

1次元 seminormal rings の完備化について

阪大 理 小野田 信春

序. X を体 k 上に定義された代数多様体、 P を X の閉点とする。このとき、 P が seminormal であるとは、局所環 $\mathcal{O}_{P,X}$ が seminormal になることであると定義する。この定義のもとで、特に X が代数曲線の場合には、Bombieri, Davis 等によって、 P が seminormal であるための必要十分条件は、 P が ordinary multiple point with distinct tangents になることであることがわかっている。以下では、彼らの結果の後を受けて、まず1次元 seminormal 局所環の完備化による特徴付けを与える。そして、更にこの結果に関連して、平面代数曲線の通常特異点における局所環の seminormalisation を決定することについても考えてみたい。

§ 0.

以下用いる記号や仮定等についてまとめておく。 (A, m) は被約な局所環で、 k をその剰余体とする。ここで、 A は係

数体をもつ、即ち $C \subset A$ であるとし、更に、 A の Krull 次元は 1 であるとする。 D を A の全商環の中での A の整閉包とし、かつ D は有限生成 A -加群になっていると仮定する。 $M_1, \dots, M_n$ を D の極大イデアルの全体、 $J = M_1 \cap \dots \cap M_n$ を D の Jacobson 根基とする。 $k_i = D/M_i$, $k = D/J$ とおく。すると、 $k = k_1 e_1 + \dots + k_n e_n$ とかける。ただし、ここで、 $1 = e_1 + \dots + e_n$ は、1 のべき等元分解である。以上の仮定のもとでは、次のことがいえる。

Criterion 0.1. A が *reminormal* であるための必要十分条件は、 $\mathfrak{m} = J$ となることである。

以下を通じて、 x, y, t, x_i 等はすべて不定元（又は変数）を表わすものとする。環 R に対し、 $J(R)$ で R の Jacobson 根基を、 $Q(R)$ で R の全商環を表わす。また、 $\cong_R$ は、 R -多元環の同型を表わすものとする。更に、 R が半局所環で、 N が有限生成 R -加群のとき、 $\hat{N}$ で N の $J(R)$ 進完備化を表わす。

最後に、係数体 C は、常に完全体であると仮定する。

§ 1. 1次元 *reminormal* 局所環の完備化

まず、次の事実から始める。

補題 1.1. $(A, \mathfrak{m})$ は上の通りとする。このとき、次は互いに同値である。

(1) A は *reminormal* である。

(2)

(2) $\hat{A} \cong_k k + t k[[t]]$ 。ただし、 $k + t k[[t]] = \{f(t) \in k[[t]] ; f(0) \in k\}$ であって、我々は、これを k -多元環とみなす。

(3) $\hat{A}$ は seminormal である。

証明. D は 1 次元正規半局所環ゆえ、 $\hat{D} \cong_k k[[t]]$ 、かつ $J(\hat{D}) = \hat{J} \cong_k t k[[t]]$ である。ここで、 $\hat{A}$ の $Q(\hat{A})$ における整閉包は $\hat{D}$ に等しいことに注意する。

(1) $\Rightarrow$ (2): $\hat{A}$ は被約 1 次元局所環で、 $\hat{m}$ はその極大イデアルである。 A は seminormal ゆえ、 $m = J$ となることに注意すれば、 $\hat{A} \cong_k k + \hat{m} = k + \hat{J} \cong_k k + t k[[t]]$ を得る。

(2) $\Rightarrow$ (3): $\hat{A} \cong_k k + t k[[t]]$ ゆえ、 $\hat{A}$ は被約な 1 次元局所環で $t k[[t]]$ がその極大イデアルである。ここで、 $t k[[t]] = J(\hat{D})$ であるから、Criterion 0.1. により、 $\hat{A}$ は seminormal である。

(3) $\Rightarrow$ (1): $\hat{A}$ は seminormal ゆえ $\hat{m} = \hat{J}$ となる。ここで、 $\hat{m} \cong_A m \otimes_A \hat{A}$ かつ $\hat{J} \cong_A J \otimes_A \hat{A}$ であり、更に $\hat{A}$ は A 上忠実平坦である。従って、 $m = J$ となり、Criterion 0.1. により、 A は seminormal である。
(証明終わり)

k は完全体と仮定したから、 k_i は k の単純拡大体である。そこで、 $k_i = k(\alpha_i)$ とする。 $[k_i : k] = n_i$ とおくとき、 k_i の k 上の基底として、 $1, \alpha_i, \dots, \alpha_i^{n_i-1}$ がとれる。各基底 α_i^j に対して、変数 x_{ij} を用意し、 k -多元環の準同型写像

(3)

$\sigma: k[[\dots, x_{ij}, \dots]] \rightarrow k[[t]]$ を、 $\sigma(x_{ij}) = \alpha_i^j t$ で定義する。(ただし、 $0 \leq j < n_i, 1 \leq i \leq n$) このとき、明らかに、 $I_m \sigma \cong_k k + t k[[t]]$ である。従って、 $I = \ker \sigma$ とおけば、補題 1.1 より次のことがいえる。“ A が seminormal であるための必要十分条件は、 $\hat{A} \cong_k k[[\dots, x_{ij}, \dots]] / I$ となることである。” 以下、 I の生成元を具体的に求めてみる。

