数理解析研究所講究録
375巻 1980年 170-184

微分方程式の解の特性類

大阪大学理学部　　辻下 徹

§0. 本稿の目的は、Foliationの最近の研究で基本的な役割りを果しているといえる、Bottの消滅定理と、Secondary characteristic classes の概念を、一般の微分方程式に拡張する一つの方法を説明することにある。この方法が与えられた微分方程式に適用出来るのは、その方程式に付随する変分二重複体のスペクトル列のある部分に non zero な元が存在する場合のみである。このスペクトル列の計算や、元の構成の一般的方法は今の所知られていない。しかし、単独方程式については、若干の有用な結果があり、それを用いると、数理物理学に出てくる微分方程式の保存則や symmetry を計算することが出来る場合が多い。

本論に入る前に、例を2つあげ、どういうものを対象とするかを説明しよう。

例1. 波動方程式 $\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0$ に対して、次の様なn形式を考えよう：

$$\omega[u] = \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right\} dx_0 - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i ,$$

ただし、 $dx_i = (-1)^i dx_0 \wedge \cdots \wedge \check{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ $(x_0 = t)$。 このとき、$\square u = 0$ ならば $d\omega[u] = 0$ となる。しかも $\omega[u]$ は universal には exact にならない、即ち、係数が u の微分多項式である様な$n-1$形式 $\eta[u]$ を適当に選んで $\square u = 0$ ならば $d\eta[u] = \omega[u]$ という様にすることは出来ない。 $\square u = 0$ のとき、$d\omega[u] = 0$ であることから、u が無限遠で適当に減少していれば $\int_{t=\text{一定}} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right\} dx_1 \cdots dx_n$ が t によらないことがわかる。この意味で、ω は方程式 $\square u = 0$ で記述される物理系の一つの保存則を与えているといえる。

例2. 自明な束 $\pi : N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to M = \mathbb{R}^n$ 上の接続の可積分性を示す微分方程式を考えよう。 M 上の座標系を $(x^1, \cdots, x^n)$, fibre の座標を t とすると、π の接続は N 上の 1形式 $\varphi = dt - \sum_{i=1}^{n} u^i dx^i$ で与えられる。これが可積分である為の必要充分条件は Frobenius の定理により $d\varphi \equiv 0 \ (\mathrm{mod}.\ \varphi)$。これを成分で書くと

$$(*) \quad \frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i} + \frac{\partial u^i}{\partial t} u^j - \frac{\partial u^j}{\partial t} u^i = 0 \qquad (1 \leq i < j \leq n)$$

という（$n \geq 2$ のとき）過剰決定系を得る。これに対し、

$$\omega[u] := \sum_{1\le i,j\le n}\sum_{0\le k\le n}\frac{\partial u^i}{\partial t}\frac{\partial^2 u^j}{\partial t\partial x^k}\,dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k$$

$(x^0=t)$ と定義すると、(u^i) が(*)を満すとき $d\omega[u]=0$ となり、更に、例1のときと同じ意味で $\omega[u]$ は universal には exact にならない。$\omega[u]$ は (u^i) の決める N 上の余次元1の foliation の Godbillon-Vey 類を代表する3形式となっている。

上の2つの例に出てくる ω は、共に係数が未知函数の微分多項式であり、解を代入すると closed になり、しかも universal には exact にならない。従って、たとえば $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合で de Rham コホモロジーが自明でない様なものの上で考えると、解に対して、ω は一般には non-zero な de Rham コホモロジー類を定義する。この意味で、ω 達は考えている微分方程式の解の特性類を与えるということが出来よう。以下考える対象は上の様な ω である。

問題1. 上の様な ω をすべて見出せ。

§1. 変分二重複体

この節で、一般的用語、記法を定め、変分二重複体と呼ばれる、微分方程式の不変量を導入する。

1.1. $\pi: N^{m+n} \to M^m$ を C^∞ な束とする。 π の C^∞ 切断の全体を ΓN, π の k 階の Jet 束を N_k , $s \in \Gamma N$ の k 階の Jet extension を $s_k (\in \Gamma N_k)$ と書く。

