数理解析研究所講究録
374巻 1980年 108-117

ホモロジー次元1のイデアルの構造定理と2次元正規半群

名大・理 渡辺純三

$R=k[X,Y]$ を体 k 上の2変数多項式環とする。初めに R の単項式イデアルの射影分解を考察する。(単項式イデアルとは，単項式によって生成されるイデアルである。)

$\mathfrak{a}\subset R$ を単項式イデアル，

$f_i = X^{\lambda_i}Y^{\mu_i}$, $i=1,2,\ldots,n+1$ を $\mathfrak{a}$ の生成元とすれば，指数 λ_i, μ_i の間に，

$$(*)\quad\begin{cases}\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_{n+1}\\ \mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_{n+1}\end{cases}$$

を仮定して一般性を失なわない。

今，$r_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}$, $s_i=\mu_{i+1}-\mu_i$, $i=1,2,\ldots,n$ とおけば $R/\mathfrak{a}$ の射影分解は次の形をとる:

$$(L) \quad 0 \to R^n \xrightarrow[\mathbb{M}]{} R^{n+1} \xrightarrow[\mathbb{F}]{} R \to R/\mathfrak{a}$$

ここに、

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} -Y^{s_1} & X^{r_1} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -Y^{s_2} & X^{r_2} & & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & \\ 0 & & \cdots & & -Y^{s_n} & X^{r_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \\ f_{n+1} \end{bmatrix}。$$

以下、(L) を $R/\mathfrak{a}$ の射影分解の標準形と呼ぶ。勿論 この射影分解は極小であり、$n \neq 0$ なら $\mathrm{hd}_R\, R/\mathfrak{a} = 2$ である。

次に、Z を新しい変数として、$A = R[Z] = k[X, Y, Z]$、$\varphi: R \to A$ を $X \mapsto XZ$, $Y \mapsto YZ$ で定義する。

φ は Hochster [2] の用語で、pure と呼ばれる写象のクラスに属する。特に、R のイデアル $\mathfrak{a}$ について、$\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a})A) = \mathfrak{a}$ が成り立つから、φ はイデアルの生成元の最小個数を保つ。即ち $\mu_R(\mathfrak{a}) = \mu_A(\varphi(\mathfrak{a})A)$。（安全のため $\mathfrak{a} \subset R$ を斉次イデアルとしておく。でなければ、μ は確実な意味を持たないかも知れない。）

従って, $\mathfrak{a}\subset R$ が主イデアルでなければ, $hd_A\, A/\varphi(\mathfrak{a})A$ は, 2又は3となるが, 次の定理は ── 少し意外だが ── $hd=2$ となる場合は, 単項式イデアルについてだけでも少ない事を示す。

定理1. $\mathfrak{a}=(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})\subset R$ を単項式イデアルとする。f_i の指数は, 初めに注意した条件(*)を満たすとする。この時, $hd_A\, A/\varphi(\mathfrak{a})A=2$ のための必要十分条件は, ある番号 i_0 について $\deg f_{i_0} < \deg f_{i_0+1}$ なら, すべての $i>i_0$ について, $\deg f_i \leqslant \deg f_{i+1}$ が成り立つことである。(この条件は $i\longmapsto \deg f_i$ のグラフに極大がないと表現し得るだろう。)

初めに与えた $R/\mathfrak{a}$ の射影分解を考えれば容易にわかる通り, $Y^{s_i} f_i = X^{r_i} f_{i+1}$, 従って

$s_i+\deg f_i = r_i+\deg f_{i+1}$, 故に, 定理1の条件は

$$\exists i_0 \text{ について } s_{i_0}>r_{i_0} \Longrightarrow s_i \geq r_i \quad \forall i>i_0$$

と, 置き換えることが出来る。よって次の系を得る。

系　　$\mathrm{hd}_A A/\varphi(r)A = 2$ のための1つの十分条件は $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$, $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$ である。

