789769243681800-12
25	0.765625	73.968750000000013	73.968749999999999	-0.13500311979441900-12
26	0.796875	80.906249999999982	80.906249999999999	0.17053025658242400-12
27	0.828125	87.843749999999991	87.843749999999999	0.85265128291212020-13
28	0.859375	94.781250000000020	94.781249999999999	-0.20605739337042900-12
29	0.890625	101.71874999999998	101.718749999999999	0.11368683772161600-12
30	0.921875	108.65624999999999	108.656249999999999	0.71054273576010010-13
31	0.953125	115.59374999999999	115.593749999999999	0.63948846218409010-13
32	0.984375	91.031250000000011	122.531249999999999	31.499999999999988

table 14



1	0.0156250000000000	3326.069922547172	17	(.51562500000000000000	-1486.596663762598
2	0.0468750000000000	124.5605184822797	19	1.54687500000000000000	-712.5705575166967
3	0.0781250000000000	-1356.928101627163	1	0.57812500000000000000	1078.854420066121
4	0.1093750000000000	309.742374977875	20	0.60937500000000000000	-426.8039472356750
5	0.1406250000000000	832.8249657314019	21	0.64062500000000000000	736.6743554871212
6	0.1718750000000000	-161.1014902021756	22	0.67187500000000000000	4.567746133511921
7	0.2031250000000000	227.5117129775940	23	0.70312500000000000000	-1597.20199920831
8	0.2343750000000000	-532.519519675524	24	0.73437500000000000000	917.0774975431972
9	0.2656250000000000	-917.116609137306	25	0.76562500000000000000	532.53531984537628
10	0.2968750000000000	1597.243627810404	26	0.79687500000000000000	-227.6255046447390
11	0.3281250000000000	-4.59381490352217	27	0.82812500000000000000	161.1917992203042
12	0.3593750000000000	-734.6767576686400	28	0.85937500000000000000	-632.7865397138677
13	0.3906250000000000	426.7078685866211	29	0.89062500000000000000	-309.7230307627963
14	0.4218750000000000	-1076.77238445125	30	0.92187500000000000000	1356.876256165025
15	0.4531250000000000	712.607318171444	1	0.95312500000000000000	124.844146479057
16	0.4843750000000000	1466.582301274736	12	0.98437500000000000000	-3325.908663002601

table 15

1	0.0166666666666666	-0.5427206334131520-15	0.3806087508708360-01	0.7958213400405181
2	0.0500000000000000	0.6263930795748830-15	-0.1651209140512823	1.906615043982635
3	0.0833333333333333	-0.10807603818174310-14	0.5381334650080578	-5.949691814441546
4	0.1166666666666666	0.1959917234635490-14	-1.687457398564390	18.3853039259086
5	0.1499999999999999	-0.152493304959050-14	5.312502501833199	-58.23285140104934
6	0.1833333333333333	0.1524931030564830-14	-16.806614797554523	187.2149967819480
7	0.2166666666666666	-0.17428562744667900-14	50.14484472749917	-777.7030784062605
8	0.2499999999999999	14.999999999999999	0.13943471261576940-12	1277.442320679785
9	0.2833333333333333	0.10314969723884310-13	-58.14484472749935	-778.7030784062602
10	0.3166666666666666	-0.65364166386753640-15	16.806614797554528	187.2149967819476
11	0.3499999999999999	-0.17703247723965800-15	-5.312502501833221	-58.23285140104910
12	0.3833333333333333	0.0854616947514343-15	1.687457398564337	15.3853039259066
13	0.4166666666666666	-0.7782554182121845-15	-0.5381334650080495	-5.949691814441400
14	0.4499999999999999	0.79308258037189380-15	0.1651209140512793	1.906615043982600
15	0.4833333333333333	-0.31324054909084990-15	-0.38060875087081280-01	-0.7958213400405222
16	0.5166666666666666	0.6537365490913950-15	0.1651209140512789	1.908815043982529
17	0.5499999999999999	-0.9806342178326550-15	-0.5381334650080326	-5.949691814441184
18	0.5833333333333333	0.87170610291093860-15	1.667457398864368	-18.3853039259030
19	0.6166666666666666	-0.87174526399913070-15	-5.312502501833210	58.23285140104899
20	0.6499999999999999	0.10897462725456680-15	16.806614797554524	-187.2149967819481
21	0.6833333333333333	-0.5340199654089030-14	-58.14484472749916	778.7030784062608
22	0.7166666666666666	0.5231862833267403-14	-0.16570656255092330-12	-1277.442320679785
23	0.7499999999999999	-14.999999999999999	58.14484472749936	778.7030784062594
24	0.7833333333333333	0.1845459641241680-13	-16.806614797554528	-187.2149967819467
25	0.8166666666666666	0.58336531812348340-14	5.312502501833216	58.23285140104814
26	0.8499999999999999	-0.79808342849922113-14	-1.687457398864365	-18.3853039258987
27	0.8833333333333333	0.4238177342152830-14	0.5381334650080281	5.949691814440999
28	0.9166666666666666	-0.70549525452003140-15	-0.1651209140512686	-1.908815043982480
29	0.9499999999999999	0.80323906257349780-15	0.38060875087080140-01	0.7958213400405047
30	0.9833333333333333	-0.3486229836951410-15		

