数理解析研究所講究録
375巻 1980年 27-46

パンルベ方程式の多項式ハミルトニアン

東大 理　岡本 和夫

$\boxed{\text{序}}$ 1973年から76年にかけて、T.T.Wu, B.M.McCoy, C.A.Tracy, E.Barouch 等は2次元Isingモデルの2点相関函数のある種の極限(scaling limit)にあらわれるscaling函数を具体的に閉じた形で求めることに成功した([1])。その函数$F(t)$の主要部は次のように与えられる:

$$(1)\qquad F(t) \sim \exp \int_{t'}^{\infty} \frac{s}{4\lambda(s)^2}\left((1-\lambda(s)^2)^2 - \left(\frac{d\lambda(s)}{ds}\right)^2\right) ds$$

$$t' = \frac{1}{2}t,$$

ここで$\lambda=\lambda(s)$は次の2階方程式の解である.

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 - \frac{1}{s}\frac{d\lambda}{ds} + \lambda^3 - \frac{1}{\lambda}.$$

これは、パンルベの方程式の3型(以下P_{III}と記す)において、$\alpha=\beta=0$, $\gamma=-\delta=1$としたものである。彼等がこの事実を得るために用いた本質的な道具は、線型方程式のE

ノドロミーを不変にする変形理論である。このことは、いちはやく佐藤、三輪、神保の三氏によって注意され、彼らは上記の結果を拡張して2次元Isingモデルのn点相関函数を計算することに成功した。のみならず、彼らの研究は他方面にわたって興味ある結果をもたらした。そのなかのひとつ[2]において、一次元周期的n体問題.

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+c\sum_{i<j}\delta(x_i-x_j)$$

$$0\leqslant x\leqslant L$$

を、極限 $c\longrightarrow+\infty$ において考察し、温度0度における1粒子の密度行列の熱力学的極限 $\rho(|x-x'|)$ を具体的に計算した。それによれば、$\rho(t)$ は、2階方程式

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2}=\left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}\right)\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2-\frac{1}{s}\frac{d\lambda}{ds}+\frac{(\lambda-1)^2}{2s^2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)$$
$$-\frac{2\sqrt{-1}}{s}\lambda+2\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1}$$

の解 $\lambda=\lambda(s)$ によって

(2) $$\rho(t)=\rho_0\exp\int_0^t\left(\frac{s}{4\lambda(1-\lambda)^2}\left(\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2+4\lambda^2\right)-\frac{(1+\lambda)^2}{4s}\right)ds$$

と表わされる。ここで上の非線型常微分方程式は、5型パンルベ方程式 P_V において $\alpha=-\beta=\frac{1}{2}$, $\sqrt{-1}\gamma=\delta=2$, としたものである。

これらの結果を見るとき、(1)や(2)の被積分項にあらわれる λ と $\frac{d\lambda}{ds}$ の有理函数（以下 $R(s,\lambda,\frac{d\lambda}{ds})$ と書こう）は、もとの P_{III}, P_V に対してどういう意味をもつのか、また、

$$\exp\int^t R(s,\lambda(s),\frac{d\lambda(s)}{ds})\,ds$$

というもの函数はどのような函数なのか、ということを考えるのは自然であろう。

そこで、まず1型の方程式

$\underline{P_I}$ $$\lambda'' = 6\lambda^2 + t \qquad (\ ' = \frac{d}{dt}\ )$$

について古い結果を復習してみよう。P_I の一般解は $\mathbb{C}$ 上定義され、その特異点は全て極である。すなわち P_I の解 $\lambda(t)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数であるが、$\mathbb{C}$ 上の整函数 $\tau(t)$ があって

$$-\lambda(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \log\tau(t) = (\tau(t)\tau''(t) - (\tau'(t))^2)/\tau(t)^2$$

と書ける([3])。この表示は有理型函数 $\lambda(t)$ を2つの整函数の比にかく、具体的表現を与える。他方、天下りだが、λ と μ という2変数の多項式

$\underline{H_I}$ $$H_I(t,\lambda,\mu) = \frac{1}{2}\mu^2 - 2\lambda^3 - t\lambda$$

をとると、ただちに P_I は<u>ハミルトン</u>系

(3) $$\lambda' = \{\lambda, H_I\}, \quad \mu' = \{\mu, H_I\}$$

から μ を消去したものであることが確められる。ここで、

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial\lambda}\frac{\partial G}{\partial\mu} - \frac{\partial F}{\partial\mu}\frac{\partial G}{\partial\lambda}$$

