数理解析研究所講究録
374巻 1980年 58-74

Buchsbaum局所環について

日大 文理　　後藤四郎

序. まず例から入ろう。$P=k[[X,Y,Z,W]]$ は体 k の上の巾級数環とし $A=P/(X,Y)\cap(Z,W)$ とおく。$\{a,b\}$ は A の s.o.p.（system of parameters）とし $\mathfrak{q}=(a,b)$ としよう。自然な完全系列 $0\longrightarrow A\longrightarrow P/(X,Y)\oplus P/(Z,W)\longrightarrow k=P/(X,Y)+(Z,W)\longrightarrow 0$ に $\otimes_A A/\mathfrak{q}$ を適用すれば，完全系列 $0\longrightarrow k^{(2)}\to A/\mathfrak{q}\to P/(X,Y)+\mathfrak{q}\oplus P/(Z,W)+\mathfrak{q}\to k\to 0$ をうる。よって $\ell_A(A/\mathfrak{q})=\ell_P(P/(X,Y)+\mathfrak{q})+\ell_P(P/(Z,W)+\mathfrak{q})+1$. 一方 $\mathfrak{q}$ に関する重複度を $e_{\cdot}(\mathfrak{q})$ で表すことにすれば，$e_A(\mathfrak{q})=e_{P/(X,Y)}(\mathfrak{q})+e_{P/(Z,W)}(\mathfrak{q})$ である。故に

$$\ell_A(A/\mathfrak{q})-e_A(\mathfrak{q})=1$$

が，s.o.p. $\{a,b\}$ のとり方に無関係に成立することがわかる。勿論 A は Cohen-Macaulay ではない。この例のように，差 $\ell_A(A/\mathfrak{q})-e_A(\mathfrak{q})$ が parameter ideal $\mathfrak{q}$ のとり方に無関係な，A の不変量（これを $I(A)$ とかく）となる時，局所環 A は Buchsbaum であるという。A が C-M であることと，A は Buchsbaum であって $I(A)=0$ なる事とは

同値である。この意味で "Buchsbaum" は "Cohen-Macaulay" の拡張概念であって，その出所は次の問題にある：

問 （D.A. Buchsbaum [1], 1965）．局所環 A の parameter ideal $\mathfrak{q}$ について $\ell_A(A/\mathfrak{q}) - e_A(\mathfrak{q}) = \dim A - \operatorname{depth} A$ が成立するか？

この主張は，一般には全然成立しない。W. Vogel [17] は 1971 年に，反例を与えると共に，この問題が肯定的に解決される様な環を研究する事を提案している。その後 1973 年前後より，Vogel とその弟子にあたると思われる人々によって，上記の意味での Buchsbaum rings についての結果が，ぼつぼつ出はじめた様である。

一方，Homology 代数の手法による局所環の分類を示す次の図式

$$\text{regular} \Longrightarrow \text{hypersurfaces} \Longrightarrow \text{C-I} \Rightarrow \text{Gorenstein} \Rightarrow \text{C-M}$$

は，既におなじみの事と思いますが，Buchsbaum 局所環は，非 C-M 環の理論の一部をなすものとして，上の図の右端に付加されるべき一つの有望な候補者であるとも考えられる。今もって，海のものとも山のものともつかぬ代物ではありますが，以下 Buchsbaum rings について二・三の結果をご報告したいと考えます。

以下 $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とし，有限生成 A-加

群 M ($\neq (0)$) について,

定義[四]. M が Buchsbaum であるとは, M の s.o.p. で生成された A の ideal を $\mathfrak{q}$ とすれば, 差

$$\ell_A(M/\mathfrak{q}M) - e_M(\mathfrak{q})$$

が M の不変量 $I(M)$ となることをいう。(但し $e_M(\mathfrak{q})$ は $\mathfrak{q}$ についての M の重複度を表す。)

§1. 基本的な性質.

