数理解析研究所講究録
376巻 1980年 101-112

放物型方程式の或る逆問題について

東大 理 鈴木 貴
東大 理 村山令二

§1 Introduction

我々がここで扱うのは、Neumann条件つきの、放物型方程式の初期値と係数を、解の境界値から決定するという問題である。

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$を、滑らかな境界$\partial\Omega$を持つ有界領域，$p(x)\in C^1(\bar{\Omega})$，$a(x)\in L^2(\Omega)$とする。放物型方程式：

$$
(E_q)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=-A_p u\equiv\triangle u-p(x)u \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}=0 \qquad (\nu:\text{単位外法線ベクトル}) \\ u\Big|_{t=0}=a(x)\end{cases}
$$

の解$u=u(t,x)$は、良く知られているように初期値aと係数pによって決まるわけであるが、逆に、$a(x)$, $p(x)$は、ある時刻までの解uの境界上の値により、決まるであろうか。我々は、空間次元が1のとき、初期値aにある仮定をおいて、上の問題が肯定的であることを証明した。$a(x)$について、ある程度の

仮定をおかなければならないことは容易に予想される。例えば、$a(x)\equiv 0$ ならば、(E_q) の解は $u\equiv 0$ であり、$p(x)$ は一意には決まらない。

<u>Def.</u> $r(x)-\Delta$ に Neumann 条件を与えたものの、$L^2(\Omega)$ での実現を A_r, その固有値、固有関数を、$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\{\varphi(\cdot,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ とする。初期値 $a\in L^2(\Omega)$ が、$(a,\varphi(\cdot,\lambda_n))\neq 0$ $(n=1,2,3\cdots)$ をみたすとき a を、<u>A_r に関する generating element</u> であるという。

我々の結果は次のものである。

<u>Theorem</u> $\Omega=(0,1)\subset\mathbb{R}^1$

$p(x), q(x)\in C^1[0,1]$, $a(x), b(x)\in L^2(0,1)$ に対する次の方程式で、(I) においては、a は A_p に関する generating element であるとする。

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\left(p(x)-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=0 & (t>0,\ x\in(0,1))\\
\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\xi)=0 & (t>0,\ \xi=0,1)\\
u(0,x)=a(x) & (x\in[0,1])
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\left(q(x)-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v(t,x)=0 & (t>0,\ x\in(0,1))\\
\dfrac{\partial v}{\partial x}(t,\xi)=0 & (t>0,\ \xi=0,1)\\
v(0,x)=b(x) & (x\in[0,1])
\end{cases}
$$

その時、ある有限時刻 $0<T_0<T_1<+\infty$ があって、$u(t,\xi)=v(t,\xi)$ $(T_0<t<T_1,\ \xi=0,1)$ ならば、$p(x)=q(x)$ $(x\in[0,1])$, $a(x)=b(x)$ (a.e. $x\in[0,1]$) が成立する。

Pierce [6] は、初期値が 0, 境界条件が $\xi=0$ で、第三

種非斉次（非斉次項≠0），$\xi=1$で第三種斉次の場合に、$u(t,\xi)$ $(0<t<T,\ \xi=0)$の観測によって$p(x)=q(x)$を示した。それによると、このような状況のもとで、A_pのスペクトル関数が観測によって一意に決まり、Gelfand-Levitanの理論[2]と結びつく。我々の場合にはそうではないけれども、証明のアイデアにおいて、Gel'fand-Levitan[2]に負うところがある。（§2参照）

偏微分方程式の初期値境界値問題では、係数、初期値とも既知のものと考えるのに対し、上の問題は、その逆問題と言える。既知量として、物理的に直接測定される、境界における解の値を用いている点で、Sabatier[8]の言う応用的逆問題（applied inverse problem）である。

放物型方程式の逆問題には、未知量にある条件（例えば、依存する空間変数が一つ少ないとか、変数分離形になっているとか）をつけた、Prilepko[7]，Isakov[3]，Iskenderov[4]や、Optimizationとして扱ったChavent[1]，などがあるが、我々の定理はそれらの扱いとは、異なっている。