は通常の<u>ポアソン</u>括弧である。この意味で P_I は<u>ハミルトン</u>系

(3)に同値である。さて(3)の一般解を$(\lambda(t),\mu(t))$とし、函数

(4) $$\sigma_{\mathrm{I}}(t)=H_{\mathrm{I}}(t,\lambda(t),\mu(t))$$

を定義すると、$\sigma_{\mathrm{I}}'(t)=\frac{\partial}{\partial t}H_{\mathrm{I}}=-\lambda(t)$ であるから前にのべたこととあわせれば次の表示を得る。

$$\sigma_{\mathrm{I}}(t)=\frac{d}{dt}\log\tau_{\mathrm{I}}(t),$$

ここで $\tau_{\mathrm{I}}(t)=\tau(t)$ は$\mathbb{C}$上の整函数である。(3)を用いてμを$\lambda'=\frac{d\lambda}{dt}$であらわせば、$H_{\mathrm{I}}(t,\lambda,\mu)=R_{\mathrm{I}}(t,\lambda,\lambda')$とも書けることに注意せよ。

我々はまずこの結果を他のパンルベの方程式に拡張する。パンルベの方程式とは、上のP_{I}と次の5つの方程式で与えられる。

P_{II} $$\lambda''=2\lambda^3+t\lambda+\alpha$$

P_{III} $$\lambda''=\frac{1}{\lambda}(\lambda')^2-\frac{1}{t}\lambda'+\frac{1}{t}(\alpha\lambda^2+\beta)+\gamma\lambda^3+\frac{\delta}{\lambda}$$

P_{IV} $$\lambda''=\frac{1}{2\lambda}(\lambda')^2+\frac{3}{2}\lambda^3+4t\lambda^2+2(t^2-\alpha)\lambda+\frac{\beta}{\lambda}$$

P_{V} $$\lambda''=\left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}\right)(\lambda')^2-\frac{1}{t}\lambda'+\frac{(\lambda-1)^2}{t^2}\left(\alpha\lambda+\frac{\beta}{\lambda}\right)+\frac{\gamma}{t}\lambda+\delta\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1}$$

P_{VI} $$\lambda''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)(\lambda')^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\lambda'+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{t}{\lambda^2}+\gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right)$$

ここでα, β, γ, δは複素定数である。以下、P_{J}によって

ひとつのパンルベ方程式を代表させることにする。さらに、$H_J(t,\lambda,\mu)$をP_Jに付随するハミルトニアン，Ξ_JをP_Jの動かない特異点全体の集合（複素射影直線$\mathbb{P}^1$の部分集合）とする。P_Jはハミルトン系(3)と同値である（$H=H_J$に対して）。$(\lambda(t),\mu(t))$をこのハミルトン系の一般解とし、(4)と同様に函数$\sigma_J(t)$を定義する。さらに

(5) $$\sigma_J(t)=\frac{d}{dt}\log\tau_J(t)$$

によって函数$\tau_J(t)$を定義する。この$\tau_J(t)$を方程式P_Jの、ハミルトニアンH_Jに関するτ函数と呼ぶ。結果を次に述べよう。

定理　各P_Jに対して、λとμの多項式であるようなハミルトニアンH_Jが存在し、これに関するτ函数は$\mathbb{P}^1\setminus\Xi_J$で正則となる。

$B_J=\mathbb{P}^1\setminus\Xi_J$とおく。$\lambda(t),\mu(t)$は$B_J$上（もし$B_J$が単連結でなければ一般には多価）有理型であり、従って$\sigma_J(t)$もそうなる。上の定理に述べたハミルトニアンは一意的に定まるものではない。それどころか次の事実が成立する。$J=\mathrm{II},\cdots\mathrm{VI}$に対して、

系　P_Jに付随するハミルトニアン$H_J^{(i)}$ $(i=1,2)$であって次のものが存在する：P_Jの一般解$\lambda(t)$に対して、$H_J^{(i)}$に関す

るて函数を$\tau_J^{(1)}(t)$とすれば

$$\lambda(t)=\frac{d}{dt}\log\tau_J^{(1)}(t)-\frac{d}{dt}\log\tau_J^{(2)}(t).$$

すなわち、B_J上有理型な解$\lambda(t)$は、B_J上正則な2つの函数, $(\tau_J^{(1)})'\tau_J^{(2)}-(\tau_J^{(2)})'\tau_J^{(1)}$ と $\tau_J^{(1)}\tau_J^{(2)}$ の比であらわされる。

