数理解析研究所講究録
376巻 1980年 88-100

退化放物型方程式の基本解とその応用

京大 数理研　岩崎 敷久
阪大 理学部　岩崎 千里

1. 序.

次の発展方程式の基本解について考える.

$$
(1)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} + p(x, D)\right] E(t) = 0 \quad , \quad t>0 \, , \, x \in R^n \\ \\ E(0) = I \quad , \end{cases}
$$

ここに, $p(x, D)$ は擬微分作用素 (P_s-D-O_p) で,

$$
p \sim p_m + p_{m-1} + p_{m-2} + \cdots
$$

$$
\left(p_j(x, \lambda\xi) = \lambda^j p_j(x, \xi) \quad \forall \lambda > 0 \right)
$$

なる展開をもつものとする.

今, $\frac{\partial}{\partial t} + p(x, D)$ が放物型, 即ち

$$
(2)\qquad p_m(x, \xi) > 0 \, , \quad \xi \neq 0 \, , \qquad m > 1
$$

とする. このとき, $P(x, D)$ は強楕円型であって, Gårdingの不等式

$$
(3)\qquad Re(P(x, D)u, u) \geqq \varepsilon \|u\|^2_{m/2} - C\|u\|^2_0 \, , \, u \in S(R^n).
$$

及び，a priori estimate

(4) $$\|u\|^2_{m+s} \leq C_s(\|Pu\|_s^2 + \|u\|_s^2), \quad u \in \mathcal{S}(R^n).$$

を満たす．従って適当な関数空間を考えれば，semi-groupの理論を使って基本解$E(t)$の存在が示される．

一方(2)のもとで，symbol計算によってPs-D-Opのparametrix: $\sigma(E(t)) \sim e^{-p_m(x,\xi)t} f(t,x,\xi)$

$$f = 1 + f_1 + f_2 + \cdots \quad (f_j e^{-p_m t} \in S^{-j}_{1,0})$$

が構成できる．従って(3)，(4)を使わないでtをparameterとするPs-D-Opとして基本解$E(t)$を表現することもできる．[4]．そして放物型の特徴である$E(t) \in S^{-\infty}$ $(t>0)$も従う．これを使うとGårdingの不等式やa priori estimateが逆に示せる．

このことを作用素Pを少し一般化して考えてみる．発展方程式がよい空間で解けないと困るので，

(5) $$p_m(x,\xi) \geq 0, \qquad m > 1$$

と仮定する．$p_m(x,\xi) = 0$ $(\xi \neq 0)$なる点があれば$P(x,D)$はもはや楕円型でない。それに代るものとして$p(x,D)$が準楕円型となる条件をつけるのが放物型の性質をある程度保つという意味で自然だと思われる．ここではそれらを退化放物型と呼ぶことにする．

これに関連した結果をあげる．

A. Melin [6] によると

$p(x,\xi)$ が(5)を満たしている. $\Longrightarrow$ (6), (7)は同値

(6) $p(x,D)$ の subprincipal symbol $+ \frac{1}{2}$ (positive trace of Fundamental matrix > 0 on $\Sigma = \{(x,\xi);\ p_m(x,\xi) = 0\}$

(7) $\mathrm{Re}\,(P(x,D)u,\ u) \geqq \varepsilon \|u\|^2_{(m-1)/2} - C\|u\|^2_0$

$u \in C_0^\infty(K)$, K: compact set.

L. Hörmander [3] によると

$p(x,\xi)$ が(5), (6)を満たしている. $\Rightarrow$

(8) $\|u\|^2_{m-1+s} \leqq C_s\,(\|Pu\|^2_s + \|u\|^2_s)$, $u \in C_0^\infty(K)$

$\Rightarrow$

(9) P: hypoelliptic.

が成立する. よってPに(5)(6)を仮定すると放物型の時と同じ様に(7), (9)と semi-group の理論より基本解の存在がわかる.

次に問題となるのは $E(t)$ のより詳しい性質である. (例えば Ps-D-Op になるか?) R. Beals [1] によると, Pが(5), (8)を満たせばPの parametrix が Ps-D-Op でつくられる. 又, B. Helffer [2] は(7)と同じ論文の中の Beals の結果(*)があれば, 基本解 $E(t)$ が $S^0_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ に入ることを注意した.