I_0 を $x_{ij} x_{kl}$ (ただし、 $i \neq k$) の形の元全体で生成された $k[[\dots, x_{ij}, \dots]]$ のイデアルとする。 $F \in k[[\dots, x_{ij}, \dots]]$ を任意にとり、 $F = F_0 + F_1 + \dots + F_n$ と書く。ただし、ここで $F_0 \in I_0$ かつ $F_i \in k[[x_{i0}, \dots, x_{in_i-1}]]$ である。このとき、明らかに、 $F \in I$ であるための必要十分条件は、 $1 \leq i \leq n$ に対して、 $F_i \in I$ となることである。従って、 $\sigma_i(x_{ij}) = \alpha_i^j t$ で定義された k -多項式環の準同型写像 $\sigma_i: k[[x_{i0}, \dots, x_{in_i-1}]] \rightarrow k_i[[t]]$ の核を I_i とおけば、 I は $I_0, I_1, \dots, I_n$ で生成されることがわかる。従って、 I の生成元を求めるには、各 I_i の生成元を求めればよい。つまり、次の補題が示せば十分である。

補題 1.2. $k(\alpha)$ を k の単純拡大とし、 $[k(\alpha):k] = n$ とする。 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ を α の k 上の最小多項式とする。 k -多項式環準同型 $\sigma: k[[x_0, \dots, x_{n-1}]] \rightarrow k(\alpha)[[t]]$ を $\sigma(x_i) = \alpha^i t$ で定義し、 $I = \ker \sigma$ とおく。 $\xi_m = x_{[\frac{m}{2}]} x_{m-[\frac{m}{2}]}$

(4)

(ただし、 $[]$ はガウス記号) とおくとき、 I は次の 2 次の同次多項式で生成される。

$$\psi_{ij} = x_i x_j - \xi_{i+j} \quad (0 \leq i, j \leq n-1)$$

$$\varphi_m = \sum_{\nu=0}^n a_\nu \xi_{\nu+m} \quad (0 \leq m \leq n-2)$$

証明. I' を上の ψ_{ij} 及び φ_m で生成された $k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ のイデアルとして、 $I = I'$ を示す。 $I' \subseteq I$ は明らかである。逆の包含をいうために、まず次の事実を示す。“任意の、2 以上の次数 N をもつ単項式 W に対し、 x_0 を因数にもつ有限個の次数 N の単項式 W_ν をえらんで、 $W \equiv \sum_\nu W_\nu \pmod{I'}$ となるようにできる。” これを示すには、次数についての帰納法により、 $N=2$ の場合についてみれば十分である。そこで $W = C x_i x_j$ とする。このとき、もしも $i+j \leq n-1$ ならば、 $C x_i x_j \equiv C x_0 x_{i+j} \pmod{I'}$ となって証明は終わる。 $i+j \geq n$ としよう。このとき、 $m = i+j - n$ とおけば、 $0 \leq m \leq n-2$ であって、更に、

$$x_i x_j = \psi_{ij} + \varphi_m - (a_{n-1} \xi_{n-1+m} + \dots + a_0 \xi_m)$$

$$\equiv - (a_{n-1} \xi_{n-1+m} + \dots + a_0 \xi_m) \pmod{I'}$$

となる。ここで $m \leq \nu \leq n+m-1$ をみたす各 ν に対し、 $[\frac{\nu}{2}] + (\nu - [\frac{\nu}{2}]) = \nu < n+m = i+j$ となることに注意する。従って、もし必要ならば、今の議論を何度か繰り返すことにより、 $x_i x_j \equiv \sum_{\nu, \mu} b_{\nu\mu} x_\nu x_\mu \pmod{I'}$ (ただし、ここ
(5))

で、 $c_{\nu\mu} \in k$ 、かつ $\nu + \mu \leq n - 1$) とできることがわかる。

このとき、 $W = c_{ij} x_i x_j \equiv \sum_{\nu, \mu} c_{\nu\mu} x_0 x_{\nu+\mu} \pmod{I'}$ となる。よって主張は示された。

さて、 $F \in I$ を任意にとる。 $F = \sum_{N=0}^{\infty} F_N$ 、(ここに、 F_N は N 次の同次多項式) を F の同次多項式への分解とする。このとき、 $\sigma(F) = \sum_{N=0}^{\infty} c_N t^N$ ($\exists c_N \in k$) となるから、 $F \in I$ となるためには、各 $F_N \in I$ となることが必要十分である。そこで最初から、 F は N 次の同次多項式であると仮定してよい。このとき、明らかに $N \geq 2$ である。よって、今証明した事実により、 $F \equiv x_0 G \pmod{I'}$ となる同次多項式 $G \in k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ が存在する。すると、 $x_0 G - F \in I' \subseteq I$ かつ $F \in I$ より $x_0 G \in I$ である。 I は素イデアルであり、また $x_0 \notin I$ であるから、 $G \in I$ となる。ここで、もしも $G = 0$ ならば、 $F \equiv x_0 G = 0 \pmod{I'}$ ゆえ $F \in I'$ となる。もしも、 $G \neq 0$ ならば、 G の次数は $N - 1$ に等しい。そこで、次数についての帰納法を使えば、 $G \in I'$ 、従って $F \in I'$ となることがわかる。つまり、 $I \subseteq I'$ が示された。よって $I = I'$ である。