この結果は、前に述べたP_Iについての結果の拡張である。

本稿では定理の証明にはたちいらない。以下、関連するいくつかの話題について解説し、結果を紹介する。ハミルトニアンH_Jの具体的な形はあとで表にまとめる。

$\boxed{\text{歴史}}$ $P_{II}\cdots P_{VI}$に対してその一般解$\lambda(t)$を正則函数の比で表現する具体的表示は既にパンルベによって試みられた。彼はP_{II}, P_{III}について、λとλ'の有理函数であって、解を代入したとき独立変数tの函数としてある正則函数の対数微分として表わされるものをさがして、そのようなものの2つの差として$\lambda(t)$が表わされることを示している。他方、P_Jが多項式型のハミルトニアンについてのハミルトン系と同値になるという事実は、それから20年程後にマルムキストによって初めて注意された。彼は、F, Gをyとzの多項式としたとき

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y,z),\quad \frac{dz}{dx}=G(x,y,z)$$

という2連立方程式が動く分岐点をもたないための条件を求

めようとして、パンルベ方程式のハミルトン系による表示に行きあたっている。P_{IV}, P_{V}, P_{VI} のハミルトニアンを具体的に書いているが P_{III} については、同様にできるだろう、と言っているだけである。[4]，[5]を参照せよ。我々の結果はこれら2つをあわせたものであると言えるが、後で与えるハミルトニアンは、マルムキストの発見したものや、パンルベがハミルトニアンを意識せずに発見した λ と λ' の有理函数とは同一ではない。

さて、パンルベの方程式が、ある2階線型方程式

$$L_J \qquad \frac{d^2}{dx^2}y = p_J(x,t,\lambda)y$$

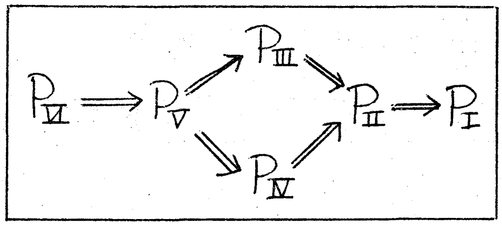
の、モノドロミーやストークス係数を不変にする変形理論から得られるということは、P_{VI} に対してはフックス，その他に対してはガルニエによって示されていた。細かい議論は[0]，[6]を参照してもらうことにして、ここでは L_J の特異点だけを表にまとめておく。

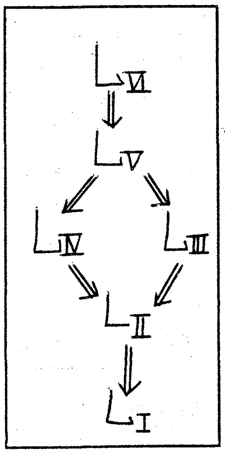
表1　L_J の特異点

L_{VI}	$x=0,\ 1,\ \infty,\ t,\ \lambda$（確定特異点）	
L_{V}	$x=0,\ \infty,\ \lambda$（確定）	$x=1$（1級不確定）
L_{IV}	$x=0,\ \lambda$（確定）	$x=\infty$（2級不確定）
L_{III}	$x=\lambda$（確定）	$x=0,\ \infty$（1級不確定）
$L_{\mathrm{I}}, L_{\mathrm{II}}$	$x=\lambda$（確定），	$x=\infty$（(3)級不確定）

ただし、$x=\lambda$ における特性指数の差は2で、しかもこの特異点は非対数的である。

L_{I} は L_{II} の退化したもので、$x=\infty$ における局所形式解を求めるとxの分数巾があらわれる。この意味では、L_{I}の無限遠点は5/2級の不確定特異点である。また、L_{VI}からL_{I}は、順次特異点の合流によって得られる。これを図式的に書くと下右のようになる。これは、パンルベ方程式の退化の図式と完全に対応する。これらの事実をもちいて、我々はP_Jに付随するハミルトニアンH_Jを特徴づけていくことにする。余談ではあるが、パンルベ方程式をいろいろ調べてみると、(P_{I}, P_{II}, P_{IV}), (P_{III}, P_{V}, P_{VI})の2つのグループにわかれ、各々のグループのものはよく似た特性を示すことがある([7])。歴史的事情は仕方ないかもしれぬが、P_{III}とP_{IV} はどうも番号をつけかえた方がよさそうな気がする。





