

素イデアルの貼り合わせについて

広島大 理学部 柳原弘志

Traverso はその論文[3]において、可換環の *seminormal* 部分環の定義を与え、興味ある結果を得た。特に与えられた環 B とその部分環 A の素イデアル \mathfrak{p} 上の B の素イデアル \mathfrak{p}_B を貼り合わせて新しく B の部分環 A' を構成することにより、ネーター環の *seminormal* 部分環の構造を調べた。この講演の目的は、上の意味での素イデアルの貼り合わせに関する若干の結果を与えることである。

1° 定義 (Traverso). B をネーター環, $A \subseteq B$ の部分環で, B は有限 A -加群となっているとする。 \mathfrak{p} を A の素イデアルとするとき, 次の二条件を満たす A を含む最大の B の部分環 A' が存在する:

(i). A との交わりが \mathfrak{p} になる A' の素イデアル \mathfrak{p}' は唯一つ存在する。

(ii) $\mathfrak{a}(\mathfrak{p}), \mathfrak{a}(\mathfrak{p}')$ をそれぞれ $A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{p}'$ の商体とすると、自然に引き起こされる対応で $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ と $\mathfrak{a}(\mathfrak{p}')$ は同型になる。

この A を B から \mathfrak{p} 上の貼り合わせによって得られる環 という。又、 A を $(B; \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n)$ の 貼り合わせ と呼ぶ。

定義 B をネーター環, $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ を B の素イデアルとする。このとき、次の条件を満たす B の部分環 A が存在するとき、 $(B; \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n)$ は A 上貼り合わせ可能である という。

B は有限 A -加群で、 A の素イデアル \mathfrak{p} があって、 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n$ は B の素イデアルで A との交わりが \mathfrak{p} になるもの全体である。

命題 1. B を Krull 次元有限のネーター環, $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ を B の素イデアルとする。このとき、 $(B; \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n)$ が貼り合わせ可能であるためには、次の二条件が満たされることが必要十分である：

- (i). 任意の i, j に対し, $\dim B/\mathfrak{p}_i = \dim B/\mathfrak{p}_j$
- (ii). 整域 R と R から $B/\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ への単射準同型 w で、 $B/\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ が有限 R -加群となるものが存在する。

(i), (ii) が必要十分ことは容易に分るが、逆に (i), (ii) を満たしているのは、 $A_R = \pi^{-1}(w(R))$ とおく。ただし、 $\pi: B \rightarrow B/\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ は

自然準同型である。このとき、 B は有限 A -加群で、 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ は A_R との交わりが $\mathfrak{p}_i = A_R \cap \mathfrak{p}_i$ になる B の素イデアル全体になり、 $(B; \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n)$ が貼り合わせ可能であることが示される。

今、 $(B; \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n)$ は命題1の条件(i), (ii)を満たし A_R 及び \mathfrak{p}_i を上で与えたものとし、 B から \mathfrak{p}_i 上の貼り合わせによって得られる環を A'_R とかく。更に、 σ を次の自然準同型の合成射とする：

$$B \xrightarrow{\pi} B/\prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i \longrightarrow \prod_{i=1}^n B/\mathfrak{p}_i \hookrightarrow \prod_{i=1}^n k(\mathfrak{p}_i)$$

一方、 R の商体 $Q(R)$ は w から自然に得られる準同型 w_1 によって、 $B/\prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ の全商環 $Q(B/\prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i) = \prod_{i=1}^n k(\mathfrak{p}_i)$ の部分体と同一視出来る。このとき、次の結果を得る。

命題2. $B, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ は命題1と同じとし、更に命題1の条件(i), (ii)を満たしているとする。又、

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{f_1} & S_1 \\ \sigma \downarrow & & \downarrow g_1 \\ \prod_{i=1}^n k(\mathfrak{p}_i) & \xleftarrow{w_1} & Q(R) \end{array}$$

を σ と w_1 に関するpullback図式とする。このとき、 A'_R は f_1 によって S_1 と同型になる。

定理1 $B, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ は命題1と同じとし、命題1の条件(ii),