定理 1.1 [四] M は有限生成 A-加群とし $d = \dim_A M > 0$ とすれば, 次の条件は同値である。

① M は Buchsbaum である。

② すべての s.o.p. $a_1, \ldots, a_d$ について, $(a_1, \ldots, a_k)M : a_{k+1} = (a_1, \ldots, a_k)M : \mathfrak{m}$ $(0 \leqq \forall k < d)$ が成立する。(すなわち, すべての s.o.p. は a weak M-sequence である。)

③ すべての s.o.p. $a_1, \ldots, a_d$ について, $(a_1, \ldots, a_{d-1})M : a_d = (a_1, \ldots, a_{d-1})M : a_d^2$ が成立する。

④ すべての s.o.p. について $\mathfrak{m}\,U((a_1, \ldots, a_k)M) \subset (a_1, \ldots, a_k)M$ $(0 \leqq \forall k < d)$ が成立する。

ここで, $U((a_1, \ldots, a_k)M)$ の定義を述べなくてはならない。N を M の部分加群 ($N \neq M$) とし $\mathrm{Assh}_A(M/N) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M/N) \mid \dim A/\mathfrak{p} = \dim_A M/N\}$ とおく。N の M 内での準素分解を, $N =$

$\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_A(M/N)} N(\mathfrak{p})$ とすれば, $U(N)$ は, $U(N)=\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Assh}_A(M/N)} N(\mathfrak{p})$ により定められる。($\mathfrak{p}\in\mathrm{Assh}_A(M/N)$ はすべて, $\mathrm{Supp}_A(M/N)$ 内で極小であるので, この定義ははじめの準素分解 $N=\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_A(M/N)} N(\mathfrak{p})$ のとり方にはよらない。)

注意 1.2. "a weak M-sequence" という概念は順序に依る。$A=k[[X,Y,Z]]/(X)\cap(X^2,Y)$ とすれば, $\{z, y\}$ は弱A-列であるが, $\{y, z\}$ はそうではない。又, $\ell_A(A/(y,z^n))=2n$, $e((y,z^n))=n$. 従って A は Buchsbaum ではない。このことより, (1.7) の条件② において, "すべての" という仮定がはずせないことがわかる。

問題 1.3 それにもかかわらず, 一つの s.o.p. のふるまいで, Buchsbaum 加群を特徴付けることが非常に期待される。例えば, 「ある s.o.p. $a_1,\dots,a_d$ が存在してすべての $\pi\in S_d$ とすべての $n_1,\dots,n_d>0$ について $\{a_{\pi(1)}^{n_1},\dots,a_{\pi(d)}^{n_d}\}$ が弱M-列であって その上 若干の条件の下に M は Buchsbaum である」という形の補題が欲しい。但し, 若干の条件は不可欠である。例をあげておく。

例1.4 $A=k[[X_1,\dots,X_d,Y_1,\dots,Y_d]]/[(X_1,\dots,X_d)\cap(Y_1,\dots,Y_d)\cap\mathfrak{a}]+(F_1^n)$ とおく。但し $\mathfrak{a}=(X_1^2,X_2,\dots,X_d,Y_1^2,Y_2,\dots,Y_d)$ $(n, d\geqq 3)$ とし $F_i=X_i+Y_i$ $(1\leqq i\leqq d)$ とする。この時, A は Buchsbaum ではないにもかかわらず, $F_2^{n_2},\dots,F_d^{n_d}$ は (従ってその並び

かえも）弱A-列をなす。もちろん $\dim A = d-1$.

しばらくの間(1.1)の系共にふれる。

系1.5(阿) U は M の部分加群で $\mathfrak{m}U=(0)$ なるものとする。M/U が C-M ならば，M は Buchsbaum である。さらに $\dim_A M>0$ なら，$I(M) = \dim_{A/\mathfrak{m}} U$ となる。

系1.6 ① M が Buchsbaum である $\Longleftrightarrow$ $\hat{M}$ も Buchsbaum である。このとき $I_{\hat{A}}(\hat{M}) = I_A(M)$．（但し $\hat{}$ は完備化を表す。）
② $A \xrightarrow{\phi} B$ は局所環の有限射とする。N を有限生成 B-加群とすれば，N が Buchsbaum B-加群 $\Longrightarrow$ ${}_{\phi}N$ は Buchsbaum A-加群である。ϕ が onto であれば逆も正しい。