定理1の証明には, Buchsbaum-Eisenbud による定理（[1] Theorem）を使うが, 詳しいことは省略する。定理1そのものよりは, その証明の方が Buchsbaum-Eisenbud の定理の強力かつ有用性を示すという意味に於いて面白い。

さて, 今度は, $k=\bar{k}$, $\mathrm{ch}\, k = 0$ として, 対角化された有限アーベル群 $G \subset GL(2,k)$ の $R = k[X, Y]$ への作用を考えよう。

R^G で不変式部分環を, $(R_+^G)R = \mathfrak{a}$ で不変式すべてが生成する R のイデアルを表わせば, $\mathfrak{a}$ は単項式イデアルであり, $\mathfrak{a} = (f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})$, 但し, f_i は単項式, とすれば, $R^G = k[f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}]$ となる。

この場合の $\mathfrak{a}$ の射影分解を記述するために, 有限数列 $\Phi(p, r)$ を次の通り定義する。

定義　　有限数列 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ を形式的に $r_1 \oplus r_2 \oplus \cdots \oplus r_n$ と書く。

2つの自然数 $p \geq r > 0$ に対して、数列 $\text{亜}(p, r)$ を帰納的に

(i)　$p = r$ の時，　$\text{亜}(p, r) = r$

(ii)　$p > r$ の時，　$\text{亜}(p, r) = r \oplus \text{亜}(p', r')$,

$$p' = p - r$$

$$r' \equiv r \mod p', \; 0 < r' \leq p'$$

によって定義する。容易にわかる事だが，$\text{亜}(p, r)$ は単調減少である。即ち，$\text{亜}(p, r) = r_1 \oplus r_2 \oplus \cdots \oplus r_n$ なら，$r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$ である。又明らかに $\sum r_i = p$ である。

R^G を $R = k[X, Y]$ の有限アーベル群による不変式部分環，$\mathfrak{a} = (R^G_+)R$ とする。この時，r_i, s_i を $R/\mathfrak{a}$ の射影分解の標準形に現われる，X 及び Y の指数（第1頁参照）とすれば，適当な $p \geq r > 0$ と $q \geq s > 0$ について，

$$r_1 \oplus r_2 \oplus \cdots \oplus r_n = \text{亜}(p, r)$$

$$s_m \oplus s_{m-1} \oplus \cdots \oplus s_1 = \text{亜}(q, s) \qquad \text{となる。}$$

（逆向きの順序に注意）

G が鏡像変換を含まなければ，G は巡回群であり，その生成元を $\begin{bmatrix}\omega_1 & \\ & \omega_2\end{bmatrix}$ とすれば，ω_i は両方供 1の原始 p 乗根である。但し，$p = o(G)$。よって $\omega_2 = \omega_1{}^r$，$\omega_1 = \omega_2{}^s$ とする s 及び r が存在するが，$0 < r < p$，$0 < s < p$ にとれば，

$$r_1 \oplus \cdots \oplus r_m = \Phi(p, r)$$
$$s_m \oplus \cdots \oplus s_1 = \Phi(p, s)$$

である。

定理1の系及び $\Phi(p, r)$ の単調減少性から，次の命題を直ちに得る。

命題　R^G を有限アーベル群による R の不変式環とする。$\varphi : R \to R[Z]$ を以前同様 $X \mapsto XZ$，$Y \mapsto YZ$，$(R^G_+)R = \mathfrak{a}$ とすれば，

$$\mathrm{hd}_A\, A/\varphi(\mathfrak{a})A = 2$$

である。

この命題から次の定理が従う。

定理2.　$T = GL(1, k)$ が $A = k[X, Y, Z]$ に

作用しているとする。(証明を簡単にするため、$k=\bar{k}$, $\mathrm{ch}\,k=0$ とする。) この時、$\dim A^T=2$ なら、

$$\mathrm{hd}_A\, A/(A^T_+)A = 2$$

である。

証明　$t\in T$ の A への作用を

$$\begin{bmatrix} t^a & & \\ & t^b & \\ & & t^{-p} \end{bmatrix}, \qquad a,\ b,\ p>0$$