(ii) を満たしているとする。このとき、 $A_R = A'_R$ となるためには、 $w_1(R) = \sigma(B) \cap w_1(Q(R))$ となることが必要十分である。特に R が正則環であれば、 A_R は $(B; p_1, \dots, p_n)$ の貼り合わせである。

2° 定理 1 を応用して、Tamone [2] や Pedrini [1] によって与えられた結果を見直してみる。

例 1. k を体、 B を k 上の有限生成な環、 p_1, \dots, p_n を B の素イデアルとする。このとき、 $(B; p_1, \dots, p_n)$ が貼り合わせ可能であるためには、 $\dim B/p_i = \dim B/p_j$ ($\forall i, j$) が必要十分である。実際、 $B/\bigcap_{i=1}^n p_i$ も k 上有限生成であるから、ネーター正規化定理により、 k 上の多項式環と同型な B の部分環 R で、 B が R 上有限生成加群となるものが存在するから、命題 1 より、 $(B; p_1, \dots, p_n)$ は貼り合わせ可能である。定理 1 から、この場合 $A_R = A'_R$ となっている。更に、 z_1, \dots, z_d が B の元で k 上代数的独立で、 $(\bigcap_{i=1}^n p_i) \cap k[z_1, \dots, z_d] = (z_1, \dots, z_d)$ 、 $B/k[z_1, \dots, z_d]$ が整拡大となっているれば、 $[k; k'] < \infty$ となる任意の部分体 k' に対し、 $A = k'[z_1, \dots, z_d] + \bigcap_{i=1}^n p_i$ は $(B; p_1, \dots, p_n)$ の貼り合わせになることも証明出来る。これは Tamone [2] の主結果に他ならない。

例 2. B をネーター環、 p_1, p_2 を B の素イデアルとする。

($\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ でもよい)。 $\pi_\lambda : B \rightarrow B/\mathfrak{p}_\lambda$ ($\lambda = 1, 2$) を自然準同型とする。更に、環の同型中: $B/\mathfrak{p}_1 \rightarrow B/\mathfrak{p}_2$ が存在し、 $A = \{b \in B \mid \phi \pi_1(b) = \pi_2(b)\}$ とおくとき、 B/\mathfrak{p}_1 が有限 A 加群になっているとする。このとき、 A は $(B; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ の貼り合わせである。

実際、 A の定義から $A \cap \mathfrak{p}_1 = A \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ が容易に分るから、これを \mathfrak{p} とおく。一方、

$$B = Ab_1 + \cdots + Ab_s + \mathfrak{p}_1 = Ab'_1 + \cdots + Ab'_t + \mathfrak{p}_2$$

$$\mathfrak{p}_1 = Bx_1 + \cdots + Bx_\pm$$

とあるとき、 $B = A + Ab_1 + \cdots + Ab_s + \sum_{i,j} Ab'_j x_i$ となることが示される。すなわち、 B は有限 A 加群である。このとき、

$R = A/\mathfrak{p}$ とおけば、命題 1 の条件 (i), (ii) 及び、定理 1 の条件を満たしていることが容易に確かめられて、 $A = A_R = A'_R$ となり、 A は $(B; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ の貼り合わせである。この例は Pedrini [1] の定理 1 及びその一般化である。

3°. 次に Serre の条件 (S_2) が素イデアルの貼り合わせによつて、保存されるかどうかということを考えてみる。

定理 2. B をネーター環、 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ を B の素イデアルとする。 A を $(B; \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n)$ の貼り合わせで、 $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}_i$ とする。このとき、次が成り立つ:

- (i). 各 \mathfrak{p}_i について, $\text{ht} \mathfrak{p}_i = 1$ で; B が (S_2) を満たせば; A も (S_2) を満たす。
- (ii). $A \neq B$ で; 各 \mathfrak{p}_i が B の正則元を含めば; $A_{\mathfrak{p}_i}$ の depth は 1 である。特にある \mathfrak{p}_i について, $\text{ht} \mathfrak{p}_i > 1$ なら A は (S_2) を満たさない。