注意1.7 (1.6)の② の逆は ϕ が全射でないと正しくない。例えば，A は Buchsbaum とし さらに $B=A\ltimes A$（イデアル化）とする。もしも $A \neq$ C-M かつ $\dim A=1$ ならば，B は Buchsbaum ring ではない。しかし，A-加群としては，Bは立派に Buchsbaum である。

系1.8. 局所環の拡大 $A\subset B$ が integral でかつ pure であれば，B: Buchsbaum $\Rightarrow$ A: Buchsbaum が正しい。従って，Gは Buchsbaum 局所環 A の自己同型のなす有限群とするとき，もしも $|G| \in U(A)$ ならば A^G も又 Buchsbaum となる。

Buchsbaum 加群の local cohomology は vector space である。もっとはっきりかくと,

<u>定理1.9</u> (c.f.[7]) M は Buchsbaum で $d = \dim_A M > 0$ とする。このとき, ① $M/U((0))$ も Buchsbaum である。又すべての $a \in \mathfrak{m}$ s.t. $\dim_A M/aM = d-1$ について, M/aM は Buchsbaum である。

② $\mathrm{Assh}_A M = \mathrm{Ass}_A M \setminus \{\mathfrak{m}\}$.

③ $\mathfrak{m} H_\mathfrak{m}^i(M) = (0)$ $(\forall i \neq d)$ かつ $U((0)) = H_\mathfrak{m}^0(M) = [0 : \mathfrak{m}]_M$.

④ $I(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \dim_{A/\mathfrak{m}} H_\mathfrak{m}^i(M)$.

⑤ $a \in \mathfrak{m}$ を $\dim_A M/aM = d-1$ にとれば, 完全系列

$$0 \to H_\mathfrak{m}^{d-1}(M) \to H_\mathfrak{m}^{d-1}(M/aM) \to H_\mathfrak{m}^d(M) \xrightarrow{a} H_\mathfrak{m}^d(M) \to 0$$

が存在しその上 $\quad H_\mathfrak{m}^i(M/aM) = H_\mathfrak{m}^i(M) \oplus H_\mathfrak{m}^{i+1}(M) \quad (0 \leq i < d-1)$

となっている。

<u>系1.10</u> A は Buchsbaum で $A \neq$ C-M とする。このとき, $A[[X]]$ は決して Buchsbaum ではない。(従って, $\exists a$: A-regular s.t. A/aA が Buchsbaum であっても, A は必ずしも Buchsbaum ではない。)

<u>系1.11</u> M は (1.9) と同じとすれば次が正しい。

① $M_\mathfrak{p}$ は C-M $A_\mathfrak{p}$-加群である, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$.

② $\dim A/\mathfrak{p} + \dim_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = d$, $\quad \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M)$.

<u>定理1.12</u> M は (1.9) と同じと仮定し $\mathfrak{q}$ は M の一つの parameter ideal とせよ。今 $e_i = \sum_{j=1}^{d-i} \binom{d-i-1}{j-1} \dim_{A/\mathfrak{m}} H_\mathfrak{m}^j(M)$

$(0<i<d)$, $e_d = \dim_{A/\mathfrak{m}} H^0_\mathfrak{m}(M)$ とおくと,

① ([10]) $\ell_A(M/\mathfrak{q}^{k+1}M) = e_M(\mathfrak{q})\binom{d+k}{k} + \sum_{i=1}^{d} e_i\binom{d+k-i}{d-i}$ $(\forall k \geqq 0)$.