$N_k \to M$ の C^∞ 部分束 R を ΓN 上の k 階の微分方程式と呼び、$s \in \Gamma N$ で $s_k(M) \subset R$ なるものを R の解と呼ぶ。 R の解全体を $Sol(R)$ と書くことにする。

1.2. R の prolongation を導入する為に少し準備をする。射影系 $\{\cdots \to N_{k+1} \to N_k \to \cdots\}$ の極限を N_∞ と書き、 $s_\infty = \lim s_k$ $(s \in \Gamma N)$ とおく。 N_∞ は無限次元だが、 N_k の極限なので、 C^∞ 函数，ベクトル場、微分形式などの概念が自然に定義される（詳しくは [1] 参照のこと）。 たとえば $C^\infty N_\infty = \bigcup C^\infty N_k$。

束 $N_\infty \to M$ は平坦な接続を持つ。即ち

命題 1. N_∞ の接束の m 次元部分束 H で次の様なものが唯一つ存在する。 i) V を $N_\infty \to M$ の fibre に接するベクトルのなす TN_∞ の部分束とすると、 $TN_\infty \cong V \oplus H$. ii) $[\Gamma H, \Gamma H] \subset \Gamma H$. iii) $s_\infty \in \Gamma N_\infty$ $(s \in \Gamma N)$ は H に関し平坦な切断となっている。

証明は iii) を用いて H を構成すれば容易に出来る。

H は M 上のベクトル場 X の持ち上げ $\widehat{X} \in \Gamma TN_\infty$ を定める。 H は平坦なので $\mathcal{L}M \ni X \mapsto \widehat{X} \in \mathcal{L}N_\infty$ は Lie 環の準同型になる。

ここで$\mathcal{L}M$はM上のベクトル場全体のなすLie環。

1.3. $R\subset N_k$に対し、$IR=\{f\in C^\infty N_k\ ;\ f|_R=0\}$、
$I_\infty R=\{\tilde{X}_1\cdots\tilde{X}_\ell f\ ;\ \ell\geq 1,\ X_i\in\mathcal{L}M,\ f\in IR\}\cup IR\ (\subset C^\infty N_\infty)$
とおき、R_∞を、$I_\infty R$の生成する$C^\infty N_\infty$のidealのzero setとする。
このとき、$s\in Sol(R)$ならば$s_\infty(M)\subset R_\infty$となっていることが容易に示される。従って$R_\infty\longrightarrow M$が全射でなければ$Sol(R)=\phi$となる。

以下、次が満されているものとする。

条件　R_∞は$N_\infty\to M$の部分束になっている。

注意　この条件は、Rが具体的に与えられたとき比較的容易に調べられる。微分幾何や数理物理に出てくるRはたいていこの条件を満している。

1.4. 定義からHはR_∞に接していることがわかる。従って$H|_{R_\infty}$は$R_\infty\to M$の平坦な接続を与える。これを再びHと書く。又$R_\infty\to M$のfibreに接するベクトルのなす束をVと書く。
Hはde Rham複体$\{\Omega^* R_\infty, d\}$に二重複体の構造をもたらす。即ち、$\Omega^{p,q}R=\Gamma(\Lambda^p V^*\otimes\Lambda^q H^*)$とおくと、$\Omega^{p,q}R$上
$d=\delta+(-1)^p\partial$　(δ,∂は各dの$(1,0),(0,1)$成分)と分解される。
$d^2=0$より　$\delta^2=\partial^2=0,\ \delta\partial=\partial\delta$を得る。

この二重複体は Gelfand達により <u>変分二重複体</u> と呼ばれている (cf [2])。これは、微分方程式のカテゴリーを適当に定めると、そこから、二重複体のカテゴリーへの反変Functorとなっていて、R の形式的、代数的分析にかなり有用である。次の命題は容易に示されるが、基本的なものである。

<u>命題2.</u> $\tilde{s} \in \Gamma R_\infty$ についての次の条件は互いに同値.

i) $\tilde{s} = s_\infty \quad (\exists s \in Sol(R))$

ii) $\tilde{s}^*\Omega^{1,0} = 0$

iii) $\tilde{s}^*(\oplus_{i>0}\Omega^{i,*}) = 0$.

§2. 例.