この定理は Pedrini [1] の定理 2 及び 4 の一般化である。研究集会での講演では, B が整域のときにこの定理が成り立つと述べたのであるが; その後, 伊藤史朗氏により上述の型に改良された。実際, 元の定理の証明に, 「整域 A が (S_2) を満たすための必要十分条件は $A = \bigcap_{\text{ht} \mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}$ が成り立つことである」という結果を用いたのであるが, これを伊藤氏による次の補題でおきかえることにより同じ証明方法で定理 2 を示すことが出来るからである。

補題: A はネーター環で, $\text{ht} \mathfrak{p} \geq 1$ となる A の素イデアル \mathfrak{p} は常に正則元を含んでいるとする。 $A^{(1)}$ を A の素イデアルの高さが 2 以上となる A の全商環 $Q(A)$ の元を全体の集合とする。このとき, A が (S_2) を満たすための必要十分条件は $A = A^{(1)}$ となることである。

定理2の系 B をネーター環, A を B の部分環で, B において seminormal なものとする. B は有限 A 加群で, Γ を A の B における導写とする. もし Γ の A における素因子子で $\text{ht} \geq 2$ となるものが存在し, Γ が B の正則元を含めば, A は (S_2) を満たさない.

これは Traverso [3] の定理 2.1 と上述の定理 2 から容易に証明出来る. 又, A, B, Γ を定理 2 の系と同じとし, B が (S_2) を満たすとする. このとき, Γ の B におけるすべての素因子の高さが 1 であっても, A は (S_2) を満たすとは限らない例が存在する.

4. 最後に, 準局所環の極大イデアルの結び合わせについて考えてみる. A をネーター局所環, \mathfrak{m} をその極大イデアル, k を剰余体 A/\mathfrak{m} とする. このとき, \mathfrak{m} の重複度 $e_A(\mathfrak{m})$, 埋め込み次元 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, 次級環 $\sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ をそれぞれ $e(A)$, $\text{embdim}(A)$, $G(A)$ とあらわす. 更に, $G(A)$ のイデアル $\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ を $G(A)^+$ とかく. この時, 次の結果を得る.

命題 3. B をネーター準局所環, π_1, \dots, π_n をその極大イデアルとする. A を B の局所部分環, \mathfrak{m} を A の極大イデアルと

し, B は A と異なり, 有限 A -加群とする. このとき, 次は同値である:

- (i). A は B の seminormal で, A の B における素数は \mathfrak{m} -primary.
- (ii) A は $(B; \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_n)$ の貼り合わせである.
- (iii) $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{r}_n$.
- (iv). $A \hookrightarrow B$ から自然に得られる準同型 $f: \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ は全射である. ただし, $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{r}_n$.
- (v). f は全単射である.
- (vi) $\mathfrak{m}^2 \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ で, $\text{embdim}(A) = \sum_{i=1}^n [k(\mathfrak{r}_i) : k(\mathfrak{m})] \text{embdim}(B_{\mathfrak{r}_i})$
- (vii) f は $G(A)^+$ と $G(B_{\mathfrak{r}_1})^+ \oplus \dots \oplus G(B_{\mathfrak{r}_n})^+$ の間の全単射を引きおこす.

命題 4. k を代数閉体, A を k 上定義された代数的多様体の
 曲線の局所環, B を商体 $Q(A)$ における A の整閉被, $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_n$
 を B の極大イデアルとする. このとき, 次は同値である:

- (i) B は正則で, A は $(B; \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_n)$ の貼り合わせである.
- (ii). $e(A) = n$ で, もし $e(A) > 1$ なら A の B における素数は A の極大イデアルに等しい.

命題 4. の (ii) において, 素数についての条件は省けない. 実

際, A を平面曲線の通常3重点の局所環とすると, $e(A)=3$ で, B の極大イデアルも丁度3個であるが, $A \neq B$ で *seminormal* でないからである.

以上の結果の証明の詳細は [4] を参照されたい.

参考文献

- [1] C. Pedrini, "Incollamenti di ideali primi e gruppi di Picard." *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 48(1973), 39-66.
- [2] G. Tamone, "Sugli incollamenti di ideali primi." *Bollettino U.M.I.*, 14(1977), 810-825.
- [3] C. Traverso, "Seminormality and Picard group" *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 24(1970), 585-595.
- [4] H. Yanagihara, "On glueings of prime ideals" to appear in *Hiroshima Math. J.*