table 16

1	0.0166666666666666	-0.5427206334131520-15	0.3806087508708360-01	0.7958213400405181
2	0.0500000000000000	0.6263930795748830-15	-0.1651209140512823	1.906615043982635
3	0.0833333333333333	-0.10807603818174310-14	0.5381334650080578	-5.949691814441546
4	0.1166666666666666	0.1959917234635490-14	-1.687457398564390	18.3853039259086
5	0.1499999999999999	-0.152493304959050-14	5.312502501833199	-58.23285140104934
6	0.1833333333333333	0.1524931030564830-14	-16.806614797554523	187.2149967819480
7	0.2166666666666666	-0.17428562744667900-14	50.14484472749917	-777.7030784062605
8	0.2499999999999999	14.999999999999999	0.13943471261576940-12	1277.442320679785
9	0.2833333333333333	0.10314969723884310-13	-58.14484472749935	-778.7030784062602
10	0.3166666666666666	-0.65364166386753640-15	16.806614797554528	187.2149967819476
11	0.3499999999999999	-0.17703247723965800-15	-5.312502501833221	-58.23285140104910
12	0.3833333333333333	0.0854616947514343-15	1.687457398564337	15.3853039259066
13	0.4166666666666666	-0.7782554182121845-15	-0.5381334650080495	-5.949691814441400
14	0.4499999999999999	0.79308258037189380-15	0.1651209140512793	1.906615043982600
15	0.4833333333333333	-0.31324054909084990-15	-0.38060875087081280-01	-0.7958213400405222
16	0.5166666666666666	0.6537365490913950-15	0.1651209140512789	1.908815043982529
17	0.5499999999999999	-0.9806342178326550-15	-0.5381334650080326	-5.949691814441184
18	0.5833333333333333	0.87170610291093860-15	1.667457398864368	-18.3853039259030
19	0.6166666666666666	-0.87174526399913070-15	-5.312502501833210	58.23285140104899
20	0.6499999999999999	0.10897462725456680-15	16.806614797554524	-187.2149967819481
21	0.6833333333333333	-0.5340199654089030-14	-58.14484472749916	778.7030784062608
22	0.7166666666666666	0.5231862833267403-14	-0.16570656255092330-12	-1277.442320679785
23	0.7499999999999999	-14.999999999999999	58.14484472749936	778.7030784062594
24	0.7833333333333333	0.1845459641241680-13	-16.806614797554528	-187.2149967819467
25	0.8166666666666666	0.58336531812348340-14	5.312502501833216	58.23285140104814
26	0.8499999999999999	-0.79808342849922113-14	-1.687457398864365	-18.3853039258987
27	0.8833333333333333	0.4238177342152830-14	0.5381334650080281	5.949691814440999
28	0.9166666666666666	-0.70549525452003140-15	-0.1651209140512686	-1.908815043982480
29	0.9499999999999999	0.80323906257349780-15	0.38060875087080140-01	0.7958213400405047
30	0.9833333333333333	-0.3486229836951410-15		