波動方程式 $\square u = 0$ の変分二重複体を具体的に記述しよう。まず §1 の様にこの方程式を表示しよう。

$M = \mathbb{R}^{n+1}$, $N = M \times \mathbb{R}$ とおき、M 上の座標系を $(t, x^1, \cdots, x^n)$ $N \to M$ の fibre の座標を u とする。N_2 上の座標系として $\{(t, x^1, \cdots, x^n, u_\alpha \ ; |\alpha| \leq 2)\}$ がとれる。ただし、$\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$) で、$u_\alpha \in C^\infty N_2$ は $s_2^* u_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} s}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ $(s \in \Gamma N)$ で定まるもの。すると $\square u = 0$ は

$$R = \{ u_{2\varepsilon_0} - \textstyle\sum_{j=1}^{n} u_{2\varepsilon_j} = 0 \} \subset N_2$$

で与えられる。ここで $\varepsilon_j = (0, \cdots, 0, \overset{j}{1}, 0, \cdots, 0)$。

N_∞の座標系としては $\{(t, x^i, u_\alpha ; \alpha \in \mathbb{N}^{n+1})\}$ がとれる。命題1の与える $N_\infty \to M$ の接続 H は Pfaff系 $\{\delta u_\alpha = 0 ; \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}\}$ で与えられる。ここで $\delta u_\alpha = du_\alpha - \sum_{i=0}^{n} u_{\alpha+\varepsilon_i} dx^i \quad (x^0 = t)$。従って、$\frac{\partial}{\partial x^i}$ の持ち上げは $\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} u_{\alpha+\varepsilon_i} \frac{\partial}{\partial u_\alpha}$ で与えられる。従って

$$R_\infty = \{\ \partial^\alpha (u_{2\varepsilon_0} - \sum_{j=1}^{n} u_{2\varepsilon_j}) = 0 \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}\},$$

$(\partial^\alpha = \partial_0^{\alpha_0} \cdots \partial_n^{\alpha_n})$。これより R_∞ が $N_\infty \to M$ の部分束なことがわかり、R_∞上の座標系として $\{(x^i, u_{0,\lambda}, u_{1,\lambda} ; 0 \le i \le n, \lambda \in \mathbb{N}^n)\}$ がとれることがすぐにわかる（ $u_{i,\lambda} = u_{i\varepsilon_0 + \hat{\lambda}}|_{R_\infty} \quad (\hat{\lambda} = (0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n))$）。

$H|_{R_\infty}$ は $\{\delta u_\alpha|_{R_\infty} = 0 \ ; \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}\}$ で定義される。上の座標系では $\{\delta u_{0,\lambda} = \delta u_{1,\lambda} = 0 \ ; \lambda \in \mathbb{N}^n\}$ で定義される。ここで

$$\delta u_{0,\lambda} := \delta u_{\hat{\lambda}}|_{R_\infty} = du_{0,\lambda} - u_{1,\lambda} dx^0 - \sum_{j=1}^{n} u_{1,\lambda+\varepsilon_j} dx^j,$$

$$\delta u_{1,\lambda} := \delta u_{\varepsilon_0 + \hat{\lambda}}|_{R_\infty} = du_{1,\lambda} - \sum_{j=1}^{n} u_{0,\lambda+2\varepsilon_j} dx^0 - \sum_{j=1}^{n} u_{1,\lambda+\varepsilon_j} dx^j.$$

以上の準備の下で $\{\Omega^{*,*}R, \delta, \partial\}$ を記述することが出来る。$A = C^\infty(x^i, u_{0,\lambda}, u_{1,\lambda} ; \lambda \in \mathbb{N}^n) = \bigcup_m C^\infty(x^i, u_{0,\lambda}, u_{1,\lambda} ; \ |\lambda| \le m)$ とおくと、

$$\Omega^{p,q} R = A \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^p [\delta u_{0,\lambda}, \delta u_{1,\lambda}] \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^q [dx^i]$$

$$\delta : \quad u_{i,\lambda} \mapsto \delta u_{i,\lambda} \quad , \quad x^j \mapsto 0 \ ,$$

$$\partial : \quad u_{i,\lambda} \mapsto du_{i,\lambda} - \delta u_{i,\lambda} \ , \quad x^j \mapsto dx^j .$$