② $H(M,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \ell_A(\mathfrak{q}^k M/\mathfrak{q}^{k+1}M)\lambda^k$ $(\in \mathbb{Z}[[\lambda]])$ と定めれば,

$$H(M,\lambda) = \frac{1}{(1-\lambda)^d}\left\{\ell_A(M/\mathfrak{q}M) + \sum_{i=1}^{d}(-1)^i\left[\sum_{j=0}^{d-i}\binom{d}{i+j}\dim_{A/\mathfrak{m}} H^j_\mathfrak{m}(M)\right]\lambda^i\right\}.$$

この結果を用いれば, D.A. Buchsbaum の(はじめの)問について, 完全な答えがえられる。

<u>系1.13</u> ([10]). $\dim A = d > \operatorname{depth} A = 0$ とする。このとき, すべての parameter ideal $\mathfrak{q}$ について $\ell_A(A/\mathfrak{q}) - e_A(\mathfrak{q}) = d$ が成立する

$\Longleftrightarrow$ A は Buchsbaum であってかつ $h^i = \dim_{A/\mathfrak{m}} H^i_\mathfrak{m}(A)$ $(i \neq d)$ とおくと, 次のいずれかが成立する。

① $h^0 = d$, $h^i = 0$ $(i \neq 0)$

② $d \geqq 2$ で, $h^0 + h^{d-1} = d$, $h^i = 0$ $(i \neq 0, d-1)$.

③ $d \geqq 3$ で, $h^0 = h^{d-2} = 1$, $h^i = 0$ $(i \neq 0, d-2)$.

④ $d \geqq 2$ で, $h^0 = h^1 = 1$, $h^i = 0$ $(i \neq 0, 1)$.

§2. 判定条件.

Cohen-Macaulay rings の場合と同じく, Buchsbaum rings も Koszul homology のふるまいにより特徴付けられる。すなわち,

<u>定理 2.1</u> (Schenzel [11], Suzuki [16]).

$\dim_A M = d > 0$ ならば次の条件は同値である。

① M は Buchsbaum である。

② すべての s.o.p. $a_1, \dots, a_d$ について $\mathfrak{m}H_1(a_1, \dots, a_d; M) = (0)$.

のみならず，このとき，$1 \leqq \forall r \leqq d$ と $1 \leqq \forall p \leqq r$ について $\mathfrak{m}H_p(a_1, \dots, a_r; M) = (0)$ であって $\dim_{A/\mathfrak{m}} H_p(a_1, \dots, a_r; M) = \sum_{i=0}^{r-p} \binom{r}{p+i} \dim_{A/\mathfrak{m}} H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ となる。

先にも(1.9)で述べた様に，M が Buchsbaum であれば $\mathfrak{m}H^i_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ $(\forall i \neq \dim_A M)$ である。しかし逆は正しくない。例えば，$A = k[[X, Y, Z, W]]/(X, Y) \cap (Z, W) \cap (X^2, Y, Z^2, W)$ とおくと $H^i_{\mathfrak{m}}(A) = A/\mathfrak{m}$ $(i = 0, 1)$ であるが，$A \neq$ Buchsbaum である。この間の事情を説明する結果として，

<u>定理 2.2</u> (Stückrad - Vogel [15], Stückrad [13]). $d = \dim_A M$ とする。このとき，

① $\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}, M) \xrightarrow{\varphi^i_M} H^i_{\mathfrak{m}}(M) = \varinjlim_{\nu} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}^{\nu}, M)$ がすべての $i \neq d$ について全射であれば，M は Buchsbaum である。

② A が regular であれば，逆も正しい。

<u>注意 2.3</u> ① (2.2)の②は $A \neq$ regular のときは，必ずしも正しくない。$A = k[[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]]/(F)$ $(n \geqq 3)$ とせよ。但し $F = X_1^2 + \cdots + X_n^2 + Y_1^2 + \cdots + Y_n^2$. さらに $M = k[[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]]/[(X_1, \dots, X_n) \cap (Y_1, \dots, Y_n)] + (F)$ とおくと，M は Buchsbaum であるが，$\mathrm{Ext}^1_A(A/\mathfrak{m}, M) \xrightarrow{\varphi^1_M} H^1_{\mathfrak{m}}(M)$ は全射ではない。

② (2.2) の ① の条件は $0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^i \to \cdots$ を M の minimal injective resolution とした時, $I^\bullet = H^0_m(E^\bullet)$ の cohomology が $[0:m]_{E^\bullet}$ の形で代表されることを主張している。すなわち, $H^i_m(M)$ が vector space になるにしても, そのなりかたが問題であるといおうか!