(証明終わり)

この補題により、次がいえた。

定理 1.3. (A, m) , k , k_i 等は、最初に定めた通りとする。 $k_i = k(\alpha_i)$, $[k_i : k] = n_i$ とし、 $f_i(x) = \sum_{\nu=0}^{n_i} a_{i\nu} x^\nu$
(6)

K 上 α_i の最小多項式とする。 $K[[\dots, x_{ij}, \dots]]$ (ただし、 $1 \leq i \leq n, 0 \leq j < n_i$) を K 上の形式的べき級数環とし、 $\xi_{i,m} = x_{i[\frac{m}{2}]} x_{i[m-\frac{m}{2}]}$ とおき、 I を次の 2 次の同次多項式で生成された $K[[\dots, x_{ij}, \dots]]$ のイデアルとする。

$$g_{ijk\ell} = x_{ij} x_{k\ell} \quad (i \neq k)$$

$$\psi_{ik\ell} = x_{ik} x_{i\ell} - \xi_{i,k+\ell} \quad (0 \leq k, \ell \leq n_i - 1, 1 \leq i \leq n)$$

$$\varphi_{im} = \sum_{v=0}^{n_i} a_{iv} \xi_{i,v+m} \quad (0 \leq m \leq n_i - 2, 1 \leq i \leq n)$$

このとき、 A が seminormal であるための必要十分条件は、

$$\hat{A} \cong_K K[[\dots, x_{ij}, \dots]] / I \quad \text{となることである。}$$

Example 1.4. 例として、 $[K:K] = 3$ の場合を考える。
このとき、 A を seminormal とすれば、次の 3 つの場合がある。

Case 1 $n = 3$: このときは $K_1 = K_2 = K_3 = K$ であって、

$$\hat{A} \cong_K K[[x, y, z]] / (xy, yz, zx)$$

Case 2 $n = 2$: このときは $K_1 = K, K_2 = K(\alpha)$ で

$[K_2:K] = 2$ となる。 $x^2 + ax + b$ を α の K 上の最小多項式とすれば、次を得る。

$$\hat{A} \cong_K K[[x, y, z]] / (xy, y^2 + ayz + bz^2, zx)$$

Case 3 $n = 1$: このときは $K = K(\beta)$ で $[K:K] = 3$ となる。 $x^3 + ax^2 + bx + c$ を β の K 上の最小多項式とすれば次を得る。

$$\hat{A} \cong_{\mathbb{k}} \mathbb{k} \ll x, y, z \gg / (x^2 + axy + by^2 + cz^2, y^2 - xz, xy + ay^2 + byz + cz^2)$$

注意. A が *seminormal* であるとして、 $\hat{A}$ の形を具体的に求めることは、 $\mathbb{k}$ が完全体であることを (つまり、各 k_i が $\mathbb{k}$ 上単純拡大体であることを) 仮定しなくても可能である。

詳細は [3] 参照。

注意. Davis により、次の事実が示されている ([2] 参照)。

“($A, \mathfrak{m}$) 等は §0 に固定したものと同一とする。 $\mathcal{G}_m^{\bullet}(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1}$ とするとき、次は同値である。(1) A は *seminormal* である。(2) $\mathcal{G}_m^{\bullet}(A) \cong_{\mathbb{k}} \mathbb{k} + t\mathbb{k}[t]$ 。(3) $\mathcal{G}_m^{\bullet}(A)$ は *seminormal* である。” この事実から始めて、以上と全く同じ議論を (形式的べき級数環を多項式環におき代えて) 行なえば、次の結果を得る。“ A が *seminormal* であるための必要十分条件は $\mathcal{G}_m^{\bullet}(A) \cong_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[\dots, x_{ij}, \dots] / I$ となることである。ただし、ここで、 I の生成元は、定理 1.3. において定めたものと、全く同じである。”

§ 2. 代数曲線の局所環の *seminormalization*

本節では、 $\mathbb{k}$ は完全体であって、かつ無限体である (例えば標数が 0 である) と仮定する。

さて、 X を体 $\mathbb{k}$ 上定義された被約な平面代数曲線、 P を X の閉点とする。このとき、最初にも述べたように、 P が *seminormal* であるためには、 P が単純点であるか、又は、結