$\boxed{\text{ハミルトニアンの特徴づけ}}$ パンルベの方程式からハミルトニアンを見つけるには今のところ2つの方法がある。そのひとつは、λを変数とする空間B_Jを底、xを変数とする複

素直線$\mathbb{C}$をファイバーとするファイバー束$\mathbb{C}\times B_J$のコンパクト化をしらべるという方法である([7],[8])。ここでは第2の方法、線型方程式の変形理論によってハミルトニアンを求める。そのためには、前節で述べたフックスやガルニエの結果やその計算のみちすじを再構成する必要がある。そうすることによって、次の事実にいきあたる。

命題　前節で考察した2階線型方程式L_Jのモノドロミーを不変にする変形は次の方程式で表わされる:

(6)　$\dfrac{d\lambda}{dt}=\{\lambda, K_J\}$,　$\dfrac{d\bar{\mu}}{dt}=\{\bar{\mu}, K_J\}$

ここに、$\{\cdot,\cdot\}$は通常のポアソン括弧、また、

$$\bar{\mu} = -\operatorname*{R\acute{e}s}_{x=\lambda} p_J(x,t,\lambda)$$

である。K_Jは、L_Jが特異点$x=\lambda$において非対数的であるという条件から代数的に決定される、λと$\bar{\mu}$とtに関する有理函数である。とくにL_{VI}の場合は

$$K_{VI} = \operatorname*{R\acute{e}s}_{x=t} p_{VI}(x,t,\lambda).$$

実は、K_Jは$\bar{\mu}$については2次の多項式、とくにK_I, K_{II}はλに関しても多項式である。とにかく、パンルベ方程式をハミルトン系に書くことができたわけだが、これから多項式型のハミルトニアンH_Jを探しだすのはむずかしくない。ここでも

詳細な議論、計算は一切省略することにして結果のみ書く。

命題 2階線型方程式

LH_J $\quad \frac{d^2y}{dx^2}+p_J^{(1)}(x,t,\lambda)\frac{dy}{dx}+p_J^{(2)}(x,t,\lambda)y=0$

で次のようなものが存在する。

(i) 特異点の集合は L_J のそれと同じである。

(ii) LH_J のモノドロミー、ストークス係数を不変にする変形は、ハミルトン系

(8) $\quad \frac{d\lambda}{dt}=\{\lambda,H_J\},\quad \frac{d\mu}{dt}=\{\mu,H_J\}$

を導く。ここに

(9) $\quad \mu=\operatorname*{Res}_{x=\lambda} p_J^{(2)}(x,t,\lambda).$

(iii) (8)は P_J と同値である。H_Jは、λとμに関する多項式で、LH_Jから代数的に計算できる。とくに

(10) $\quad H_{\mathrm{VI}}=-\operatorname*{Res}_{x=t} p_J^{(2)}(x,t,\lambda)$

(iv) (8)と(6)は互いに正準変換により移りあう。

このようにして求まった$H_J(t,\lambda,\mu)$において、P_Jに固有な正準変数はλである。今、新たに$\tilde{H}_J(t,\lambda,\mu)$を

(11) $\quad \tilde{H}_J(t,\lambda,\mu)=\frac{1}{a}H_J(t,\lambda,a\mu+b)+\phi(t)$

$a(\neq 0)$, bは定数, $\phi(t)$はB_J上正則なtの函数

により定義しても、$\tilde{H}_J$はやはりP_Jに付随するハミルトニアン

である。各々に関するτ函数をそれぞれτ_J, $\tilde{\tau}_J$とすれば(11)は

$$\tilde{\tau}_J(t)=\Phi(t)\tau_J(t)^{a^{-1}},\quad \frac{d}{dt}\log\Phi(t)=\phi(t)$$

という関係を与える。(11)は正準変換ではないが、必要に応じてH_Jを$\tilde{H}_J$に変えることは許すことにする。

$\boxed{\text{ハミルトニアン}}$　次に、上記定理におけるハミルトニアンの表を与える。ここでは、$H_J(t,0,0)=0$ となるようにしているがこれは本質的なものではない。

H_{I}　$\frac{1}{2}\mu^2-2\lambda^3-t\lambda$

H_{II}　$\frac{1}{2}\mu^2+(\lambda^2+\frac{1}{2}t)\mu-\frac{1}{2}(2\alpha-1)\lambda$

H_{III}　$\frac{1}{t}\left[\lambda^2\mu^2-(\eta_\infty t\lambda^2+\theta_0\lambda-\eta_0 t)\mu+t\kappa\lambda\right]$