と仮定して可い。(先ず作用を対角化する。指数の正負零の組合せが上記以外の場合は、それに帰着するか、又は、定理の主張が自明となる。)

次の図式を考えよう。

$$\begin{tikzcd}
 & B=k[U,V,W] & \\
A=k[X,Y,Z] \arrow[ur, "\alpha"] & & S=k[UW,VW] \arrow[ul, "\varphi"'] \\
 & A^T \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ここに、α は、$U=X^{\frac{1}{a}}$, $V=Y^{\frac{1}{b}}$, $W=Z^{\frac{1}{p}}$ とした

自然な埋め込みである。 T の A への作用は B に拡張されて，その作用は，$U \mapsto tU$，$V \mapsto tV$，$W \mapsto t^{-1}W$ となり，その不変式環が S である。一方，A は B の有限アーベル群による不変式環と見なされるから，$A^T \to S$ は，S の有限アーベル群による不変式環として得られる。目標である $\mathrm{hd}_A\, A/(A^T_+)A = 2$ を示すためには，$\mathrm{hd}_B\, B/(A^T_+)B = 2$ を示せば可い。（α は忠実に平坦であるから。）所が図式は可換だから，$(A^T_+)B$ を A^T_+ を S を経由して得たものと思えば，上記の命題を $B \supset S \supset A^T$ に適用して，$\mathrm{hd}_B\, B/(A^T_+)B = 2$ を直ちに得る。（証明終）

注意　$H \subset \mathbb{Z}^2_+$ を（加法的）半群とすれば，$k[H] = k[X^\lambda Y^\mu \mid (\lambda, \mu) \in H] \subset R = k[X, Y]$ として，半群環を得る。$k[H]$ が正規環の時，H を正規半群と呼ぶ。 2次元正規半群 H はすべて，適当なアーベル群 G によって $k[H] = R^G$ として得られる。

一方　$A = k[X, Y, Z]$ の1次元トーラス T による

不変式環 A^T も正規半群環であるから適当な R^G に同型である。実際，$T \ni t$ の A への作用を

$$\begin{bmatrix} t^a & & \\ & t^b & \\ & & t^{-p} \end{bmatrix} \qquad a,\ b,\ p > 0$$

とすれば，$G = \left\langle \begin{pmatrix} \omega^a & \\ & \omega^b \end{pmatrix} \right\rangle$，$\omega$ は1の原始 p 乗根として，$A^T \cong R^G$ となり，この同型は

$$A = k[X,\ Y,\ Z] \longrightarrow R = k[X,\ Y]$$
$$X \mapsto X,\ Y \mapsto Y,\ Z \mapsto 1$$

によって誘導される。つまり，A^T の生成元が

$$X^{\lambda_i} Y^{\mu_i} Z^{l_i},\quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

なら，$R^G = k[\, X^{\lambda_i} Y^{\mu_i} \mid i = 1, 2, \ldots, n+1 \,]$ である。

以前同様，$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{n+1}$

$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_{n+1}$ となる様に

番号を付けておけば，定理1の証明を再考する事によって，l_i の間の不等号の向きは $\geq$ から $\leq$ へ高々1度変わる，即ち，

$$\exists i_0 ;\quad l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_{i_0} \leq l_{i_0+1} \leq \cdots \leq l_{n+1}$$

ことがわかる。これが定理2の意味する所である。

（以上）

Bibliography

[1] D. Buchsbaum and D. Eisenbud. What makes a complex exact? Journal of Alg. 25 (1973), 259-268.

[2] M. Hochster and J. L. Roberts. Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. Advances in Math. 13 (1974), 115-175.