節点であるかのいずれかであることが必要十分条件である。
従って、 P が X の特異点であって、かつ結節点でないような場合には、 P は *seminormal* ではなくなる。そこで、このような特異点 P に対して、 $\mathcal{O}_{P,X}$ の *seminormalization* を実際に求めることについて考えてみる。

この目的のためには、 X は 2 変数多項式 $F(x, y) \in k[x, y]$ で定義された、アフィン代数曲線であって、かつ P は原点であると仮定してよい。そこで、 $F(x, y) = \sum_{i+j \geq n} a_{ij} x^i y^j$ とする。適当な一次変換により、 $a_{0n} \neq 0$ とできるから、最初から $a_{0n} = 1$ と仮定しておく。このとき、 P が通常 n 重点であるとは、 $\bar{k}[x, y]$ (ただし、 $\bar{k}$ は k の代数閉包を表わす) において、互いに相異なる n 個の元 $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \bar{k}$ があって、 $\sum_{i+j=n} a_{ij} x^i y^j = (y - \alpha_0 x) \cdots (y - \alpha_{n-1} x)$ と表わされることであると定義する。こう定義したとき、通常 n 重点 P に対しては、 $\mathcal{O}_{P,X}$ の *seminormalization* を具体的に定めることができる。以下では、このことをみていく。そのために、まず次の補題を準備しておく。

補題 2.1. R を被約、1 次元、ノーター的な k -多元環とし $\bar{k}$ を k の拡大体とする。このとき、 R が *seminormal* であるための必要十分条件は、 $R \otimes_k \bar{k}$ が *seminormal* になることである。

証明. まず最初に、 $(R, \mathfrak{f})$ が局所環の場合に証明する。

(9)

このときは、 L が良上分離拡大体ゆえ、 $R \otimes L$ は被約な 1 次元半局所環で、 $J(R \otimes L) = \mathfrak{f} \otimes L$ である。また、 R の $\mathcal{Q}(R)$ における整閉包を $\bar{R}$ とするとき、 $R \otimes L$ の $\mathcal{Q}(R \otimes L)$ における整閉包は、 $\bar{R} \otimes L$ である。そこで、まず R が *seminormal* であるとする。このとき、 $\mathfrak{f} = J(\bar{R})$ 。 P を $R \otimes L$ の、 $\mathbb{Z}$ 極大イデアルとする。すると、 $J((R \otimes L)_P) = (\mathfrak{f} \otimes L)_P = (J(\bar{R}) \otimes L)_P = J((\bar{R} \otimes L)_P)$ 。よって、*Criterion 0.1* により、 $(R \otimes L)_P$ は *seminormal* である。 P は任意ゆえ、従って $R \otimes L$ は *seminormal* である。逆に、 $R \otimes L$ が *seminormal* であるとする。このとき、 $\mathbb{Z}$ 極大イデアル P に対し、上の等式を逆にみて、 $(\mathfrak{f} \otimes L)_P = (J(\bar{R}) \otimes L)_P$ を得る。ここで、 $\mathfrak{f} \otimes L \subseteq J(\bar{R}) \otimes L$ かつ、両者は $R \otimes L$ -加群の構造をもたせることができる。 P は任意ゆえ、このことから、 $\mathfrak{f} \otimes L = J(\bar{R}) \otimes L$ となり、従って、 $\mathfrak{f} = J(\bar{R})$ を得る。ゆえに、 R は *seminormal* である。次に、一般の場合に戻る。 R が *seminormal* であるとする。 P を $(R \otimes L)$ の $\mathbb{Z}$ 極大イデアルとし、 $P \cap R = \mathfrak{f}$ とおく。すると、 $(R \otimes L)_P$ は $(R \otimes L)_{\mathfrak{f}} = R_{\mathfrak{f}} \otimes L$ を局所化したものであり、かつ仮定より、 $R_{\mathfrak{f}}$ 、従って $R_{\mathfrak{f}} \otimes L$ は *seminormal* となる。よって、 $(R \otimes L)_P$ は *seminormal* となり、ここで、 P は任意ゆえ、 $R \otimes L$ が *seminormal* になることがわかる。逆に、 $R \otimes L$ が *seminormal* であると仮定する。 R の $\mathbb{Z}$ 極大イデアル $\mathfrak{f}$

に対し、 $S = (R \otimes L)_f = R_f \otimes L$ を考える。 S の極大イデアルは、 $P = P(R \otimes L)_f$ (ここで、 P は $R \otimes L$ の極大イデアル) の形であり、従って、 $S_P = (R \otimes L)_P$ となるから、仮定より、 S_P は *reminormal* である。よ、前半で示したことにより、 R_f は *reminormal* になることがわかる。ここで、 f は任意ゆえ、 R は *reminormal* である。 (証明終わり)

もう一つ、次の補題を用意する。

補題 2.2. 多項式環 $k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ において、 $\psi_{ij} = x_i x_j - \xi_{i+j}$ ($0 \leq i, j \leq n-1$, ξ_{i+j} の定義は前節と同じ) とおき、各 ψ_{ij} で生成されたイデアルを I_0 とおく。このとき、もしも、 $i_1 + \dots + i_m = j_1 + \dots + j_m$ ならば、 $x_{i_1} \dots x_{i_m} \equiv x_{j_1} \dots x_{j_m} \pmod{I_0}$ である。