以下では、§2で、定理の証明のあらすじを述べる。その際必要なPropositionを§3で証明する。§4で、多次元の場合などへの注意を述べる。

§2. 定理の証明のあらすじ

$q(x)-\frac{d^2}{dx^2}$にNeumann条件を課したものA_qの固有値、固有

関数を $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ $\{\psi(\cdot,\mu_m)\}_{m=1}^{\infty}$ とし、$\varphi(0,\lambda_n)=\psi(0,\mu_m)=1$ $(m,n=1,2,3\cdots)$ により正規化する。$\rho_n=\int_0^1\varphi(t,\lambda_n)^2dt$, $\sigma_m=\int_0^1\psi(t,\mu_m)^2dt$ $(m,n=1,2,3\cdots)$ とおくと、(I),(II)の解は、次のように固有関数展開される：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n t}\frac{(a,\varphi(\cdot,\lambda_n))}{\rho_n}\varphi(x,\lambda_n)$$

$$v(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\mu_m t}\frac{(b,\psi(\cdot,\mu_m))}{\sigma_m}\psi(x,\mu_m)\quad(\ t>0,\ x\in[0,1])$$

仮定より $u(t,\xi)=v(t,\xi)$ $(T_0<t<T_1,\ \xi=0,1)$ であるが、両辺は t について解析的だから、上式は $0<t<+\infty,\ \xi=0,1$ について成り立つ；

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n t}\frac{(a,\varphi(\cdot,\lambda_n))}{\rho_n}\varphi(\xi,\lambda_n)=\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\mu_m t}\frac{(b,\psi(\cdot,\mu_m))}{\sigma_m}\psi(\xi,\mu_m)\text{。}$$

a が generating element であり、$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ が simple だから $\xi=0$ とおいて、$\forall n\ \exists m(n)$ $\lambda_n=\mu_{m(n)}$, $\dfrac{(a,\varphi(\cdot,\lambda_n))}{\rho_n}=\dfrac{(b,\psi(\cdot,\mu_{m(n)}))}{\sigma_{m(n)}}\neq0$。

よってまた、$\xi=1$ として、$\dfrac{(a,\varphi(\cdot,\lambda_n))}{\rho_n}\varphi(1,\lambda_n)=\dfrac{(b,\psi(\cdot,\mu_{m(n)}))}{\sigma_{m(n)}}\psi(1,\mu_{m(n)})$ より、$\varphi(1,\lambda_n)=\psi(1,\mu_{m(n)})$ $(n=1,2,3\cdots)$。

ここで次の主張をする。

Prop 1) 次のような、$0\le t\le x\le1$ において二階連続微分可能な関数 $K(x,t)$ が存在する；

$$(\mathrm{E})\begin{cases}K_{xx}(x,t)-K_{tt}(x,t)+p(t)K(x,t)=q(x)K(x,t)\\ K_t(x,0)=0,\quad K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x\{q(s)-p(s)\}ds\end{cases}$$

2) 上の K に対して、

$$\psi(x,\mu_{m(n)})=\varphi(x,\lambda_n)+\int_0^x K(x,t)\varphi(t,\lambda_n)dt\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

1) の証明は§3で行なうことにして、2) を示す。

等式の右辺を$\psi(x)$とおき，$\lambda_n=\mu_{m(n)}=\lambda$ とおくと

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)=\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x,\lambda)+\left[\frac{d}{dx}K(x,x)\right]\varphi(x,\lambda)+K(x,x)\frac{d}{dx}\varphi(x,\lambda)+K_x(x,t)\varphi(x,\lambda)$$
$$+\int_0^x K_{xx}(x,t)\varphi(t,\lambda)dt$$

$(p(x)-\frac{d^2}{dx^2})\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda)$ により，

$$\begin{aligned}\lambda\psi(x)&=\lambda\varphi(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)\lambda\varphi(t,\lambda)dt\\&=\lambda\varphi(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)\left\{p(t)\varphi(t,\lambda)-\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t,\lambda)\right\}dt\\&=\lambda\varphi(x,\lambda)+\int_0^x\{K(x,t)p(t)-K_{tt}(x,t)\}\varphi(t,\lambda)\,dt\\&\quad-\left[K(x,t)\frac{d}{dt}\varphi(t,\lambda)-K_t(x,t)\varphi(t,\lambda)\right]_{t=0}^{t=x}\end{aligned}$$