最後に $\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ を求めておこう。$\partial u_{i,\lambda} = \sum_{j=0}^{n} \partial_j u_{i,\lambda} dx^j$ と書いておくと $\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}} \lrcorner\ \delta u_{j,\lambda} = 0 \ (\forall j, \lambda)$ より

$$\frac{\widehat{\partial}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} + \Sigma_{i,\lambda}\, \partial_j u_{i,\lambda} \frac{\partial}{\partial u_{i,\lambda}}$$

を得る。

§3. 変分二重複体のスペクトル列の解釈

M, N, R を §1の通りとする

3.1. $\Omega^{*,*}R$ に filtration を $F^i = \oplus_{i' \geq i}\, \Omega^{i',*}$ で導入して得られるスペクトル列を $\{E_r^{p,q}, d_r^{p,q}\}$ とする。具体的に書くと、

$E_1^{p,q} = H^q(\{\Omega^{p,*}, \partial\})$

$E_2^{p,q} = H^p(\{E_1^{*,q}, H^q(\delta)\})$

$E_\infty^{p,q} = F^p H^{p+q}(\{\Omega^* R_\infty, d\}) \,/\, F^{p+1}H^{p+q}(\{\Omega^* R_\infty, d\})$。

3.2. $E_1^{0,q}$ の解釈。 $[\omega] \in E_1^{0,q}$ $(\omega \in \Omega^{0,q})$ をとると、

$\underline{\omega}$: $Sol(R) \longrightarrow H^q(M, \mathbb{R})$ が $\underline{\omega}(s) = [\, s_\infty^* \omega\,]$ で定義される。

これは命題2により $d s_\infty^* \omega = s_\infty^* d\omega = s_\infty^* \partial\omega = 0$ だから well-defined。 $\underline{\omega}(s)$ を s の $[\omega]$-characteristic class と呼ぶ。

§0の例1, 2における ω は各々 $E_1^{0,n}$, $E_1^{0,3}$ の nonzero な元を与えていることがわかる。

注意. $H^q(R_\infty, \mathbb{R})$ の元は $Sol(R) \to H^q(M, \mathbb{R})$ を定めるが、これは解のホモトピー類にしかよらない。しかし、$\underline{\omega}$ $(\omega \in E_1^{0,q})$ は、解の変形で一般には値が変化する。Foliation の場合でい

えば前者は primary characteristic class に相当し，後者は secondary characteristic class に相当する。

3.3. $E_1^{1,q}$, $E_2^{0,q}$ の解釈．　$\eta \in E_1^{1,q}$ は，解 s の変形の特性類を与える。詳しいことは略すが，解の C^∞ 1-parameter family $\sigma = \{s_t \,;\, |t| < \varepsilon\}$ があるとき $\underline{\eta}(\sigma) \in H^q(M, \mathbb{R})$ が定まる 更に $\eta = d_1\omega$ $(\omega \in E_1^{0,q})$ のとき $\underline{\eta}(\sigma) = \frac{d}{dt}\underline{\omega}(s_t)\big|_{t=0}$ となる。

従って $E_2^{0,q} = \mathrm{Ker}(d_1 : E_1^{0,q} \to E_1^{1,q})$ の元は，解の変形で不変な写像 $\mathcal{S}ol(R) \to H^q(M, \mathbb{R})$ を与える。しかし，これは必ずしも $H^q(R_\infty, \mathbb{R})$ の元の定めるものにはなっていない。これは Foliation の場合の rigid characteristic classes に相当する。

3.4. E_∞ の解釈．　$[\omega] \in \bigoplus_{i>0,\, i+j\le m} E_\infty^{i,j}$ を non-zero な元とする。このとき

命題3．$\tilde{s} \in \Gamma R_\infty$ が $[\tilde{s}^*\omega] \neq 0$ を満すとき，$\tilde{s}$ は s_∞ $(s \in \mathcal{S}ol(R))$ には変形出来ない。

証明は命題2を用いると自明である。即ち，$\tilde{s}$ が s_∞ $(\exists s \in \mathcal{S}ol(R))$ に変形出来たとすると，$[\tilde{s}^*\omega] = [s_\infty^*\omega] = 0$。

