数理解析研究所講究録
375 巻 1980 年 6-12

H. Q. F. '79

神保 道夫
三輪 哲二
毛織 泰子
佐藤 幹夫

§1 1次元不透過ボーズ気体の密度行列

非線型シュレーディンガー方程式の量子化を考える。

$$(1.1)\qquad i\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + c\,\phi^*\phi^2$$

長さ L の箱に入れて考える事とし，粒子数 N の最低エネルギー状態を与える波動函数は $c=\infty$ において

$$(1.2)\qquad \Psi_{N,L}(x_1,\cdots,x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!L^N}}\prod_{j<k}\left|e^{2\pi i x_j/L}-e^{2\pi i x_k/L}\right|$$

で与えられる。(M. Girardeau, J. Math. Phys. $\underline{1}$ (1960) 516) 対応する状態ベクトルを $|\Psi_{N,L}\rangle$ と書こう。

n 粒子密度行列の熱力学極限

$$(1.3)\qquad \rho_n(a_1',\cdots,a_n';a_1'',\cdots,a_n'')$$

$$= \lim_{\substack{N,L\to\infty\\ \rho_0=N/L\,:\,\text{fixed}}} \langle\Psi_{N,L}|\phi^*(a_1')\cdots\phi^*(a_n')\phi(a_1'')\cdots\phi(a_n'')|\Psi_{N,L}\rangle$$

$$= \lim_{\substack{N, L \to \infty \\ \rho_0 = N/L : \text{fixed}}} \frac{N!}{(N-n)!} \int_0^L \cdots \int_0^L dx_{n+1} \cdots dx_N$$

$$\times \Psi^*_{N,L}(a'_1, \cdots, a'_n, x_{n+1}, \cdots, x_N) \Psi_{N,L}(a''_1, \cdots, a''_n, x_{n+1}, \cdots, x_N)$$

は 以下のように パンルベ型の非線型全微分方程式系の解によって表わされる。

$n = 1$

$\rho_1(a'_1; a''_1) = \rho(|a'_1 - a''_1|)$ とおくと

$$\rho(a) = \rho_0 \exp\left(\int_0^a dt \frac{\sigma(t)}{t} \right)$$

$$(1.4) \quad (t\sigma'')^2 = -4(t\sigma' - 1 - \sigma)(t\sigma' + (\sigma')^2 - \sigma)$$

n : 一般

$$\rho_n(a'_1, \cdots, a'_n; a''_1, \cdots, a''_n)$$

$$= \text{const.} \det\left(R_I(a'_j, a''_k)\right)_{j,k=1,\cdots,n} \exp\left(\int \omega\right)$$

$a_1 < \cdots < a_{2n}$ を $a'_1, \cdots, a'_n, a''_1, \cdots, a''_n$ の並べかえとし

$$(1.5) \quad R_I(a_j, a_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{2i(a_j - a_k)}(r_{+j} r_{-k} - r_{-j} r_{+k}) & (j \neq k) \\[2ex] \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{j'(\neq j)} \dfrac{(r_{+j} r_{-j'} - r_{+j'} r_{-j})^2}{a_{j'} - a_j} + i r_{+j} r_{-j} & (j = k) \end{cases}$$

$$(1.6)\quad \omega = -\frac{1}{4}\sum_{j<j'}\left(r_{+j}r_{-j'} - r_{+j'}r_{-j}\right)^2 \frac{da_j - da_{j'}}{a_j - a_{j'}} + i\sum_{j} r_{+j}r_{-j}\,da_j$$

$$(1.7)\quad \frac{\partial r_{\pm j}}{\partial a_k} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(-r_{\pm k}r_{-k}r_{+j} + r_{\pm k}r_{+k}r_{-j}\right)\dfrac{1}{a_j - a_k} & (k \neq j) \\ \pm i\, r_{\pm j} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j'(\neq j)}\left(-r_{\pm j'}r_{-j'}r_{+j} + r_{\pm j'}r_{+j'}r_{-j}\right)\dfrac{1}{a_j - a_{j'}} & (j = k) \end{cases}$$

§2 常微分方程式の変形理論

不確定特異点を持つリーマンの問題の１例として次の性質を持つ 2×2 行列 $Y(x)$ を構成する。

$a_1 < \cdots < a_{2n}$ とし

i) $Y(x)$ は $x \neq a_1, \cdots, a_{2n}, \infty$ で可逆正則

ii) $x = \infty$ での振舞

$$Y(x) = \left(1 + O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) e^{\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} x}$$

iii) $x = a_1, \cdots, a_{2n}$ での振舞

$$Y(x) = \hat{Y}(x)\left(\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{2n-1})}{(x-a_2)\cdots(x-a_{2n})}\right)^{\begin{pmatrix}0 & \frac{i\lambda}{2}\\ & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$\hat{Y}(x)$ は $x \neq \infty$ で可逆正則

上記の性質を満たす $Y(x)$ は次の級数表示で与えられる。

$$Y(x) = \begin{pmatrix} R_+^+(x;\lambda) & R_+^-(x;\lambda) \\ R_-^+(x;\lambda) & R_-^-(x;\lambda) \end{pmatrix}$$