table 18

table 17

n=32				
I	X	H(X)	EXACT	ERROR (ABS.)
1	0.015625	16.78145821478244	20.36774193604165	3.586273721259211
2	0.046875	7.400604980209596	6.778344621176215	-0.6222693590333810
3	0.078125	4.170157298472277	4.055892901838455	-0.1162643966338222
4	0.109375	2.92251573655872	2.881571002559405	-0.4094557109646746D-01
5	0.140625	2.245603086065701	2.226601112207206	-0.1900497385849564D-01
6	0.171875	1.817103279697331	1.806767840653714	-0.1033743904361684D-01
7	0.203125	1.519754179725762	1.515521602158887	-0.6236577566875123D-02
8	0.234375	1.300247068369546	1.296201256869336	-0.4047809500509203D-02
9	0.265625	1.130755781986870	1.127981925964580	-0.2773856022290522D-02
10	0.296875	0.9953115880375711	0.9933293961716828	-0.1982191865888383D-02
11	0.328125	0.8840877611093964	0.8825234350470960	-0.1464326062300417D-02
12	0.359375	0.7906975312865817	0.7895862839801048	-0.1111247306476854D-02
13	0.390625	0.7108076025210023	0.7099454517470464	-0.8621507739558915D-03
14	0.421875	0.6413720735571770	0.6406907900182775	-0.6812835388994437D-03
15	0.453125	0.5801856331961451	0.5796389536667175	-0.5466795294275101D-03
16	0.484375	0.5256107552821064	0.5251664231199301	-0.4443321621762780D-03
17	0.515625	0.4764045939584277	0.4760395733504628	-0.3650206079649221D-03
18	0.546875	0.4316054699002464	0.4313029661283701	-0.3025037718763363D-03
19	0.578125	0.3904562827323169	0.3902038298269719	-0.2524529053449659D-03
20	0.609375	0.3523515299881683	0.3521397304325222	-0.2117995556461250D-03
21	0.640625	0.3167958335420769	0.3166215080887846	-0.1783254532922995D-03
22	0.671875	0.2833968991472647	0.2832465013651722	-0.1503977820924846D-03
23	0.703125	0.2518056441534475	0.2516788498996473	-0.1267942538002581D-03
24	0.734375	0.2217413419804581	0.2216347569454323	-0.1065850350258357D-03
25	0.765625	0.1929603345996685	0.1928712831355608	-0.8905146410768949D-04
26	0.796875	0.165253177093992	0.1651776886721671	-0.7362903773207026D-04
27	0.828125	0.138425017530580	0.1383686350702073	-0.5986668285067054D-04
28	0.859375	0.1123261517760333	0.1122787546585648	-0.4739711746858111D-04
29	0.890625	0.867944489458570D-01	0.8675323006892808D-01	-0.3591482565762361D-04
30	0.921875	0.616947737754317D-01	0.6166911806836952D-01	-0.2515930917365052D-04
31	0.953125	0.368971773090299D-01	0.3688221576122477D-01	-0.1491096967821565D-04
32	0.984375	0.1227924650426120D-01	0.1227431105446283D-01	-0.4935449798368872D-05