系 2.3 ([5]). $\operatorname{depth}_A M = t < \dim_A M = d$ であってかつ $H^i_m(M) = (0)$ $(i \neq t, d)$ と仮定せよ。このとき,

$$M \text{ が Buchsbaum} \iff m H^t_m(M) = (0).$$

従って $\dim A = 2$ で A が, 例えば整域であれば, A が Buchsbaum であるためには $m \cdot H^1_m(A) = (0)$ なる事が必要十分である。

例 2.4 ① $A = k[[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]] / (\underline{X}) \cap (\underline{Y})$ $(m \geqq 2)$ とすれば, $0 \to A \to k[[\underline{X}, \underline{Y}]]/(\underline{X}) \oplus k[[\underline{X}, \underline{Y}]]/(\underline{Y}) \to k \to 0$ より, $H^i_m(A) = (0)$ $(\forall i \neq 1, m)$ かつ $H^1_m(A) \cong k$ を得る。故に A は Buchsbaum で $I(A) = m - 1$.

② $A = k[[s^4, s^3t, st^3, t^4]] \subset k[[s, t]]$ とすれば,

$$0 \to A \to k[[s^i t^{4-i} \mid 0 \leqq i \leqq 4]] \to k \to 0 \quad (\text{完全}).$$

よって $H^1_m(A) \cong k$ だから A は Buchsbaum で $I(A) = 1$. A が Cohen-Macaulay でないことは, F.S. Macaulay 自身が述べている所である。(c.f. P.98, [8]).

系 2.5 (Vogel [18]) $\operatorname{depth}_A M > 0$ なら次の条件は同値である。

① M は Buchsbaum である。

② $\exists a \in \mathfrak{m}^2$ s.t. a は M-正則でかつ M/aM は Buchsbaum.

系1.10でも示した様に，$a \in \mathfrak{m}^2$ にとれたaでは，②⇒①は必ずしも成立しない。

次に次数環を考えよう。$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ は $R_0 = k$（体）である様なNoether次数環とし $\mathfrak{m} = R_+$ とおく。

<u>定理2.6</u>（Watanabe－Goto [19]）．M は有限生成次数付き R-加群で $d = \dim_R M \geq 2$ とせよ。このとき，$\exists \{t_i\}_{0 \leq i < d}$ s.t. $t_{i-1} \leq t_i + 1$ $(1 \leq \forall i < d)$ かつ $[H^i_{\mathfrak{m}}(M)]_n = (0)$ for $\forall n \neq t_i$, $0 \leq \forall i < d$ ⇒ $M_{\mathfrak{m}}$ は Buchsbaum である。

この事実は，$\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \to H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ がすべての i $(\neq d)$ について全射であることを示して，(2.2)より導かれる。

<u>系2.7</u>（[□]）．ある $t \in \mathbb{Z}$ があって $[H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_n = (0)$ $(\forall n \neq t, \forall i \neq d)$ ⇒ $R_{\mathfrak{m}}$ は Buchsbaum である。

<u>注意2.8</u> (2.6)において $\{t_i\}_{0 \leq i < d}$ 共についた条件のうち "$t_{i-1} \leq t_i + 1$" は best possible である。例えば，

$$R = k[X, Y, Z, W]/(X, Y) \cap (Z, W) \cap (X^2, Y, Z^2, W)$$

とすると $H^0_{\mathfrak{m}}(R) = \underline{k}(-2)$, $H^1_{\mathfrak{m}}(R) = \underline{k}$．もちろん $R_{\mathfrak{m}} \neq$ Buchsbaum である。

系2.8 ([9]). $R = k[R_1]$ かつ $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,R$ について $\dim R/\mathfrak{p} = d$ であると仮定すれば、$X = \mathrm{Proj}(R)$ が C-M である $\Longleftrightarrow$ $\exists N \gg 0$ s.t. $R^{(N)}$ は Buchsbaum である (at $[R^{(N)}]_+$).