(*) $P \in S^0$, かつ $P: L^2 \to L^2$ isomorphism ならば $P^{-1} \in S^0$

しかし，symbolの形は不明である．一方，A. Menikoff & J. Sjöstrand [7]では(5),(6)さらにp_mが$\Sigma=\{p_m=0\}$でexactly doubleでvanishし，かつΣがsymplectic manifoldになるとき，$E(t)$に対して$f\exp\varphi$なる形のcomplex phase functionをもつFourier Integral Operatorとしてparametrixをつくり，それを使って$\mathrm{Tr}\,E(t)$ $(t\to 0)$を計算した。

ここでは(5),(6)のもとで$E(t)$は$t>0$で$S^{-\infty}$なるPs-D-Opであり，$f\exp\varphi$ (φ: real valued)なる形のsymbolをもつPs-D-Opのparametrixを持つことを示す．ここで，φ, fはpのsymbol計算によって求められることに注意する．系として(7),(8)の不等式が従う．A. Menikoff & J. Sjöstrandの結果でΣがsymplecticなる仮定もはずすことができる．

2．記号と仮定

以下ではPs-D-Opのsymbolとして Weyl symbolを使う．即ち $a\in S^m_{\rho,\delta}$に対して，作用素$a(x,D)$を

$$a(x,D)u(x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^{2n}}e^{i(x-y)\cdot\xi}a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)\,dy\,d\xi$$

と定義する．

記号の定義

σ'; Canonical two form $= d\xi \wedge dx = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j$ on T^*R^n.

h: Hamilton vector field of p_m i.e. $\sigma'(u, h) = dp_m(u)$

$\mathfrak{F}$: Hamilton (Fundamental) matrix of p_m

i.e. $\sigma'(u, \mathfrak{F}v) = d^2 p_m(u, v)$

但し $d^2 p_m$: Hesse matrix in $(x, \xi) \in T^*R^n$.

J_1: $\sigma'(u, J_1 g) = g(u)$

注意: $h = J_1 dp_m$, $\mathfrak{F} = J_1 d^2 p_m$ と書ける.

$b = ih$, $A = i\mathfrak{F}$ とおきこの記号を使うことにする

$\widetilde{Tr} A = \sum_{i \in \mathfrak{N}} \mathrm{Re}\, \lambda_i$, 但し λ_i は A の固有値, $\mathfrak{N} = \{i; \mathrm{Re}\, \lambda_i > 0\}$

(positive trace of A) とする.

仮定 $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}$ $(m > 1)$; $p_k(x, \lambda\xi) = \lambda^k p_k(x, \xi)$, $\lambda > 0$

$\Sigma = \{X = (x, \xi); \ p_m(X) = 0\} \subset T^*R^n$

(i) $p_m(x, \xi) \geqq 0$

(ii) $\exists\, c > 0$ $\quad 2\,\mathrm{Re}\, p_{m-1} + \widetilde{Tr} A > c$ on $\Sigma \cap \{|\xi| = 1\}$

注意 ① Σ 上では A は real eigenvalue のみをもつ.

② p_{m-1} は subprincipal symbol である.

3. 結果.

<u>定理1</u>. 仮定(i)(ii)のもとで(1)の基本解$E(t)$が$S^0_{1/2,1/2}$に symbol をもつ Ps-D-Op として構成できる. $t>0$で$E(t)\in S^{-\infty}$. さらに$E(t)$は次の漸近形をもつ.

$$E(t)\sim\sum_{j=0}^{\infty} f_j \exp\varphi,\quad f_0\equiv 1,\quad f_j\exp\varphi\in S^{-\varepsilon j}_{1/2,1/2}\quad (0<\varepsilon<1/6).$$

ここで. φは次の様に決める. $\{\Sigma$ かつ $t=0\}$ の近傍では

$$\varphi_1=-p_m t-p_{m-1}t-\sigma(bt/2,\ F(At/2)\,bt/2)$$
$$-2^{-1}\,\mathrm{Tr}(\log[\cosh(At/2)]),$$

但し $F(\lambda)=(i\lambda)^{-1}(1-\lambda^{-1}\tanh\lambda)$.