H_{IV}　$2\lambda\mu^2-(\lambda^2+2t\lambda+\theta_0)\mu+\frac{1}{2}\eta_0\lambda$

H_{V}　$\frac{1}{t}\left[\lambda(\lambda-1)^2\mu^2-((\theta_0+\theta_1)(\lambda-1)^2+(\theta_1+\eta_1 t)(\lambda-1)+\eta_1 t)\mu+\kappa\lambda\right]$

H_{VI}　$\frac{1}{t(t-1)}\left[\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2-(\theta_0(\lambda-1)(\lambda-t)+\theta_1\lambda(\lambda-t)+(\theta_t-1)\lambda(\lambda-1))\mu+\kappa\lambda\right]$

ここで、θ, η等は定数であるが、これは、P_Jの定数α,β等と次のように関係している。

H_{III}　$\alpha=-\eta_\infty(1+\theta_\infty)$,　$\beta=\eta_0(1+\theta_0)$,

　$\gamma=\eta_\infty^2$,　$\delta=-\eta_0^2$,

$$K=\frac{1}{2}\eta_\infty(\theta_0+\theta_\infty),$$

$\underline{H_{\mathrm{IV}}}$ $\quad \alpha=\eta_0+1-\frac{1}{2}\theta_0, \qquad \beta=-\frac{1}{2}\theta_0^2$

$\underline{H_{\mathrm{V}}}$ $\quad \alpha=\frac{1}{2}\theta_\infty^2, \qquad \beta=-\frac{1}{2}\theta_0^2$

$$\gamma=-\eta_1(\theta_1+1), \qquad \delta=-\frac{1}{2}\eta_1^2$$

$$K=\frac{1}{4}((\theta_0+\theta_1)^2-\theta_\infty^2),$$

$\underline{H_{\mathrm{VI}}}$ $\quad \alpha=\frac{1}{2}\theta_\infty^2, \qquad \beta=-\frac{1}{2}\theta_0^2,$

$$\gamma=\frac{1}{2}\theta_1^2, \qquad \delta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\theta_t^2,$$

$$K=\frac{1}{4}((\theta_0+\theta_1+\theta_t-1)^2-\theta_\infty^2).$$

とくに H_{III} において、

$$\eta_0=\eta_\infty=-\theta_0=-K=1$$

とし、さらに、$\tilde{H}_{\mathrm{III}}(t,\lambda,\tilde{\mu})$ を

$$\tilde{H}_{\mathrm{III}}(t,\lambda,\tilde{\mu})=-H_{\mathrm{III}}(-t,\lambda,\tilde{\mu})$$

で定義する。これらは P_{III} において $\alpha=\beta=0$, $\gamma=-\delta=1$ としたものに付随する<u>ハミルトニアン</u>である。さらに、$H_{\mathrm{III}}+\frac{1}{4t}$, $\tilde{H}_{\mathrm{III}}+\frac{1}{4t}$ に関する τ 函数を $\tau_{\mathrm{III}}(t)$, $\tilde{\tau}_{\mathrm{III}}(t)$ とすれば、2次元 Ising <u>モデル</u>の scaling 函数 $F(t)$ の表示(1)は次のようになる：

$$F(t)\sim\sqrt{\tau_{\mathrm{III}}(t')\tilde{\tau}_{\mathrm{III}}(t')}, \qquad t'=\frac{1}{2}t.$$

次に、H_{V} において、

$$\theta_1=0, \quad \eta_1=\theta_0=1, \quad K=0$$

とし、<u>ハミルトニアン</u> $H_{\mathrm{V}}+\sqrt{-1}-t^{-1}$ に関する τ 函数を τ_{V}

とすると、序でのべた(2)は、

$$\wp(t)=\tau_{V}(t)$$

と同じことである。これらは、ハミルトニアンにおいて正準変数μをλ'で書いてみればただちにわかることである。これらの例はいずれもパンルベ方程式においてτ函数が重要であることをほのめかしている。τ函数のもつ意味を示唆する例をもうひとつあげよう。P_Iにおいて, $t=\epsilon t^*-\frac{1}{2}\epsilon^{-4}g_2$, $\lambda=\epsilon^{-2}\lambda^*$ とおくと方程式

(12) $$\frac{d^2\lambda^*}{dt^{*2}}=6(\lambda^*)^2+\epsilon^5 t^*-\frac{1}{2}g_2$$