証明は易しいから、省略する。

さて、 $F(x, y) = \sum_{i+j \geq n} a_{ij} x^i y^j$ (ただし、 $a_{0,n} = 1$) とする。 $i+j \geq n$ を満たす順序対 (i, j) に対し、2つの整数 s_{ij}, t_{ij} を、 $0 \leq s_{ij} \leq i, 0 \leq t_{ij} \leq j, s_{ij} + t_{ij} = n$ 、となるようにえらぶ。そして、多項式環 $k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ において、 $\psi_{ij} = x_i x_j - \xi_{i+j}$ ($0 \leq i, j \leq n-1$)、及び、 $\tilde{\varphi}_m = \sum_{i+j \geq n} a_{ij} x_0^{i-s_{ij}} x_1^{j-t_{ij}} \xi_{m+t_{ij}}$ ($0 \leq m \leq n-2$) とおき、 $\psi_{ij}, \tilde{\varphi}_m$ 全体で生成されたイデアルを I とおく。ここで、補題 2.2. により、 I は、 s_{ij}, t_{ij} のえらび方によらず、一意的に定

(11)

まことに注意しておく。このとき、まず、次の補題を示す。

補題 2.3. $F(x, y)$, ψ_{ij} , $\tilde{\varphi}_m$, 及び I は上の通りであると
する。このとき、 $x \mapsto x_0$, $y \mapsto x_1$ で定義される環準同型写
像 $(k[x, y]/(F(x, y)))_{(x, y)} \rightarrow (k[x_0, \dots, x_{n-1}]/I)_{(x_0, \dots, x_{n-1})}$ は、
単射・双有理的かつ整である。ただし、 $n \geq 2$ とする。

証明. 3段階に分けて証明する。

Step 1. $x \mapsto x_0$, $y \mapsto x_1$ で定義された単射準同型により、
 $k[x, y]$ を $k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ の部分環とみなす。このとき、 $I \cap$
 $k[x, y] = F(x, y) k[x, y]$ である。

証明. I_0 と ψ_{ij} により生成された $k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ のイデア
ルとする。このとき、補題 2.2. により、

$$x_0^{n-2} \tilde{\varphi}_0 \equiv \sum_{i,j \geq n} a_{ij} x_0^i x_1^j \equiv F(x_0, x_1) \pmod{I_0}$$

である。従って、 $F(x, y) \in I \cap k[x, y]$ となり、 $F(x, y) k[x, y]$
 $\subseteq I \cap k[x, y]$ を得る。逆に、 $G(x, y) \in I \cap k[x, y]$ を任意
にとる。すると、ある h_{ij} , $g_m \in k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ があって、

$$G(x_0, x_1) = \sum_{i,j} h_{ij} \psi_{ij} + \sum_{m=0}^{n-2} g_m \tilde{\varphi}_m$$

と表わせる。ここで、再び補題 2.2. により、任意の $0 \leq m \leq$
 $n-2$ をみたす m に対し、

$$x_0^{n-1} \tilde{\varphi}_m \equiv \sum_{i,j \geq n} a_{ij} x_m x_0^i x_1^j \equiv x_m F(x_0, x_1) \pmod{I_0}$$

となることに注意する。従って、このことより、

$$x_0^{n-1} G(x_0, x_1) = x_0^{n-1} \sum_{i,j} h_{ij} \psi_{ij} + \sum_{m=0}^{n-2} g_m \cdot x_0^{n-1} \tilde{\varphi}_m \quad (12)$$

$$\equiv x_0^{n-1} \sum_{i,j} h_{ij} \psi_{ij} + \left(\sum_{m=0}^{n-2} x_m g_m \right) F(x_0, x_1) \pmod{I_0}$$

となる。よって、 $g(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{m=0}^{n-2} x_m g_m$ とおけば、ある $\tilde{h}_{ij} \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n-1}]$ があって、

$$x_0^{n-1} G(x_0, x_1) = \sum_{i,j} \tilde{h}_{ij} \psi_{ij} + g(x_0, \dots, x_{n-1}) F(x_0, x_1)$$

とできることがわかる。このとき、 $\tilde{g}(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ を、ある整数 $N > 0$ があって、任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し、 $\tilde{g}(x, \alpha x) = x^N g(x, \alpha x, \dots, \alpha^{n-1} x)$ が成り立つようにえらぶ。(このような $\tilde{g}(x, y)$ が存在することは容易にわかる。) そこで、 $\alpha \in \mathbb{K}$ を任意にとる。そして、等式

$$x_0^{N+n-1} G(x_0, x_1) = x_0^N \sum_{i,j} \tilde{h}_{ij} \psi_{ij} + x_0^N g(x_0, \dots, x_{n-1}) F(x_0, x_1)$$