従って $\bigoplus_{i>0} E_\infty^{i,*}$ の元は，形式解が真の解に変形されることへの障害を与えることがわかる。しかし肝心なのはこの元

の構成であるが．これは Bott の消滅定理の場合以外は例はない。　たとえば概複素構造の可積分条件の方程式のとき．relative Gelfand-Fuks コホモロジー $H^*(W_{2n}, W_n^{\mathbb{C}}, R)$ から $E_\infty^{*,*}$ への写像があるが．もしもこれの像に $E_\infty^{+,*}$ に入る non-zero な元があって命題3により．実際に障害を与えたとすると．複素多様体　　の Chern 類の間に普遍的な線型関係があることになり．Chern 類の独立性に矛盾してしまう。

3.5. 問題2. R が与えられたとき．$\{E_r^{p,q}, d_r\}$ を計算せよ．

§4. 自明な微分方程式の変分二重複体

この節では自明な方程式，即ち．$M=\mathbb{R}^m$，$R=N=M\times\mathbb{R}^N$ のときの $E_r^{p,q}$ について述べる．

4.1. 定理1. $M=\mathbb{R}^m$，$R=N=M\times\mathbb{R}^n$ のとき．

i) $E_1^{p,q}\cong\mathbb{R}$ $((p,q)=0)$，(0) $((p,q)\neq 0,\ q\leq m-1)$

ii) $r\geq 2$ のとき $E_r^{p,q}\cong\mathbb{R}$ $((p,q)=0)$，(0) $((p,q)\neq 0)$．

証明は Koszul 複体の結果を用いて代数的にできる (cf [5])．$m=1$ の場合は多くの人により証明されている (e.g. [3])。一般の場合は [4] で announce されている。

4.2. 定理1の応用として Euler-Lagrange 作用素の核と像を決めることが出来る。即ち 今 $A=C^\infty(x^i, u^i_\alpha ; 1\le i\le m, 1\le j\le n, \alpha\in \mathbb{N}^m)$ とし $\partial_j, \frac{\delta}{\delta u^i} : A\to A \quad (1\le j\le m, 1\le i\le n)$ を $\partial_j F=\sum_{i,\alpha} u^i_{\alpha+\varepsilon_j}\frac{\partial}{\partial u^i_\alpha}$, $\frac{\delta F}{\delta u^i}=\sum_\alpha(-\partial)^\alpha\frac{\partial F}{\partial u^i_\alpha}$ で定めると $E_2^{0,m}=(0)$ は次の様に言い直せる:

__系1__. $F\in\partial_1 A+\cdots+\partial_m A \Leftrightarrow \frac{\delta F}{\delta u^j}=0 \quad (1\le j\le N)$.

又 $F\in A$ に対して $D_iF:=\sum_\alpha\frac{\partial F}{\partial u^i_\alpha}\partial^\alpha$, $(D_iF)^+:=\sum_\alpha(-\partial)^\alpha\circ\frac{\partial F}{\partial u^i_\alpha}$ とおくと.

__系2__. $F_j\in A \quad (1\le j\le n)$ に対し

$\exists F: \frac{\delta F}{\delta u^j}=F_j \quad (1\le j\le m) \Leftrightarrow (D_iF_j)^+=D_jF_i \quad (1\le i,j\le m)$.

例. KdV方程式 $F:=u_{0,1}+uu_{1,0}+u_{3,0}$ に対し $DF=\partial_2+u_{1,0}+u\partial_1+\partial_1^3 \neq (DF)^+=-\partial_2-u\partial_1-\partial_1^3$。しかし $u=w_{1,0}$ と変換すると $\widehat{F}=w_{1,1}+w_{1,0}w_{2,0}+w_{4,0}=0$ となり. $D\widehat{F}=(D\widehat{F})^+=\partial_1\partial_2+w_{1,0}\partial_1^2+w_{2,0}\partial_1+\partial_1^4$。そして 実際

$$\widehat{F}=\frac{\delta}{\delta w}\left(\frac{1}{2}ww_{1,1}+\frac{1}{3}ww_{1,0}w_{2,0}+\frac{1}{2}ww_{4,0}\right).$$

§5. $\Box u=0$ の $E_1^{0,n}$ の計算.