table 19

I	X	H(X)	EXACT	ERROR (ABS.)
1	0.015625	10.17518925177400	10.17773381249359	0.2044550719581871D-02
2	0.046875	3.370049075479661	3.370726202707493	0.6771272278325301D-03
3	0.078125	1.995709035020083	1.996111891585041	0.4009882829583144D-03
4	0.109375	1.39715668721612	1.397406386245238	0.2807175236259062D-03
5	0.140625	1.056988112975955	1.057161178774320	0.2123674767640082D-03
6	0.171875	0.834030245751856	0.8341996027917535	0.1675779136478816D-03
7	0.203125	0.674035259303895	0.6741719567433600	0.1354308124704161D-03
8	0.234375	0.5515518683265809	0.5516649878667378	0.1108210401868786D-03
9	0.265625	0.453085488826496	0.4531735845095735	0.9103562692451549D-04
10	0.296875	0.370757809226262	0.3708252731360176	0.7449311339741137D-04
11	0.328125	0.2995232640215738	0.2996884668409618	0.6020281938798332D-04
12	0.359375	0.236438822587019	0.2364823879456599	0.4750568695803536D-04
13	0.390625	0.178869218147647	0.1789028606572620	0.3593884249726563D-04
14	0.421875	0.125213206002214	0.1252434800956527	0.2515949543130390D-04
15	0.453125	0.7415379455606646D-01	0.7416799376917370D-01	0.1489921310725283D-04
16	0.484375	0.2455849046918018D-01	0.2456342488473368D-01	0.4934415553496635D-05
17	0.515625	-0.2455849046918023D-01	-0.2456342488473362D-01	-0.4934415553385613D-05
18	0.546875	-0.7415379455606593D-01	-0.7416799376917360D-01	-0.1489921310773655D-04
19	0.578125	-0.125213206002219	-0.125243480095626	-0.251594954072104D-04
20	0.609375	-0.178869218147641	-0.1789028606572619	-0.3593884249780687D-04
21	0.640625	-0.236438822587023	-0.2364823879456599	-0.4750568695752188D-04
22	0.671875	-0.2995232640215759	-0.2996884668409617	-0.6020281938785842D-04
23	0.703125	-0.370757809226204	-0.3708252731360176	-0.7449311339716157D-04
24	0.734375	-0.4530825488926491	-0.4531735845095733	-0.9103562692425182D-04
25	0.765625	-0.5515541688265509	-0.5516649878667378	-0.1108210401868674D-03
26	0.796875	-0.674035259403897	-0.6741719567433602	-0.135430812469447D-03
27	0.828125	-0.834030245781092	-0.8341996027917534	-0.1675779136501853D-03
28	0.859375	-1.056948811297561	-1.057161178774320	-0.2123674767589011D-03
29	0.890625	-1.397125663721606	-1.397406386245237	-0.2807175236310132D-03
30	0.921875	-1.995710903502091	-1.996111891885042	-0.4009882829512089D-03
31	0.953125	-3.370049075479659	-3.370726202707492	-0.6771272278334183D-03
32	0.984375	-10.17518925177402	-10.17773381249360	-0.2044550719574988D-02