の両辺に、 $x_i = \alpha^i x$ ($0 \leq i \leq n-1$) を代入する。このとき、 ψ_{ij} が $\alpha^{ij} x^2 - \alpha^{(i+j)} x^2 = 0$ になることに注意すれば、

$$x^{N+n-1} G(x, \alpha x) = \tilde{g}(x, \alpha x) F(x, \alpha x)$$

となることがわかる。従って、 $x^{N+n-1} G(x, y) - \tilde{g}(x, y) F(x, y)$

は、 $\mathbb{K}[x, y]$ において、 $y - \alpha x$ でわり切れる。ここで、 $\alpha \in \mathbb{K}$ は任意かつ、 $\mathbb{K}$ は無限体と仮定したから、 $x^{N+n-1} G(x, y) - \tilde{g}(x, y) F(x, y)$ は恒等的に 0 でなければならぬ。よって、 $x^{N+n-1} G(x, y) = \tilde{g}(x, y) F(x, y)$ を得る。ここで、 $a_{0n} = 1$ と仮定したから、 $F(x, y)$ は x でわり切れぬ。従って、 $\tilde{g}(x, y)$ は x^{N+n-1} でわり切れなければならぬ。このことは、つまり $G(x, y) \in F(x, y) \mathbb{K}[x, y]$ となることを示している。従って、

逆の包含、 $I \cap k[x, y] \subseteq F(x, y)k[x, y]$ が証明できた。

Step 2. Step 1. により、 $x \mapsto x_0, y \mapsto x_1$ で定義された単射環準同型 $k[x, y]/(F(x, y)) \hookrightarrow k[x_0, \dots, x_{n-1}]/I$ を得る。 R を $k[x_0, \dots, x_{n-1}]/I$ の素イデアルで、 $\bar{x}_0, \bar{x}_1$ を含むようなものとする。(ここで、 $\bar{}$ は標準的写像 $k[x_0, \dots, x_{n-1}] \rightarrow k[x_0, \dots, x_{n-1}]/I$ による像を表わす。) すると、このとき、 R は $(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1})$ に等しい。

証明. $i \leq n-3$ に対し、 $\bar{x}_i \in R$ とする。すると、 $\bar{x}_{i+1}^2 = \bar{x}_i \bar{x}_{i+2} \in R$ ゆえ、 $\bar{x}_{i+1} \in R$ となる。よって、 $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-2} \in R$ である。他方、 $\tilde{\varphi}_{n-2} \in I$ ゆえ、 $\overline{\varphi}_{n-2} = 0$ であり、かつ定義より、 $\tilde{\varphi}_{n-2} = x_{n-1}^2 + \eta$ (ここで、 $\eta \in (x_0, \dots, x_{n-2})k[x_0, \dots, x_{n-1}]$) と書ける。従って、 $\bar{x}_{n-1}^2 \in (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-2}) \subseteq R$ となり、 $\bar{x}_{n-1} \in R$ を得る。ゆえに、 $(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1}) \subseteq R$ であるが、明らかに、 $(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1})$ は $k[x_0, \dots, x_{n-1}]/I$ の極大イデアルであるから、従って、両者は一致しなければならない。

Step 3. $x \mapsto x_0, y \mapsto x_1$ で定義された環準同型写像、
 $(k[x, y]/(F(x, y)))_{(x, y)} \rightarrow (k[x_0, \dots, x_{n-1}]/I)_{(x_0, \dots, x_{n-1})}$ は、単射双有理的、かつ整である。

証明. $B = k[x, y]/(F(x, y)), C = k[x_0, \dots, x_{n-1}]/I$ とおく。
 また、 $\mathcal{P} = (x, y)B, R = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1})C$ とおく。 C において、 $1 \leq i \leq n-1$ に対し、 $\bar{x}_i \bar{x}_0^{i-1} = \bar{x}_1^i$ であり、かつ $\bar{x}$ は B

(14)

の正則元であることを注意する。従って、 $C_f \subseteq Q(B_f)$ となることかわかる。そこで、まず C_f が B_f 上整であることを示そう。実際 B において、 $F(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i+j=n} a_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j = 0$ であるから、このことより、 $(\bar{x}_i / \bar{x}_0)$ が B_f 上整であることかわかる。従って、 $\bar{x}_i = \bar{x}_i (\bar{x}_i / \bar{x}_0)^{i-1} \in Q(B_f)$ も再び B_f 上整となる。 C_f は B_f 上 $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}$ で生成されるゆえ、 C_f は B_f 上整である。さて、 $\mathfrak{p}_f C_f$ を C_f の極大イデアルとする（ここには、 $\mathfrak{p}_f$ は C の極大イデアル。）すると、 $\mathfrak{p}_f C_f \cap B_f = \mathfrak{f} B_f$ ゆえ、 $\mathfrak{p}_f \cap B = \mathfrak{f}$ を得る。よって、Step 2. により $\mathfrak{p}_f = \mathfrak{p}$ でなければならぬ。つまり C_f は局所環である。このことから $C_{\mathfrak{p}} = C_f$ となることかわかる。従って、すべてこの主張が示された。