φに関する境界条件を考慮し，1)のKの条件を考えれば

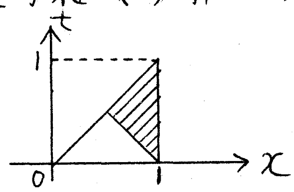
$$\lambda\psi(x)+\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)=q(x)\psi(x)。$$

一方，$\psi'(0)=\varphi'(0,\lambda)+K(0,0)\varphi(0,\lambda)=0$，$\psi(0)=\varphi(0,\lambda)=1$ である。常微分方程式のCauchy問題の解の一意性より $\psi(x)=\psi(x,\lambda)$ //

定理の証明を続ける。Propによって，

$$\begin{cases}\psi(1,\mu_{m(n)})=\varphi(1,\lambda_n)\\ \psi'(1,\mu_{m(n)})=0\end{cases}\quad より\quad\begin{cases}\int_0^1 K(1,t)\,\varphi(t,\lambda_n)dt=0\\ K(1,1)\,\varphi(1,\lambda_n)+\int_0^1 K_x(1,t)\varphi(t,\lambda_n)dt=0\end{cases}$$

これが $n=1,2,3\cdots$ について成立し，$\{\varphi(\cdot,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $L^2(0,1)$ で完全だから，$K(1,t)=K_x(1,t)=0$ $(t\in[0,1])$。Kが(E)の双曲型方程式の解であることから，依存領域の考察により，左図



の斜線で $K(x,t)\equiv 0$，特に，次が成立する；

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x\{q(s)-p(s)\}ds=0\quad\left(\tfrac{1}{2}\leq x\leq 1\right)$$

したがって，$q(x)=p(x)$ $\left(\frac{1}{2}\leq x\leq 1\right)$。

次に $\hat{q}(x)=q(1-x)$, $\hat{p}(x)=p(1-x)$ とおき、上の論法を繰り返せば、$\hat{q}(x)=\hat{p}(x)$ $(\frac{1}{2}\leq x\leq 1)$ ∴ $q(x)=p(x)$ $(0\leq x\leq\frac{1}{2})$。

最後に (I),(II)の解を固有関数展開した式において、$(a,\varphi(\cdot,\lambda_n))=(b,\varphi(\cdot,\lambda_n))$ $(n=1,2,\dots)$ を得るから、$a(x)=b(x)$ (a.e-$x\in[0,1]$) を得る。 //

§3、方程式(E)の解の存在について

$p(t)$ を $C^1[-1,1]$ に、$q(x)$ を $C^1[0,2]$ にそれぞれ拡張して次の問題$(E)_0$ の解 $K(x,t)$ の存在を示す:

$$(E)_0\begin{cases} K_{xx}(x,t)-K_{tt}(x,t)+p(t)K(x,t)=q(x)K(x,t) \\ K_t(x,0)=0 \\ K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x\{q(s)-p(s)\}ds \end{cases}$$

ただし、$(E)_0$ は下の Fig.1の斜線部で考える。

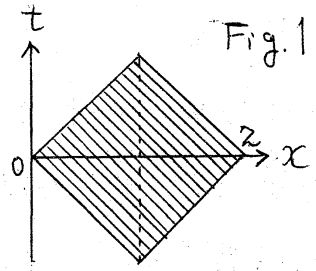


Fig.1

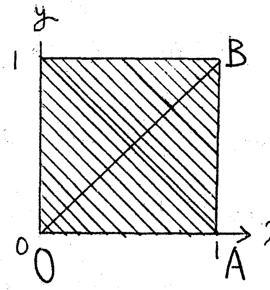


Fig.2

変数変換 $\xi=\frac{1}{2}(x+t)$, $\eta=\frac{1}{2}(x-t)$ により$(E)_0$を書き直し、ξ,η を改めて x,yと書くと、Fig.2の斜線部における次の$(E)_1$を得る。

$$(E)_1\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)=r(x,y)u(x,y) \\ (\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})(x,x)=0 \\ u(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