例2.9 $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ も、R と同様に、$S_0 = k$ なる Noether 次数環とする。R, S は共に C-M で $\dim R = r \geq 2$, $\dim S = s \geq 2$ と仮定しよう。$\mathfrak{m} = R_+$, $\mathfrak{n} = S_+$ とし $T = R \# S$ (Segre 積), $M = T_+$ とおく。すると $\dim T = r + s - 1$ であってその上

$$H^p_M(T) = \begin{cases} (0) & (p = 0, 1) \\ [R \# H^p_{\mathfrak{n}}(S)] \oplus [H^p_{\mathfrak{m}}(R) \# S] & (2 \leq p < r+s-1) \end{cases}$$

となる(c.f. [6])。そこで面倒臭いので、$r = s$ としてしまうと、

T_M が Buchsbaum である $\Longleftrightarrow$ $R \# H^r_{\mathfrak{n}}(S)$, $H^r_{\mathfrak{m}}(R) \# S$ は T/M-vector spaces である

をうる (c.f. (2.3))。例えば、$R = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^3+Y^3+Z^3)$, $S = \mathbb{C}[V, W]$ とすれば $R \# S$ は正規であってもC-Mではない(環として有名である)がしかし、Buchsbaum にはなっている。

系2.10 ([1]). $\dim R/\mathfrak{p} = \dim R$ がすべての $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,R$ について成立するものと仮定せよ。さらに $\forall \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ について $R_{\mathfrak{p}}$ は C-M であるとする。k は $\mathrm{ch}\,k = p > 0$ で 完全

であるとしよう。もし $F: R \to R,\ a \mapsto a^p$ が pure であれば R_mは Buchsbaum である。

注意 2.11 これは全く一般の状況で正しい。すなわち，Aは標数 $p>0$ の体を含み その上 F-pure であると仮定せよ。もしも $\ell_A(H_m^i(A)) < \infty$ ($\forall i \neq \dim A$) ならば，Aは Buchsbaum になる。もしも Aが Cohen-Macaulay 局所環の像であって その上 $\dim A = 2$ の整域であれば，自動的に Aは Buchsbaum となる (c.f. [5])。

§3. 存在定理.

Buchsbaum局所環 A の不変量の多くが，$\dim_{A/m} H_m^i(A)$ ($i \neq \dim A$) の言葉で書き表される (c.f. (1.9), (1.13), (2.1))。この観点からみて，次の主張はいくらか面白いかもしれない。

定理 3.1 (Goto [3]). $d>0$; $k^0, k^1, \ldots, k^{d-1} \geq 0$ は整数とせよ。すると Buchsbaum 局所環 A をみつけて，$\dim A = d$ でかつ $\dim_{A/m} H_m^i(A) = k^i$ ($0 \leq i < d$) とすることができる。とくにもしも $k^0 = 0$ (あるいは，$k^0 = k^1 = 0$) ならば，Aは整域 (正規環) にえらべる。

系 3.2 (次数付き表現) k は無限体，$R = k[X_1, \ldots, X_n]$ ($n \geq 4$) は多項式環とし $m = R_+$ と

おく。$\{L_i\}_{1\le i\le n-3}$ は有限次元の次数付き k-ベクトル空間とせよ。このとき、$\exists r\in\mathbb{Z}$, $\exists\, \mathfrak{p}$: graded 素イデアル s.t. ① $\mathrm{ht}_R\, \mathfrak{p} = 2$ ② $R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}$ は Buchsbaum である ③ $\underline{H}^i_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p}) \cong L_i(r)$ $(1\le i\le n-3)$.
もしも $L_1=(0)$ ならば、$R/\mathfrak{p}$ は正規となる様に $\mathfrak{p}$ をえらべる。

注意 3.3 $\{t_i\}_{0\le i\le n-3}$ を $t_{i-1}\le t_i+1$ $(1\le i\le n-3)$ にとって、

$$L_i = \begin{cases} k(-t_i) & (1\le i\le n-3) \\ (0) & (i=0) \end{cases}$$

とおく。

すると (3.2) より ($\mathfrak{p}$ をとって 次数付き素イデアル) $\underline{H}^i_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p}) \cong L_i(r)$ $(0\le i\le n-3)$ にできるが、この $R/\mathfrak{p}$ は (2.6) の条件をみたしていることに注目せよ。

§4. 双対性.