(証明終わり)

次に、補題 2.5. をいうために、1つの補題を用意する。

補題 2.4. L を体とし、 $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ を互いに相異なる L の元とする。 $(x - \alpha_0) \cdots (x - \alpha_{n-1}) = \sum_{v=0}^n a_v x^v$ により、 $a_0, \dots, a_n$ を定め、 $k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ において、 $\psi_{ij} = x_i x_j - \xi_{ij}$ ($0 \leq i, j < n$)
 $\varphi_m = \sum_{v=0}^n a_v \xi_{v+m}$ ($0 \leq m \leq n-2$) とおき、 ψ_{ij}, φ_m で生成された $k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ のイデアルを $\tilde{I}$ とおく。このとき、 k -多元環準同型、重: $k[x_0, \dots, x_{n-1}] \rightarrow k[y_0, \dots, y_{n-1}]$ を、重(x_i)
 $= \alpha_0^i y_0 + \dots + \alpha_{n-1}^i y_{n-1}$ ($0 \leq i \leq n-1$) で定義すれば、重は同型であって、イデアル重($\tilde{I}$) は $y_i y_j$ (ただし、 $i \neq j$) の全

体で生成される。

証明. 重の Jacobian 行列式は、(1) における Vandermonde の行列式であって、仮定よりそれは 0 でない。よって重は同型である。 $f(x) = (x - \alpha_0) \cdots (x - \alpha_{n-1})$ とおいて、 $f_i(x) = f(x) / f'(\alpha_i)(x - \alpha_i) = \beta_{i0} + \beta_{i1}x + \cdots + \beta_{i,n-1}x^{n-1}$ とおく。このとき、重の逆写像重は、 $\Psi(y_i) = \beta_{i0}z_0 + \cdots + \beta_{i,n-1}z_{n-1}$ で定義される。 $I' = (\cdots, y_i y_j, \cdots) \subseteq k[y_0, \cdots, y_{n-1}]$ (ただし、 $i \neq j$) とおいて、重 $(\tilde{I}) = I'$ を示す。それには、重 $(\tilde{I}) \subseteq I'$ 及び $\Psi(I') \subseteq \tilde{I}$ を示せばよい。重 $(\tilde{I}) \subseteq I'$ は容易に確かめられるから、ここでは、 $\Psi(I') \subseteq \tilde{I}$ のみをいう。 I' の生成元 $y_i y_j$ (ただし $i \neq j$) を任意にとる。このとき、

$$\begin{aligned} \Psi(y_i y_j) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_{ik} z_k \right) \left(\sum_{l=0}^{n-1} \beta_{jl} z_l \right) \\ &= \sum_{k,l} \beta_{ik} \beta_{jl} \psi_{kl} + \sum_{N=0}^{2n-2} \left(\sum_{k+l=N} \beta_{ik} \beta_{jl} \right) \xi_N \end{aligned}$$

となることに注意する。ここで、 $i \neq j$ ゆえ、 $f_i(x) f_j(x)$ は $f(x)$ でわり切れる。よって、ある $c_0, \cdots, c_{n-2} \in L$ があって、

$$\begin{aligned} f_i(x) f_j(x) &= \sum_{N=0}^{2n-2} \left(\sum_{k+l=N} \beta_{ik} \beta_{jl} \right) x^N \\ &= \left(\sum_{v=0}^{n-2} c_v x^v \right) \left(\sum_{v=0}^n a_v x^v \right) = \sum_{N=0}^{2n-2} \left(\sum_{m=0}^{n-2} c_m a_{N-m} \right) x^N \end{aligned}$$

となる。よって、 $\sum_{k+l=N} \beta_{ik} \beta_{jl} = \sum_{m=0}^{n-2} c_m a_{N-m}$ となる。ただし、

以上では、 $v < 0$ または $v > n$ なる v に対しては、 $a_v = 0$ であるとする。これより、次を得る。

$$\Psi(y_i y_j) = \sum_{k,l} \beta_{ik} \beta_{jl} \psi_{kl} + \sum_{m=0}^{n-2} c_m \left(\sum_{N=0}^{2n-2} a_{N-m} \xi_N \right)$$

(16)

ところが、ここで、

$$\sum_{N=0}^{2n-2} a_{N-m} \xi_N = a_0 \xi_m + \dots + a_n \xi_{n+m} = \tilde{\varphi}_m$$

であるから、結局、

$$\Psi(y_i y_j) = \sum_{k, l} \beta_{ik} \beta_{jl} \psi_{kl} + \sum_{m=0}^{n-2} c_m \tilde{\varphi}_m$$

となり、従って、 $\Psi(y_i y_j) \in \tilde{I}$ 、つまり $\Psi(I) \subseteq \tilde{I}$ を得る。

(証明終わり)