ここに $u(x,y)=K(x+y,x-y)$, $r(x,y)=\frac{1}{2}\{q(x+y)-p(x-y)\}$,

$\psi(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\{q(s)-p(s)\}ds$。

Lemma 1. 双曲型方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)=r(x,y)u(x,y)$ の Riemann 関数を $R(x,y;x_0,y_0)$, $Q(x,\xi)$ を $\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)(\xi,\xi;x,0)$ としたとき、$\varphi\in C^2[0,1]$ を次の積分方程式(Q)の解とする;

$$(Q)\quad \varphi(x)+\int_0^x Q(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi=2\psi(x)-\psi(0)$$

そうすれば、方程式:

$$(E)_2\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)=r(x,y)u(x,y)\\ u(x,x)=\varphi(x)\\ u(x,0)=\psi(x)\end{cases}$$

は、Fig.2の斜線部で、二階連続微分可能な解 u をもち、u は $(E)_1$ の解にもなる。

証明 (Q)は、第二種 Volterra 積分方程式だから、Q が $C^2([0,1]\times[0,1])$ に属し、ψ が $C^2[0,1]$ に属すれば、解 $\varphi\in C^2[0,1]$ を持つ。$\psi\in C^2[0,1]$ であることは、$p,q\in C^1[0,1]$ による。$Q\in C^2([0,1]\times[0,1])$ は、Q の定義と、下の Lemma 2 による。次に、方程式 $(E)_2$ は、特性曲線 OA、非特性曲線 OB 上に値を与えて双曲型方程式を解く問題であるが、Picard [5] が扱っている。

主張の後半を述べる。Riemann の公式により、

$$u(x,0)=\frac{1}{2}\{u(x,x)+u(0,0)\}+\frac{1}{2}\int_0^x\Big\{R(\xi,\xi;x,0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\xi,\xi)$$
$$+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)(\xi,\xi;x,0)u(\xi,\xi)\Big\}d\xi$$

が成立するから、$\varphi(x)$, $\psi(x)$ の定義により、

$$\int_0^x R(\xi,\xi;x,0)\left[\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right](\xi,\xi)\,d\xi=0 \quad 。$$

Lemma 2 に示される、$R(\xi,\xi;x,0)$ の x に関する微分可能性（その導関数は有界である）によって上式を x について微分して、

$$R(x,x;x,0)\left[\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right](x,x)+\int_0^x \frac{\partial R(\xi,\xi;x,0)}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right](\xi,\xi)\,d\xi=0 \quad 。$$

Gronwallの不等式を用いて、$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,x)=0$ //

このLemmaにより、$(E)_1$ の二階連続微分可能な解が得られ、従って、$(E)_1$ から変数変換により $(E)_0$ にうつって、(E) の解の存在が示された。

Lemma.2　$R=R(x,y;x_0,y_0)$ とおくとき、R, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial x_0}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x_0}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial x_0^2}$, $\frac{\partial^3 R}{\partial x\partial x_0^2}$, $\frac{\partial^3 R}{\partial y\partial x_0^2}$ は、すべて、$[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ で連続である。

証明は、R を逐次近似法により構成する手続きを詳しく検討すれば、得られる。その時、$r\in C^1([0,1]\times[0,1])$ に注意する。 //

§4. 多次元の場合などへの注意

多次元の場合にTheoremが成立するかどうか、今のところわかっていないが、次のことは、$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ に対して証明できる。

Prop 1.　$p(x)\geqq q(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ かつ、$(a,\varphi(\cdot,\lambda_1))\neq 0$ ならば、$u(t,\xi)=v(t,\xi)$ $(T_0<t<T_1<+\infty,\ \xi\in\partial\Omega)$ のとき、

$p(x)=q(x)\ (x\in\bar{\Omega})\quad a(x)=b(x)\ (a.e.\text{-}x\in\Omega)$。

証明には、最小固有値に属する固有関数$\varphi(\cdot,\lambda_1)$の定値性と、$p(x)\geqq q(x)$の仮定のもとでは、A_p, A_qのスペクトルが"一斉に同じ方向へずれている"ことを用いる。Theoremの証明とは、全く異なり、aが、A_pに関するgenerating elementであることまでは要求しない。

一次元の場合については、Theoremの次のようなvaria-tionがある：

1、Theoremにおいて、境界条件は第三種にしてもよい。また、境界条件をDirichletにした場合にも、$u(t,\xi)=v(t,\xi)$ $(T_0<t<T_1,\ \xi=0,1)$ のかわりに、$\frac{\partial u}{\partial x}(t,\xi)=\frac{\partial v}{\partial x}(t,\xi)$ $(T_0<t<T_1,\ \xi=0,1)$ とすれば、結論が成立する。この事は、上のProp 1.についても同様である。