波動方程式 $\Box u=0$ の場合. §2 に出てきた係数環 A を

$\bar{A}=\mathbb{R}[u_{i,\lambda}\ ;\ i=0,1,\ \lambda\in\mathbb{N}^n]$ におきかえても同様な構成が出来る。こうして得る二重複体、スペクトル列を再び $\{\Omega^{*,*},\delta,\partial\}$, $\{E_r^{p,q}\}$ と記す。以下、前節の結果を用いて $n\geq 2$ のとき $E_1^{0,n}$ を計算することにしよう。

5.1. $\alpha:\Omega^{0,n}\to\bar{A}$ を $\alpha\omega=J_0$ $(\omega=\Sigma J_i dx^i)$ で定める。$\partial\omega=0$ ならば $\partial_0 J_0=-(\partial_1 J_1+\cdots+\partial_n J_n)\in\bar{A}_n:=\partial_1\bar{A}+\cdots+\partial_n\bar{A}$. 又、$\omega=\partial\eta$ ならば、$J_0\in\bar{A}_n$。従って α は

$$\bar{\alpha}:\ E_1^{0,n}\longrightarrow \mathrm{Ker}(\bar{\partial}_0:\bar{A}/\bar{A}_n\longrightarrow\bar{A}/\bar{A}_n)$$

をひきおこす。ここで $\bar{\partial}_0$ は $\bar{\partial}_0:\bar{A}\to\bar{A}$ から得られるもの。定理1を応用して次を示すことが出来る。

補題1. $\bar{\alpha}$ は同型。

5.2. 系1により、$J\in\bar{A}$ に対し、

$$\partial_0 J\in\bar{A}_n\iff\frac{\delta}{\delta u_0}\partial_0 J=\frac{\delta}{\delta u_1}\partial_0 J=0.$$

ただし、$\dfrac{\delta}{\delta u_i}=\Sigma_{\lambda\in\mathbb{N}^n}(-\partial)^\lambda\dfrac{\partial}{\partial u_{i,\lambda}}$。

次の等式は直接計算によっても、又、∂ と δ の可換性を用いても容易に示される:

補題2. $\dfrac{\delta}{\delta u_0}\partial_0=\partial_0\dfrac{\delta}{\delta u_0}+\Delta\dfrac{\delta}{\delta u_1}$ $\quad(\Delta=\partial_1^2+\cdots+\partial_n^2)$

$$\frac{\delta}{\delta u_1}\partial_0=\partial_0\frac{\delta}{\delta u_1}+\frac{\delta}{\delta u_0}.$$

従って $f_i = \frac{\delta J}{\delta u_i}$ とおくと. $\partial_0 J \in \bar{A}_n \iff$
$\partial_0 f_0 + \Delta f_1 = \partial_0 f_1 + f_0 = 0 \iff (\partial_0^2 - \Delta) f_1 = 0,\ f_0 = -\partial_0 f_1.$

補題3. $n \geq 2$ ならば $(\partial_0^2 - \Delta) f_1 = 0$, $f_0 = -\partial_0 f_1$ の解は

$$f_1 = c + \sum_{\lambda \in \mathbb{N}^n} (a_\lambda u_{0,\lambda} + b_\lambda u_{1,\lambda})$$

$$f_0 = -\sum_{\lambda \in \mathbb{N}^n} (a_\lambda u_{1,\lambda} + b_\lambda \Delta u_{0,\lambda}),$$

$c, a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R}$.

これは微分多項式の Gelfand - Dikii 表示を用いると容易に示される (cf [6])。

最後に 系2を用いると. $f_i = \frac{\delta J}{\delta u^i}$ ($\exists J$) である為には $a_\lambda = 0$ ($|\lambda|$: 偶数), $b_\lambda = 0$ ($|\lambda|$: 奇数) であることが必要かつ十分な条件であることがわかる。 以上で次が証明された。

定理2. $E_1^{0,n}$ は対応 $[\sum J_i dx^i] \mapsto \frac{\delta J_0}{\delta u_1}$ により. $\bar{A}$ の部分空間で、1, $u_{0,\lambda}$ ($|\lambda|$: 奇数), $u_{1,\lambda}$ ($|\lambda|$: 偶数) により張られるものと同型になる。

