数理解析研究所講究録
376巻 1980年 147-150

二次元表面波について

京大 数理研　吉原英昭

時刻 t で、流体が領域 $G(t)=\{(y_1,y_2)\mid -\infty<y_1<+\infty,\ -h+b(y_1)\le y_2\le \eta(t,y_1)\}$，$h=\mathrm{const}>0$，を占めるものとする。$\Gamma_s: y_2=\eta(t,y_1)$ は自由境界，$\Gamma_b: y_2=-h+b(y_1)$ は底である。流体は完全非可縮，運動は渦なし，重力場 $=(0,-1)$，質量密度 $\rho=1$ とすると，速度ベクトル $v=(v_1,v_2)$，圧力 p，自由表面をあらわす η は次の方程式をみたす。

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad \frac{\partial}{\partial t}v+(v\cdot\nabla)v=-(0,1)-\nabla p \\ &(2)\quad \mathrm{div}\,v=0,\quad \frac{\partial}{\partial y_2}v_1-\frac{\partial}{\partial y_1}v_2=0 \end{aligned}\right\}\quad 0\le t\le T,\ y\in G(t)$$

$$(3)\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+v\cdot\nabla\right)(y_2-\eta(t,y_1))=0,\quad p=p_0 \quad \text{on } \Gamma_s$$

$$(4)\quad N\cdot v=0 \quad \text{on } \Gamma_b$$

ここで，$\nabla=\mathrm{grad}$，$v\cdot\nabla=v_1\frac{\partial}{\partial y_1}+v_2\frac{\partial}{\partial y_2}$，$p_0=\mathrm{const}$，$N$: outer normal である。$t=0$ で初期値

$$(5)\quad \eta(0,y_1)=\eta_0(y_1),\quad v_1(0,y_1,\eta_0(y_1))=v_{10}(y_1)$$

をとるものとする。

Lagrange 座標を使って，問題を Sobolev 空間であつかう。t に依存する Γ_s の parameter 表示；$y_1 = x + X_1(t,x)$, $y_2 = X_2(t,x)$, $-\infty < x < +\infty$ を $X_t(t,x) = v(t, x+X_1(t,x), X_2(t,x))$ をみたすようにとる。$p = p_0$ on Γ_s より，$\nabla p \cdot X_x = 0$，（X_x は Γ_s の接ベクトルで，∇p は normal に平行であるから）。$X_{tt} = v_t + (v \cdot \nabla) v = -(0,1) - \nabla p$ であるから，$0 = X_x \cdot \nabla p = X_x \cdot (X_{tt} + (0,1)) = (1+X_{1x})X_{1tt} + X_{2x}(1+X_{2tt})$ となる。(2)より，$v_1 - i v_2$ は $y_1 + i y_2$ について holomorphic である。$v_1 - i v_2 \to 0$ （$y_1 + i y_2 \to \infty$）であれば，$v_1|_{\Gamma_s} \to v_2|_{\Gamma_s}$ なる線型作用素が存在する。$v_t|_{\Gamma_s} = X_t$ であるから，それを $X_{2t} = K X_{1t}$ と表示する。（$y_1 + i y_2$ 空間で Cauchy の積分定理を使い，$v_1|_{\Gamma_s}$ と $v_2|_{\Gamma_s}$ の関係式を導き，Γ_s の parameter 表示を使うと K の具体的な表現を得る。）

<u>記号</u>　$H^s = H^s(\mathbb{R}^1)$, $-\infty < s < +\infty$, を norm $\|u\|_s = \left(\frac{1}{2\pi}\int |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$ $\hat{u}(\xi) = \int u(x) e^{-ix\xi} dx$, をもつ Sobolev 空間とする。$w = (w_1, \cdots, w_m) \in H^s$ とは，$w_j \in H^s$, $j = 1, \cdots, m$ を意味し，$\|w\|_s = \left(\sum_1^m \|w_j\|_s^2\right)^{\frac{1}{2}}$ とする。

K のもつ性質についてのべる。K は X, b, h に依存する線型作用素で，$\forall$ integer $m \geq 2$, $\exists c > 0$ s.t. $X, X' \in H^m$, $b \in H^{m+6}$, $\|b\|_{m+6}$, $\|X\|_m$, $\|X'\|_m \leq c \implies K = K(X, b, h) : H^2 \to H^m$, linear cont.