2、最高階の係数が1でない場合にも、Liouville変換を利用するとTheoremに帰着される場合がある：

<u>Prop 2.</u> $d(x)>0\ (x\in[0,1])$, $d(x)\in C^3[0,1]$として、Theoremの(I),(II)の方程式がそれぞれ、$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(d(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-p(x)u$, $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(d(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)-q(x)v$の時も、結論は成り立つ。

最高階の係数を決める問題については、一次元の場合に、Liouville変換を利用することにより、Theoremが応用される場合がある：

Prop 3.　$\alpha(x), \beta(x) \in C^3[0,1]$, $\alpha(x), \beta(x) > 0$ $(x \in [0,1])$, $a(x), b(x) \in L^2(0,1)$ としたとき、次の方程式：

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -A_\alpha u \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) & (t>0,\ x \in (0,1)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\xi) = 0 & (t>0,\ \xi = 0,1) \\ u(0,x) = a(x) & (x \in [0,1]) \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) = -A_\beta v \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\beta(x)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & (t>0,\ x \in (0,1)) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(t,\xi) = 0 & \\ v(0,x) = b(x) & \end{cases}$$

において、aは、A_αに関する generating element, 更に、

$\dfrac{\beta(0)}{\alpha(0)} = \dfrac{\beta(1)}{\alpha(1)} = \left(\dfrac{\beta'(0)}{\alpha'(0)}\right)^2 = \left(\dfrac{\beta'(1)}{\alpha'(1)}\right)^2$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{\alpha(s)}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{\beta(s)}}$ とする。

その時、ある有限時刻 $0 < T_0 < T_1 < +\infty$ があって、

$u(t,\xi) = v(t,\xi)$ $(T_0 < t < T_1,\ \xi = 0,1)$ ならば、$\alpha(x) = \beta(x)$ $(x \in [0,1])$

$a(x) = b(x)$ $(\text{a.e-}x \in (0,1))$。

Prop 4.　Prop 3 において、方程式(I),(II) の境界条件が、Dirichletであり、α, β が $\dfrac{\beta(0)}{\alpha(0)} = \dfrac{\beta(1)}{\alpha(1)}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{\alpha(s)}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{\beta(s)}}$ であるとすると、aがA_αに関する generating element である時、

$\alpha(\xi)\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\xi) = \beta(\xi)\dfrac{\partial v}{\partial x}(t,\xi)$ $(T_0 < t < T_1,\ \xi = 0,1)$ であれば、Prop 3 の結論が成立する。

以上の Prop 2～Prop 4 について、drift の項がある場合などについては、検討中である。

References

[1] Chavent, G., Analyse fonctionelle et identification de coefficient répartis dans les équations aux dérivées partielles, These. Paris (1971)

[2] Gelfand, I.M., Levitan, B.M., On the determination of a differential equation from its spectral function, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 15 NO. 4 (1951) (Russian) = English translation: Amer. Math. Soc. Trans. Ser 2. Vol 1 253~304 (1955)

[3] Isakov, V.M., Uniqueness theorems for inverse problems of heat potentials, Siberian Math. J. vol 17 NO. 2 202~212 (1977)

[4] Iskenderov, A.D., Multidimensional inverse problems for linear and quasi-linear parabolic equations, Dokl. Akad. Nauk. SSSR Tom 225 No. 5 1564~1568 (1975)

[5] Picard, E., 偏微分方程式論 山口昌哉·田村祐三訳 現代数学社 (1977)

[6] Pierce, A., Unique identification of eigenvalues and coefficients in a parabolic problem, SIAM J. Control & Optimization vol 17 No. 4 494~499 (1979)

[7] Prilepko, A.I., Inverse problems of potential theory //

(elliptic, parabolic, hyperbolic, and transport equations)
Mathematical Notes vol 14 990~996 (1973)
[8] Sabatier, P., C., Introduction to applied inverse problems. Springer Lecture Notes in Physics 85
Applied Inverse Problems 1~26 (1978)