定理 4.1 ([12]). A は complete で M は Buchsbaum A-加群とせよ。$d=\dim_A M$ とすると、A-加群

$$K_M = \mathrm{Hom}_A(H^d_{\mathfrak{m}}(M), E_A(A/\mathfrak{m}))$$

(次元は d に等しい。)
も又 Buchsbaum である。$d\le 2$ なら K_M は C-M で、$d\ge 3$ なら $\mathrm{depth}_A K_M \ge 2$ であってその上

$$H^i_{\mathfrak{m}}(K_M) \cong H^{d-i+1}_{\mathfrak{m}}(M) \quad (2\le i< d-1)$$

となっている。

系 4.2. A は Buchsbaum で $\exists K_A$ とせよ。このとき、K_A もまた Buchsbaum A-加群である。

系 4.3 A は regular で M は Buchsbaum A-加群とせよ。このとき $\mathrm{Ext}_A^g(M, A)$ もまた Buchsbaum である ($g = \dim A - \dim_A M$)。

§5. Almost C-M rings について。

定義 5.1. A が almost C-M である $\Longleftrightarrow$ A は Buchsbaum で $H^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ $(i \neq 1, \dim A)$ である。

$d = \dim A \geqq 2$ のときには、この条件は、「$H^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ $(i \neq 1, d)$ かつ $\mathfrak{m} H^1_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$」と同値である (c.f. (2.3))。従って、$d = 2$ ならば、$\operatorname{depth} A > 0$ なるすべての Buchsbaum rings A は almost C-M となる。

補題 5.2 ([2]). $Q(A)$ により A の全商環をあらわす。このとき次の条件は同値である。($d = \dim A$)

① A は almost C-M である。

② $Q(A) \overset{\exists}{\supset} \underset{\text{subring}}{B} \supset A$ s.t. (a) B は A 上の加群として有限生成である (b) $\dim B_{\mathfrak{n}} = d$, $\forall \mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ (c) $\mathfrak{m}B \subset A$.

もしも $d \geqq 2$ なら、B は唯一つしか存在せず、その上 $H^1_{\mathfrak{m}}(A) = B/A$ となっている。

定理 5.3 ([2]). $S \subset \mathbb{N}^n$ は有限生成(加法的) semigroup $(0 \in S)$ であって rank $S = d \geqq 2$ とする。$\tilde{S}$ により S の C-M 化をあらわすことにすれば、次の条件は同値である。但し $R = k[S]$ は体 k 上の semigroup ring で $\mathfrak{m} = k[S \setminus \{0\}]$ とする。

① $R_{\mathfrak{m}}$ は almost C-M である。

② $R_{\mathfrak{m}}$ は Buchsbaum である。

③ $[S \setminus \{0\}] + \tilde{S} \subset S$.

このとき $I(R_{\mathfrak{m}}) = \#[\tilde{S} \setminus S]$ となる。

よく知られている例として $S = \langle (4,0), (3,1), (1,3), (0,4) \rangle$ とすると $\tilde{S} = \langle (4,0), (3,1), (2,2), (1,3), (0,4) \rangle$ である。$\tilde{S} \setminus S = \{(2,2)\}$ だからもちろん $k[S]_{\mathfrak{m}}$ は almost C-M である。

定理 5.4 ([4]). $R \subset S$ は可換環の有限型拡大とし、さらに S は C-M ですべての $Q \in \operatorname{Max} S$ について $\dim S_Q = \dim S$ なるものとしよう。$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ とし $W(\mathfrak{p}) = \{P \in \operatorname{Spec} S \mid P \cap R = \mathfrak{p}\}$ とおく。$\mathfrak{p}$ 上の glueing をつくって $(R', \mathfrak{p}')$ とし $A = R'_{\mathfrak{p}'}$ とおく。$d = \dim R_{\mathfrak{p}}$ とすれば次の主張が正しい。("glueing"については、本研究集会の大石，柳原両氏の講演を参照下さい。)

① A は almost C-M であって、$\dim A = d$.