を得る。g_2は定数である。(t^*,λ^*)を改めて(t,λ)と書き、(12)のハミルトニアン$H_I=\frac{1}{2}\mu^2-2\lambda^3-(\epsilon^5 t-\frac{1}{2}g_2)\lambda$に関する$\tau$函数を$\tau_I(t;\epsilon)$とすると、$\lambda(t;\epsilon)$を(12)の解としたとき、

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\tau_I(t;\epsilon)=-\epsilon^5\lambda(t;\epsilon)。$$

ところが、(12)で$\epsilon=0$とすれば、(12)は楕円函数$\wp(t)$の満たす方程式である。従って, $\lambda(t;\epsilon)$, $\tau_I(t;\epsilon)^{\epsilon^{-5}}$の$\epsilon\to 0$としたときの極限, $\lambda(t;0)$, $\tau_I^0(t)$ が定義できたとすれば、

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\tau_I^0(t)=-\lambda(t;0)=-\wp(t)$$

であるから、τ函数の極限は

$$\tau_I^0(t)=e^{\eta t^2}\frac{\vartheta_1(t)}{\vartheta_1(0)}$$

である。この荒い議論が正統化できれば、τ函数はϑ函数の一般化としての意味をもつことができるであろう。

$\boxed{P_{II}\text{について}}$ これまで、一般のP_Jについていくつかの結果を証明なしに述べてきたが、次に特にP_{II}に話を限って、上記の結果の証明の概略も含めていくつかの話題を紹介する。それらは、他のP_Jについても同様であろうが、きちんとした証明、計算は完了していない。

さて、P_{II}のハミルトニアンは

$$H_{II} = \frac{1}{2}\mu^2 + (\lambda^2 + \frac{1}{2}t)\mu - \frac{1}{2}(2\alpha - 1)\lambda$$

である。これに、$(\lambda(t), \mu(t))$という解を代入したものを前のように$\sigma_{II}(t)$と書くが、本節では断わらぬ限りP_{II}しか考察しないので添字IIは省略する。$\sigma(t)$は$\lambda(t), \mu(t)$が正則ならば正則である。いま$t=t_0$が$\lambda(t)$の極であったとする。すると方程式P_{II}から、$t=t_0$は1位の極であり、かつ

$$\operatorname*{Res'}_{t=t_0} \lambda(t) = \pm 1$$

となることがわかる。局所展開はこれに対応して、

$(13)_1$ $$\lambda(t) = + \frac{1}{t-t_0}\left(1 - \frac{t_0}{6}(t-t_0)^2 - \frac{\alpha+1}{4}(t-t_0)^3 + \cdots\cdots\right)$$

$(13)_2$ $$\lambda(t) = - \frac{1}{t-t_0}\left(1 - \frac{t_0}{6}(t-t_0)^2 + \frac{\alpha-1}{4}(t-t_0)^3 + \cdots\cdots\right)$$

となる。すると再び方程式から、$\mu(t)$の展開は各々の場合について計算できて、

$(14)_1$ $$\mu(t) = - \frac{2}{(t-t_0)^2}\left(1 + \frac{t_0}{6}(t-t_0)^2 + \frac{1}{4}(t-t_0)^3 + \cdots\right)$$

$(14)_2$ $$\mu(t) = - \frac{2\alpha-1}{2}(t-t_0)(1 + \cdots\cdots)$$

を得るから、これをHに代入して$\sigma(t)$の$t=t_0$でのふるまい

がわかる。実行してみると(13)$_1$-(14)$_1$の場合、

$$\sigma(t)=\frac{1}{t-t_0}(1+\cdots\quad)$$

他方は、$\sigma(t)$は$t=t_0$で正則であることがわかる。従って

$$\tau(t)=\exp\int^t\sigma(s)\,ds$$

は、$\mathbb{C}$上正則であり、その零点は対応する解$\lambda(t)$の留数が+1であるような極においてあらわれる。

P_{II}は次の2階線型方程式のモノドロミー不変な変形を決める([O]):

(15) $$y''+\left(2x^2+t-\frac{1}{x-\lambda}\right)y'+\left(\frac{\mu}{x-\lambda}-2H-(2\alpha-1)x\right)y=0,$$

ここで $'=\frac{d}{dx}$, Hはハミルトニアンである。

(16) $$Z=\left\{\exp\int^x(+2\xi^2+t)\,d\xi\right\}y$$

という変数変換をすると(15)は

(17) $$Z''-\left(2x^2+t+\frac{1}{x-\lambda}\right)Z'+\left(\frac{\bar{\mu}}{x-\lambda}-2\bar{H}-(2\alpha+1)x\right)Z=0$$