それ以外では

$\varphi_2=-p_m t-\langle\xi\rangle^{m-1}t$ なるもの. すなわち,

$\varphi=\psi_1\varphi_1+(1-\psi_1)\varphi_2$ とする. 但し $\psi_1=\psi^1\psi^2$,

$\psi^1=\psi(p_m\langle\xi\rangle^{1-m-2\varepsilon})$, $\psi^2=\psi(t\langle\xi\rangle^{m-1-\delta})$で, $0<12\delta<1-6\varepsilon<1$,

$\psi(s)$は $\psi\in C^\infty[0,\infty)$, $\psi=1$ $(s\le 1)$. $\psi=0$ $(s\ge 2)$. $\psi'<0$ $(1<s<2)$

とする.

$\int_0^c E(t)\,dt$ $(c>0)$ が Pに対する parametrix であるから次

の結果を得る.

<u>系</u> (A. Melin & L. Hörmander)

$\exists\lambda$ s.t. $\mathrm{Re}((P+\lambda)u,u)\ge 0$, $u\in\mathcal{S}(R^n)$.

$\|u\|^2_{m-1+s}\le C_s(\|Pu\|^2_s+\|u\|^2_s)$, $u\in\mathcal{S}(R^n)$.

<u>Example</u>. R^{2n+l}で $p=\sum_{j=1}^{k}(D_{x_j}^2+x_j^2D_{y_j}^2)+\sum_{j=1}^{l}D_{z_j}^2$ を考える. $E(t)$ の symbol は

$$\prod_{j=1}^{k}\{\cosh|\eta_j|t\}^{-1}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\xi_j^2+x_j^2\eta_j^2}{|\eta_j|}\right)\tanh(|\eta_j|t)-\sum_{j=1}^{l}\zeta_j^2t\right\}$$

$$=\exp\varphi_1$$

で与えられる. $\Sigma=\{\xi_j,\ x_j\eta_j=0\ (1\le j\le k),\ \zeta_i=0,\ (1\le i\le l)\}$ である.

p_m に対してさらに制限をおく.

<u>仮定</u> (iii) p_m; exactly double に Σ で vanish する.

i.e. $p_m(X)\geqq c\,d(X,\Sigma)^2\quad(|\xi|=1,\ X=(x,\xi),\ c>0)$

$d(X,\Sigma)=$ distance of X to Σ in $R_x^n\times R_+\times S^{n-1}$

<u>注意</u>. この時 Σ は C^∞- submanifold of $R_x^n\times R_\xi^n\setminus\{0\}$ となる.

<u>定理2</u>. 仮定(ii),(iii)のもとで $(\delta\le 1)$. φ_1 を次の φ_3 に代えた時, R^n の compact set 上で一様な漸近展開が成立する.

$$\varphi_3=-p_{m-1}(a)t+i\sigma'((a-X),\tanh(A(a)t/2)(a-X))$$
$$-2^{-1}\mathrm{Tr}(\log[\cosh(A(a)t/2)]),$$

但し a は nbd. of Σ から Σ への C^∞- 写像で

$$|d(X, a(X)) - d(X, \Sigma)| \leq c\, d(X, \Sigma)^2$$

を満たすものとする.

4. 応用.

定理2を使うと, $\mathrm{Tr}\, E(t)$ $(t \downarrow 0)$ が計算できる. これに Karamata の Tauber型定理を適用すると P の固有値の漸近分布が得られる.

M を n 次元 compact C^∞-manifold, dM をその上の positive smooth density とする.

仮定. (iv) P; formally self-adjoint Ps-D-Op in M.

i.e. $$\int_M Pu\,\bar{v}\,dM = \int_M u\,\overline{Pv}\,dM, \quad u, v \in C^\infty(M).$$

補題 (1) $p_m(x,\xi)$ が well defined on T^*M. これより仮定(i) (iii)が well defined.

(2) 仮定(i)のもとで, p_{m-1}, A は Σ 上 well defined. これより仮定(ii)が well defined.