② $d>0$ ならば,

$$I(A) = (d-1)\cdot\Big\{\sum_{\mathfrak{P}\in W(\mathfrak{g})} [k(\mathfrak{P}):k(\mathfrak{g})] - 1\Big\}.$$

$$\mathrm{emb}(A) = \sum_{\mathfrak{P}\in W(\mathfrak{g})} \mathrm{emb}(S_{\mathfrak{P}})\cdot[k(\mathfrak{P}):k(\mathfrak{g})]$$

$$e(A) = \sum_{\mathfrak{P}\in W(\mathfrak{g})} e(S_{\mathfrak{P}})\cdot[k(\mathfrak{P}):k(\mathfrak{g})].$$

但し $e(\cdot)$ は重複度を, $\mathrm{emb}(\cdot)$ は embedding dimension をあらわす。

系5.5 上の状況下で, A : C-M (i.e., A は (S_2) をみたす) $\Longleftrightarrow$ $d\leqq 1$ か又は, $d\geqq 2$ であって $W(\mathfrak{g})=\{\mathfrak{P}\}$ でその上この $\mathfrak{P}$ について $k(\mathfrak{g})=k(\mathfrak{P})$ が成立する。

沢山の例が柳原氏の講演から得られるであろう。

定理5.6([2],[9]). A は almost C-M であると仮定せよ。このとき,

① すべての parameter ideal $\mathfrak{q}$ について $G_{\mathfrak{q}}(A)$ も almost C-M である。

② $\mathrm{emb}(A) \leqq e(A) + \dim A + I(A) - 1$ であって, もしも "=" が成立すれば, $G_{\mathfrak{m}}(A)$ も又 almost C-M である。

References

[1] D. A. Buchsbaum, Complexes in local ring theory, In : Some aspects of ring theory, C. I. M. E. Rom. 1965.

[2] S. Goto, On the Cohen-Macaulayfication of certain Buchsbaum rings, to appear in Nagoya Math. J.

[3] S. Goto, On Buchsbaum rings, in preprint.

[4] ———, On Buchsbaum rings obtained by glueing, in preprint.

[5] ———, On F-pure Buchsbaum rings, in preparation.

[6] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.

[7] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras over Buchsbaum rings, to appear in J. Math. Kyoto Univ.

[8] F. S. Macaulay, Algebraic Theory of Modular Systems, Cambridge Tracts No. 19, Cambridge, 1916.

[9] P. Schenzel, On Veronesean embeddings and projections of Veronesean varieties, Archiv der Mathematik, 30 (1978), 391-397.

[10] ——— , Multiplizitäten in verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Moduln, Math. Nachr., 98 (1979), 295-306.

[11] ——— , Applications of dualzing complexes to Buchsbaum rings, in preprint.

[12] ——— , On Buchsbaum rings and their canonical modules, in preprint.

[13] J. Stückrad, Über die kohomologische Charakterisierung von Buchsbaum-Moduln, to appear in Math. Nachar.

[14] J. Stückrad and W. Vogel, Eine Verallgemeinerung der Cohen-Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, J. Math. Kyoto Univ., 13 (1973), 513-528.

[15] ——— , Toward a theory of Buchsbaum singularities, Amer. J. Math., 100 (1978), 727-746.

[16] N. Suzuki, On the Koszul complex generated by a system of parameters for a Buchsbaum module, Science Reports of Shizuoka College of Phermachy, Department of Mathematics, General Education, 8 (1979), 37-35.

[17] W. Vogel, Über eine Vermutung von D. A. Buchsbaum, J. Algebra, 25 (1973), 106-112.

[18] ——— , A non-zero-divisor characterization of Buchsbaum modules, in preprint.

[19] K. Watanabe and S. Goto, Tangent cones at Buchsbaum singularities, in preparation.