となり、さらに

$$\bar{\mu}=\mu+2\lambda^2+t$$

$$\bar{H}=\frac{1}{2}\bar{\mu}^2-\left(\lambda^2+\frac{1}{2}t\right)\bar{\mu}-\frac{2\alpha+1}{2}\lambda=H-\lambda$$

を得る。$\bar{\mu}$はμの複素共役とは関係ない、念のため。さて、(17)の変形を考えると、これはハミルトン系

$$\frac{d\lambda}{dt}=\{\lambda,\bar{H}\},\quad \frac{d\mu}{dt}=\{\mu,\bar{H}\}$$

を導き、これから$\bar{\mu}$を消去すれば再びλの方程式としてP_{II}を得る。$\bar{H}$から前のように函数$\bar{\sigma}(t)$を作れば、これは$\sigma(t)$と同

様のふるまいを示す。すなわち

$$\overline{\tau}(t)=\exp\int^{t}\overline{\sigma}(s)\,ds$$

は整函数となる。ただし今度は$\overline{\tau}(t)$の零点$t=t_0$は解$\lambda(t)$の留数-1であるような極に対応する。線型方程式の変換(16)により新らしいハミルトニアン$\overline{H}=H-\lambda$と正準変数$\overline{\mu}$が定義されたがこれは正準変換である。実際、

$$\overline{\mu}\,d\lambda-\overline{H}\,dt=\mu\,d\lambda-H\,dt+d\left(\tfrac{2}{3}\lambda^3+t\lambda\right).$$

以上のことから特に、$\overline{\sigma}(t)=\sigma(t)-\lambda(t)$、あるいは

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=\frac{d}{dt}\log\tau(t)-\frac{d}{dt}\log\overline{\tau}(t)\\&=\left(\tau'(t)\overline{\tau}(t)-\tau(t)\overline{\tau}'(t)\right)\big/\tau(t)\overline{\tau}(t).\end{aligned}$$

これにより、有理型函数$\lambda(t)$がτ函数を用いて正則函数の比に書けた。

次に$\sigma(t)$は2階非線型方程式をみたす。これを具体的に求めてみよう。まず

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{2}\mu\ ,$$

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2}=\frac{1}{2}\frac{d\mu}{dt}=\frac{2\alpha-1}{4}-\lambda\mu$$

から

(18) $$\mu=2\frac{d\sigma}{dt},\quad \lambda=\left(\frac{2\alpha-1}{4}-\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right)\Big/2\frac{d\sigma}{dt}$$

これをHに代入して整理すれば、結局、

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right)^2+4\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^3+2t\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2-2\sigma\frac{d\sigma}{dt}-\left(\frac{2\alpha-1}{4}\right)^2=0$$

この方程式から次のことがわかる。方程式$\frac{d^2\lambda}{dt^2}=2\lambda^3+t\lambda+\alpha$

の解を以下 $\lambda(t,\alpha)$, これから定まる μ,σ を $\mu(t,\alpha),\sigma(t,\alpha)$ 等と書こう。すると(18)からただちに次のことがわかる。

命題　$\sigma(t,\alpha)$ と $\sigma(t,1-\alpha)$ は同じ方程式の解である。

いま、$\sigma(t,\alpha)=\sigma(t,1-\alpha)$ となるようにとると、これに対応する $\lambda(t,\alpha),\mu(t,\alpha),\lambda(t,1-\alpha),\mu(t,1-\alpha)$ は、(18)の前に書いてある関係式から、

$$\mu(t,\alpha)=\mu(t,1-\alpha),$$
(19)
$$\lambda(t,1-\alpha)=\lambda(t,\alpha)-\frac{2\alpha-1}{2}\mu(t,\alpha)^{-1}$$

という関係で結びついている。これを用いて、$\lambda(t,\alpha)$ と、α を1だけ増した方程式の解 $\lambda(t,\alpha+1)$ の間の関係が求まる。まず、(19)は正準変換であること、および

$$\mu(t,\alpha)=\frac{d}{dt}\lambda(t,\alpha)-\lambda(t,\alpha)^2-\frac{t}{2}$$

に注意する。さらに、$(\lambda,\mu)\to(-\lambda,-\overline{\mu})$ は正準変換であり、かつ方程式 P_{II} から直接

$$\lambda(t,\alpha)=-\lambda(t,-\alpha)$$

ということがわかる。これと(19)から、

$$\lambda(t,1-\alpha)=-\lambda(t,-\alpha)+\frac{2\alpha-1}{2}\overline{\mu}(t,-\alpha)^{-1}\ 。$$