そこで、次の補題を示そう。

補題 2.5. $F(x, y) = \sum_{i+j=n} a_{ij} x^i y^j$ (ただし、 $a_{0n} = 1$) とし、

イデアル $I \subset k[x_0, \dots, x_{n+1}]$ は、補題 2.3. と同じであるとする。

ここで、 $\bar{k}[x, y]$ において、 $\sum_{i+j=n} a_{ij} x^i y^j = (y - \alpha_0 x) \dots (y - \alpha_{n-1} x)$

(ただし、 $i \neq j$ のとき $\alpha_i \neq \alpha_j$) であるとせよ。このとき

局所環 $(k[x_0, \dots, x_{n+1}] / I)_{(x_0, \dots, x_{n+1})}$ は *seminormal* である。

証明. $R = (k[x_0, \dots, x_{n+1}] / I)_{(x_0, \dots, x_{n+1})}$ とおき、 $\mathcal{M}$ を R の

極大イデアルとおく。このとき、 $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}^{\bullet}(R) \otimes_{\bar{k}} \bar{k} \cong \bar{k}[y_0, \dots, y_{n+1}] /$

$(\dots, y_i y_j, \dots)$ (ただし、 $i \neq j$) となることをまず示す。実際

$\varphi_m = \sum_{v=0}^n a_{n-v, v} \xi_{v+m}$ とおき、 ψ_{ij} 及び φ_m で生成された

$k[x_0, \dots, x_{n+1}]$ のイデアルを $\tilde{I}$ とおけば、

$$\mathcal{G}_{\mathcal{M}}^{\bullet}(R) \cong_{\bar{k}} k[x_0, \dots, x_{n+1}] / \tilde{I}$$

である。従って、先程の補題 2.4. により、

$$\mathcal{G}_{\mathcal{M}}^{\bullet}(R) \otimes_{\bar{k}} \bar{k} \cong_{\bar{k}} \bar{k}[y_0, \dots, y_{n+1}] / (\dots, y_i y_j, \dots)$$

となることがわかる。よって、このことから、 $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}^{\bullet}(R) \otimes_{\bar{k}} \bar{k}$ は

seminormal である。 ([2] 参照) 従って、補題 2.1. により、 $\hat{g}_m(R)$ は *seminormal* である。故に、 R は *seminormal* である。 ([2] 参照) (証明終わり)

補題 2.3. 及び補題 2.5. をまとめれば、次の定理が得られる。

定理 2.6. X を、 $F(x, y) = \sum_{i+j \geq n} a_{ij} x^i y^j$ (ただし $a_{0n} = 1$) で定義された平面代数曲線、 $P \in X$ を原点 ($x=0, y=0$) とする。このとき、 P が通常 n 重点であるならば (ただし $n \geq 2$) 局所環 $\mathcal{O}_{P,X} = (\mathbb{k}[x, y]/(F(x, y)))_{(x, y)}$ の *seminormalization* は $(\mathbb{k}[x_0, \dots, x_{n-1}]/I)_{(x_0, \dots, x_{n-1})}$ に等しい。ここで、イデアル I は、補題 2.3. において定めたものと同じである。

注意. 上の定理で、 P が通常 n 重点であるという仮定を除いたときは、 $\mathcal{O}_{P,X}$ の *seminormalization* は、次の例が示すように、そう単純ではないといえる。

例 1. $D = (\mathbb{k}[x, y]/(y^2(x+y) - x^4))_{(x, y)}$ とする。このとき D の *seminormalization* D^+ は $(\mathbb{k}[x_0, x_1]/(x_1^2 + x_0 x_1 - x_0^3))_{(x_0, x_1)}$ に等しく、埋め込み $D \hookrightarrow D^+$ は、 $x \mapsto x_1, y \mapsto x_0^2 - x_1$ で与えられる。

例 2. $E = (\mathbb{k}[x, y]/(y^2(x+y) - x^5))_{(x, y)}$ とする。このとき E の *seminormalization* E^+ は

$$(\mathbb{k}[x_0, x_1, x_2]/(x_1^2 - x_0 x_2, x_1 x_2 - x_0 x_1 - x_0^3, x_2^2 - x_1^2 - x_0^2 x_1))_{(x_0, x_1, x_2)}$$

(18)

に等しく、埋め込み $E \hookrightarrow E^+$ は、 $x \mapsto x_0$, $y \mapsto x_2 - x_0$ で与えられる。

通常の特異点の場合は、*seminormalization* は、本質的に、 $F(x, y)$ の *leading form* だけで決まったのに対し、そうではない場合には、上の2つの例からわかるように、様子はかなり複雑になっているようである。

参考文献

- [1] E. Bombieri, *Seminormalità e singolarità ordinarie*, *Symp. Math.* 11 (1973), 205-210.
- [2] E. Davis, *On the geometric interpretation of seminormality*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 68 (1978), 1-5.
- [3] N. Onoda, *On completions of one-dimensional seminormal rings*, manuscript.
- [4] C. Travelfo, *Seminormality and Picard group*, *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Ser 3*, 24 (1970), 585-595.