table 20

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0142857142857143	0.2506948534502686	0.2505042281878168
2	0.0428571428571429	0.2547699197175119	0.2545872989791897
3	0.0714285714285714	0.2632454042028133	0.2630237709004217
4	0.0999999999999999	0.2765344742107287	0.2763932022500209
5	0.1285714285714285	0.2960663469295542	0.2956720735920432
6	0.1571428571428571	0.3221674098419683	0.3223940764471994
7	0.1857142857142857	0.3604321177456303	0.3589310950186984
8	0.2142857142857142	0.4059874697560220	0.4089909514938964
9	0.2428571428571429	0.4876646741305014	0.4785307969761674
10	0.2714285714285714	0.5544903469534709	0.5775227671137245
11	0.2999999999999999	0.7865459170569359	0.7236067977499789
12	0.3285714285714285	0.7845016107385745	0.9503330524849029
13	0.3571428571428571	1.772398677220789	1.327985277605681
14	0.3857142857142856	0.8424569897240144	2.024877367989037
15	0.4142857142857142	6.710444214156844	3.532290629821093
16	0.4428571428571428	-1.068467734784274	7.041276337339169
17	0.4714285714285714	65.69086869220190	31.11308027605091
18	0.4999999999999999	-158.0336571465145	0.66577344702839280
19	0.5285714285714285	65.69086869220188	31.11308027605100
20	0.5571428571428571	-1.068467734764405	7.841276337334180
21	0.5857142857142856	6.710449+214157019	3.532290629821096
22	0.6142857142857142	0.8424569897238607	2.024877367989038
23	0.6428571428571428	1.772398677220875	1.327985277605682
24	0.6714285714285714	0.7845016107385363	0.9503330524849033
25	0.6999999999999999	0.7865459170569509	0.7236067977499791
26	0.7285714285714285	0.5544903469584834	0.5775227671137246
27	0.7571428571428571	0.4876646741004990	0.4785307969761675
28	0.7857142857142856	0.4059874697560256	0.4089909514938964
29	0.8142857142857142	0.3604321177488272	0.3589310950186985
30	0.8428571428571428	0.3221674098419721	0.3223940764471994
31	0.8714285714285714	0.2960663469295521	0.2956720735920433
32	0.8999999999999999	0.2765344742107280	0.2763932022500210
33	0.9285714285714285	0.2632454042028163	0.2630237709004217
34	0.9571428571428571	0.2547699197175078	0.2545872989791897
35	0.9857142857142856	0.2506948534502766	0.2505042281878168

table 21

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0142857142857143	-0.1335978759145468	0.1260099818520260
2	0.0428571428571429	-0.1196270765102311	0.1343008578299263
3	0.0714285714285714	-0.1395228860135119	0.1520652534516435
4	0.0999999999999999	-0.42856691014347810-01	0.1819660112501051
5	0.1285714285714285	-0.2276973042277730	0.2288597770212687
6	0.1571428571428571	0.3871641941555206	0.3012335667222565
7	0.1857142857142857	-1.048666692389973	0.4140580908092333
8	0.2142857142857142	3.120264476054476	0.5944506389293999
9	0.2428571428571428	-7.345841355749013	0.8954195449517084
10	0.2714285714285714	21.70220785892563	1.423672512094435
11	0.2999999999999999	-53.80107024993971	2.418033988749894
12	0.3285714285714285	151.6092011470780	4.468464411386737
13	0.3571428571428571	-386.3627840131483	9.253284107618952
14	0.3857142857142856	1073.067579745055	22.57589276437623
15	0.4142857142857142	-2749.525556158890	71.33017193131029
16	0.4428571428571428	8150.531834160925	361.0724112537518
17	0.4714285714285714	-20258.59864396343	5777.029505307879
18	0.4999999999999999	28177.56598443316	0.26679209779727500
19	0.5285714285714285	-20258.59864396344	5777.029505307911
20	0.5571428571428571	8150.531834160958	361.0724112537528
21	0.5857142857142856	-2749.525556158926	71.33017193131040
22	0.6142857142857142	1073.067579745080	22.57589276437626
23	0.6428571428571428	-386.3627840131646	9.253284107618963
24	0.6714285714285714	151.6092011470856	4.468464411386741
25	0.6999999999999999	-53.80107024994343	2.418033988749896
26	0.7285714285714285	21.70220785892714	1.423672512094435
27	0.7571428571428571	-7.345841355748925	0.8954195449517090
28	0.7857142857142856	3.120264476053919	0.5944506389294002
29	0.8142857142857142	-1.048666692389211	0.4140580908092334
30	0.8428571428571428	0.3871641940543687	0.3012335667222566
31	0.8714285714285714	-0.2276973042267200	0.2288597770212688
32	0.8999999999999999	-0.42856691016573740-01	0.1819660112501051
33	0.9285714285714285	-0.1395228860540207	0.1520652534516435
34	0.9571428571428571	-0.1196270765493881	0.1343008578299263
35	0.9857142857142856	-0.1335978759152272	0.1260099818520260

table 22