この時、Hの式から、$\sigma\to\overline{\sigma}$ という変換をうける。すなわち $\sigma(t,\alpha)=\overline{\sigma}(t,-\alpha)$ となり、従って上の式で $\overline{\mu}$ と書いた。方

程式(18)を見よ。αを$-\alpha$でおきかえれば、$\lambda(t,\alpha+1)$を$\lambda(t,\alpha)$で表現できる。ところが(19)を逆に解いて$\lambda(t,\alpha)$を$\lambda(t,1-\alpha)$により表わすことはできるから、この関係も逆に解け,$\lambda(t,\alpha)$を$\lambda(t,\alpha+1)$で表現することもできる。すなわち、この関係式は、一般解と一般解の間の対応である。さらに、

$$\sigma(t,1+\alpha)=\sigma(t,-\alpha)=\overline{\sigma}(t,\alpha)=\sigma(t,\alpha)-\lambda(t,\alpha)$$

に注意して、次のことがわかる。

定理1　$\lambda(t,\alpha+1)=-\lambda(t,\alpha)-\frac{2\alpha+1}{2}\left(\frac{d}{dt}\lambda(t,\alpha)+\lambda^2(t,\alpha)+\frac{t}{2}\right)^{-1}$

これは逆に解けて

$$\lambda(t,\alpha)=-\lambda(t,\alpha+1)+\frac{2\alpha+1}{2}\left(\frac{d}{dt}\lambda(t,\alpha+1)-\lambda^2(t,\alpha+1)-\frac{t}{2}\right)^{-1}$$

ただし, $\alpha=-\frac{1}{2}$のときは、右辺才2項は0と思う。さらに

$$\lambda(t,\alpha)=\sigma(t,\alpha)-\sigma(t,1+\alpha)$$

とくに$\alpha=\frac{1}{2}$とするとP_{II}はリッカチ方程式

$$\frac{d\lambda}{dt}-\lambda^2-\frac{1}{2}t=0$$

の解を特殊解としてもつ。この解を$\lambda_0(t)$とおく。たとえば

$$\lambda_0(t)=A_i'\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}t\right)/A_i\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}t\right)$$

A_iはエアリ函数をあらわす。また、$\alpha=-1$としたものは、$\lambda=\frac{1}{t}$を特殊解としてもつ。従って、定理1をこの場合に適用すると2αが整数であるようなP_{II}は特殊解として$\lambda_0(t)$の

有理函数、tの有理函数をもつ。すなわち、この場合はP_{II}はパンルベの意味では「古典超越函数に対して既約」ではない。

定理2　nを整数とする。$\alpha=\frac{1}{2}(2n+1)$のときP_{II}は、あるリッカチ方程式の解$x_0(t)$の有理函数となる特殊解をもち、$\alpha=n$ならばtの有理函数であるような特殊解をもつ。

ここであげた以外のαに対してP_{II}が古典超越函数であらわせるような特殊解をもつかどうかはわからない。

また、上記定理1，2がP_{III}… P_{VI}に対しても同様に成立するかどうかについては現在調べているが、まだ完全にはわかっていない。

文献

[0], K. OKAMOTO Polynomial Hamiltonians associated to the Painlevé equations. preprint

[1], T. T. WU - B. M. McCOY - C. A. TRACY - E. BAROUCH, Phy. Rev. B13 (1976)

[2], M. JIMBO - T. MIWA - Y. MORI - M. SATO, RIMS preprint No. 303 (1979)

[3] P. PAINLEVE, Oeuvre, t III, p89

[4] P. PAINLEVE, Oeuvre, t III, p.123

[5] J. MALMQIST. Ark. Mat. Astr. Fys. 17 (1922/23)

[6] R. GARNIER Ann. Ecole Norm. Sup. 3, 27 (1912)

[7] K. OKAMOTO Japanese. J. of Math. 5 (1979)

[8] 岡本和夫 雑誌「数学」32巻1号 (1980)

[9]. H. AIRAULT Studies in Appl. Math. 61 (1979)

本稿で述べたことは、[0]に詳細も含めてまとめてある。また、定理1, 2については[9]も参照