(2.1)

$$R_{\pm}^{\pm'}(x;\lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^{\ell} \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_{\ell}$$

$$\times \frac{\pm' e^{\pm' i(x_0-x_1)}}{2i} \frac{\sin(x_1-x_2)}{x_1-x_2} \cdots \frac{\sin(x_{\ell-1}-x_{\ell})}{x_{\ell-1}-x_{\ell}} e^{\pm i x_{\ell}}$$

$(x_0 = x)$

$I = [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{2n-1}, a_{2n}]$ (n個の区間の和)

i) ～ iii) の帰結として $Y(x)$ は次の形の線型方程式を満たす。

$$(2.2) \quad dY = \left(\sum_j A_j \, d\log(x-a_j) + \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} dx \right) Y$$

$$A_j = \begin{pmatrix} r_{+j} \\ r_{-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_{-j} & r_{+j} \end{pmatrix}$$

$$r_{\pm j} = \sqrt{(-)^{\mp} i\lambda}\left(R^{+}_{\pm}(a_j;\lambda) + R^{-}_{\pm}(a_j;\lambda) \right)$$

線型方程式系 (2.2) の積分可能条件は次の形の非自律的なハミルトン系になる。ω は§1で与えられたものとし

(2.3) $$d r_{\pm j} = \{ r_{\pm j}, \omega \}$$

但し ポアソンかっこは

$$\{r_{+j}, r_{+j'}\} = \{r_{-j}, r_{-j'}\} = 0 \quad , \{r_{+j}, r_{-j'}\} = \delta_{jj'}$$

特に $n=1$ の時このハミルトン方程式はパンルベのV型の方程式の特別な場合になる。よって (2.1) $(x=a_1, a_2)$ はパンルベV型の特殊解を与える。

§3 フレドホルム理論

Lenard (J. Math. Phys. 7 (1966) 1268) によれば $P_n(a_1', \cdots, a_n'; a_1'', \cdots, a_n'')$ は核 $-\frac{2}{\pi}\frac{\sin(x-x')}{x-x'}$ を区間 I 上で考えた第2種フレドホルム積分方程式の，n次フレドホルム小行列

式に等しい。定義を思い出すと

$$(3.1)\quad \Delta_I(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\ell}{\ell!} \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_\ell$$

$$\times \det\left(\frac{\sin(x_j - x_k)}{x_j - x_k} \right)_{j,k=1,\cdots,\ell}$$

がフレドホルム行列式

$$(3.2)\quad R_I(x, x'; \lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\ell}{\ell!} \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_\ell$$

$$\times \frac{\sin(x_0 - x_1)}{x_0 - x_1} \cdots \frac{\sin(x_\ell - x_{\ell+1})}{x_\ell - x_{\ell+1}} . \quad (x_0 = x, x_{\ell+1} = x')$$

がレゾルベント

$$(3.3)\quad \Delta_I\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_m \\ x_1' \cdots x_m' \end{pmatrix}; \lambda) = (-\lambda)^m \Delta_I(\lambda) \det\bigl(R_I(x_j, x_k'; \lambda)\bigr)_{j,k=1,\cdots,m}$$

が m 次小行列式。

Lenard によれば，必要なのは，$m = n$，

$x_1 = a_1', \cdots, x_n = a_n', x_1' = a_1'', \cdots, x_n' = a_n''$

の場合であるが

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \log \Delta_I(\lambda) = (-)^{j+1} \lambda R_I(a_j, a_j; \lambda)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} \log \Delta_I(\lambda) = (-)^{j+k+1} \lambda^2 R_I(a_j, a_k; \lambda)^2$$

であるから $d \log \Delta_I(\lambda)$ がわかればよい。

問題を線型化するために，レゾルベントを修正した次の $R^{\pm}(x, x'; \lambda)$ および その $x' \longrightarrow \infty$ の極限 $R^{\pm\prime}_{\pm}(x; \lambda)$ を考える。

$$(3.4) \quad R^{\pm}(x, x'; \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_l$$

$$\times \frac{\pm e^{\pm i(x_0 - x_1)}}{2i(x_0 - x_1)} \frac{\sin(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \cdots \frac{\sin(x_l - x_{l+1})}{x_l - x_{l+1}}$$

$$(x_0 = x, \; x_{l+1} = x')$$

$$(3.5) \quad R^{\pm\prime}_{\pm}(x; \lambda) = \mp \lim_{\substack{|x'| \to \infty \\ \mathrm{Im}\, x' \gtrless 0}} 2ix' e^{\pm i x'} R^{\pm\prime}(x, x'; \lambda)$$

ここで §2のように $Y(x)$ を考える事により常微分方程式の変形理論と結びつく。最後に

$$(3.6) \quad d \log \Delta_I(x) = \mathrm{trace} \sum_{j=1}^{2n} \hat{Y}(a_j)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \hat{Y}(x) \Big|_{x = a_j} \begin{pmatrix} 0 & (-)^{j+1} \frac{2\lambda}{2} \\ & 0 \end{pmatrix} da_j$$

となる事より §1 の結果が従う。