注意. 1, $2u_{0,\lambda}$, $2u_{1,\lambda}$ に対応する J_0 は各々 $u_{1,0}$, $u_{1,0} u_{0,\lambda} - u_{0,0} u_{1,\lambda}$, $u_{1,0} u_{1,\lambda} - u_{0,0} \Delta u_{0,\lambda}$ である。 とくに. $u_{1,0}$ に対応する $\sum J_i dx^i$ が §0 の例1 の ω である。

§6. 単独方程式

§5と同様な方法で、単独方程式の $E_1^{0,m-1}$, $E_1^{1,m-1}$ を計算しやすい形に書き直すことが出来る。(証明は[ ]参照)

<u>定理3</u>. $M=\mathbb{R}^m$, $N=M\times\mathbb{R}$, $C^\infty N_k \ni K=u_{\ell\epsilon_1}+\tilde{K}$ ($\frac{\partial\tilde{K}}{\partial u_\alpha}=0$ if $\alpha_1\ge\ell$), $R=\{K=0\}\subset N_k$ とする。このとき

i) $E_1^{p,q}=(0)$ $(p,q)\neq(0,0)$, $q\le m-2$,

ii) $E_1^{0,m-1}\xhookrightarrow{d_1}E_1^{1,m-1}\simeq \mathrm{Ker}\,(D(K)^+)$,

iii) $\mathcal{L}^{inv}R_\infty\cong\mathrm{Ker}(D(K))$,

ただし $\mathcal{L}^{inv.}R_\infty=\{X\in\mathcal{L}R_\infty\,;[X,\Gamma H]\subset\Gamma H\}/\Gamma H$.

§4の系2により、$K=\frac{\delta L}{\delta u}$ のとき $D(K)=D(K)^+$. 従って、

<u>系</u>(Noetherの定理) $K=\frac{\delta L}{\delta u}$ ならば

$$E_1^{0,n-1}\hookrightarrow E_1^{1,n-1}\simeq\mathcal{L}^{inv.}R_\infty .$$

<u>例</u>(KdV方程式). $K=u_{0,1}+uu_{1,0}+u_{3,0}=0$. このとき $E_1^{1,1}\simeq\mathrm{Ker}\,(\partial_2+u\partial_1+\partial_1^3)$, $\mathcal{L}^{inv}R_\infty\cong\mathrm{Ker}(\partial_2+u\partial_1+\partial_1^3+u_{1,0})$.
$E_1^{0,1}$ の基底は、係数を微分多項式に限るとKruskal達により求められていたが、定理3を用いると、係数を微分C^∞函数にしても、それが基底になっていることを示せる。

例(BBM方程式). $K=u_{2,1}-u_{0,1}+uu_{1,0}=0$ 。このとき

$(DK)^+ = -\partial_1^2\partial_2 + \partial_2 - u\partial_1$。 $(DK)^+ f = 0$ を解くと、
$\dim E_1^{0,1} = \dim E_1^{1,1} = 3$ がわかる。 (cf [7])

注意　過剰決定系の $\{E_r^{p,q}\}$ の計算法は今の所ない様だが、簡単な消滅定理はある。たとえば self-dual Yang-Mills 方程式 ($\mathbb{R}^4$ 上の) については $E_1^{0,1} = E_1^{0,2} = 0$ は容易に示せる。

REFERENCES

[1] I. N. Bernstein, N. H. Rosenfeld, Uspehi Mat. Nauk. 28(4) (1973), 103-138.

[2] D. B. Fuks, A. M. Gabriélov, I. M. Gelfand, Topology 15 (1976), 165-188.

[3] I. M. Gelfand, L. A. Dikü, Uspehi Mat Nauk 30(5) (1975), 67-100.

[4] A. M. Vinogradov, Soviet Math. Dokl. 19 (1978), 144-148.

[5] T. Tsujishita, On variation bicomplexes associated to differential equations (to appear).

[6] T. Tsujishita, Letters in Math. Phys. 3 (1979), 445-450.

[7] T. Tsujishita, Conservation laws of the BBM equation (to appear).