$\|\{K(X,b,h) - K(X',b,h)\} u\|_m \leq C \|X - X'\|_m \|u\|_2$, $u \in H^2$,

$C = C(m, c, h) > 0$, $K(0, 0, h) = -i \tanh(hD)$, $D = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$。

定理　m: integer ≥ 6, $h \in H^{m+6}$ は小とする。もし $U, V \in H^m$ が小であれば，以下の様な $T>0$ が存在する：初期値問題

$$(6)\quad \begin{cases} (1+X_{1x})X_{1tt} + X_{2x}(1+X_{2tt}) = 0 \\ X_{2t} = K X_{1t} \end{cases}$$

$$(7)\quad X = U, \quad X_{1t} = V, \quad t = 0$$

は，$X \in C^2([0,T]; H^{m-2}) \cap C^1([0,T]; H^{m-1})$ となる解 X を唯一つもつ。

注 (i)　$h=\infty$ の場合，上記の定理は V.I. Nalimov によって証明された。(ii)　$0<h<\infty$, $\Gamma_b: y_2=-h$ の場合，L.V. Ovsjannikov, 鹿野・西田が，空間変数にかんして real-analytic な函数空間での一意的存在を示した。

証明の要点　$Y = X_{tt}$, $Z = X_x$, $W = (X, Y, Z)$, $W' = (X, Y_1)$ とおくと，方程式 (6) は，次の方程式に変換される，

$$(8)\quad X_{tt} = Y, \quad Y_{1tt} + a|D|Y_1 = f_1, \quad Y_{2t} = f_2, \quad Z_{1t} = f_3, \quad Z_{2t} = f_4$$

ここで，$a = a(W) = \left((1+Z_1)(1+Y_2) - Z_2Y_1\right)\left((1+Z_1)^2 + Z_2^2\right)^{-1}$, $f_j = f_j(W, W'_t, h)$ で，$m \geq 3$, $h \in H^{m+6}$, $W, W'_t \in H^m$ が小であれば，$f_j \in H^m$ であり，かつ，W, W'_t にかんして Lipschitz cont. である。初期値 $W(0)$, $W'_t(0)$ は (6), (7) より得られる。(8) の解を逐次近似法で得る。すなわち，j 番目の解 W^j を (8) の右辺と a に代入し，W^{j+1} について線型方程式を考える。次の補題により，W^{j+1} が存在する。

補題　$m \geq 2$, $A(t,x)$: real. $A \in C^0([0,T]; H^m)$, $A_t \in C^0([0,T]; H^2)$, $\sup_{t,x} |A(t,x)| < 1$ とする。

もし, $u_0 \in H^{m+\frac{1}{2}}$, $u_1 \in H^m$, $g \in C^0([0,T], H^m)$ であれば, 初期問題

$$u_{tt} + (1+A(t,x))|D|u = g. \quad u|_{t=0} = u_0. \quad u_t|_{t=0} = u_1$$ は.

$(\frac{\partial}{\partial t})^j u \in C^0([0,T], H^{m+\frac{1}{2}-\frac{j}{2}})$, $j=0,1,2$ となる解 u を唯一つもつ。

エネルギー不等式を用いて, W^j, $j=1,2,\cdots$ が収束列であることが示され, 次の補題が成立する。

<u>補題</u> $m \geq 4$, $b \in H^{m+6}$ は小とする。もし. 初期値 $W(0), W_t'(0)$ が, $W(0), W_t'(0) \in H^m$, $Y_1(0) \in H^{m+\frac{1}{2}}$ かつ小であるようなものであれば, $0 \leq t \leq T$ で, $X \in C^2([0,T], H^m)$, $Y_2, Z \in C^1([0,T], H^m)$, $(\frac{\partial}{\partial t})^j Y_1 \in C^0([0,T]; H^{m+\frac{1}{2}-\frac{j}{2}})$, $j=0,1,2$. となるような (8) の解 W が唯一つ存在するような $T>0$ がとれる。

参考文献

В. И. Налимов : Задача Коши-Пуассона, Динамика сплошной среды 18 (1974) 104–210.

L. V. Ovsjannikov : To the shallow water theory foundation, Archieves of Mechanics 26, 3, 407–422 (1974)

T. Kano, T. Nishida : Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, J. Math. Kyoto Univ. 19–2 (1979) 335–370