(3) 仮定(iv)より p_m; real valued on T^*M, p_{m-1}; real valued on Σ.

(4) 仮定(iii)のもとで $\Sigma = \bigcup_{\text{disjoint}} \Sigma^j$, ($\Sigma^j$: connected component $j = 1, \ldots, l$) と分けると,

Σ^j; closed conic submanifold $\subset T^*M$ である. 従って

$\mathrm{codim}\,\Sigma^j = d_j$ として，$d = \mathrm{codim}\,\Sigma$ を $d = \min\limits_{1\le j\le l}\{d_j\}$ で定義する．又，$\Sigma^0 = \bigcup\limits_{j\,;\,d_j=d} \Sigma^j$ とする．

定理3．仮定(i),(ii),(iv)のもとで

(1) $P : D(P) = C^\infty(M)$ は $L^2(M, dM)$ 上の下に有界な essentially self-adjoint operator である．

(2) P は discrete eigenvalues のみをもつ．

さらに (iii)を仮定すると

(3) $N(\lambda)$ を λ 又はそれより小さい eigenvalues の数とする．$\lambda\to\infty$ の時の漸近形は次で与えられる．

(a) $n - md/2 < 0$ のとき

$$N(\lambda) = \{c_1 + o(1)\}\,\lambda^{n/m}$$

(b) $n - md/2 = 0$ のとき

$$N(\lambda) = \{c_2 + o(1)\}\,\lambda^{n/m}\log\lambda$$

(c) $n - md/2 > 0$ のとき

$$N(\lambda) = \{c_3 + o(1)\}\,\lambda^{(n-d/2)/(m-1)},$$

但し

$$c_1 = (2\pi)^{-n}\,\Gamma(n/m+1)^{-1}\int_{T^*M} e^{-p_m}\,dx\,d\xi$$

$$c_2 = 2^{-n}\pi^{d/2-n} m^{-1}\,\Gamma(n/m+1)^{-1} \times \int_{\Sigma^0}\left(p_{m-1}+\tfrac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Tr}}A\right)e^{-\left(p_{m-1}+\frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Tr}}A\right)}\,d\Sigma^0$$

$$c_3 = 2^{-n}\pi^{d/2-n}\,\Gamma\left((n-d/2)/(m-1)+1\right)^{-1}$$
$$\times\int_{\Sigma^0} e^{-p_{m-1}}\left\{\det\left[\left(\tfrac{A}{2}\right)^{-1}\sinh\left(\tfrac{A}{2}\right)\right]\right\}^{-1/2} d\Sigma_0 .$$

注意. (1) $dx\,d\xi$ は $d\xi\wedge dx$ から induce される T^*M の density.

(2) $d\Sigma^0$ は p_m と $dx\,d\xi$ による induced density on Σ^0.

i.e. (u,v) を $\Sigma^0=\{u=0\}$ (locally) なる local coordinate とするとき $d\Sigma^0=\{\det(H_{uu}/2)\}^{-1/2}\,\Phi\, dv$ で定義する. 但し, $\Phi\, du\, dv = dx\, d\xi$, H_{uu} は変数 u に関する Hesse matrix of p_m.

注意. $n-md/2=0$ の場合は $p_{m-1}+\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{Tr}}A$ は, 正値で ξ について homogeneous order $m-1$ の関数なら何におきかえてもよい. 即ち, c_2 は $p_{m-1}+\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{Tr}}A$ には independent で $d\Sigma^0$ のみによる.

5. 証明について.

Weyl symbol に対しては $a_i\in S^{m_i}_{\rho_i,\delta_i}$ $(i=1,2)$, $\rho_i>\delta_{3-i}$ とするとき Ps-D-Op の積 $a_1(x,D)a_2(x,D)=(a_1\circ a_2)(x,D)$ は

$$a_1\circ a_2 \equiv \sum_{k=0}^{\infty}(2i)^{-k}(k!)^{-1}\sigma_k(a_1,a_2) \quad \mathrm{mod}\ S^{-\infty}$$

なる symbol 展開をもつ. $\sigma_k(a_1,a_2)=\sum_{|\alpha+\beta|=k}\frac{k!}{\alpha!\beta!}(-1)^{|\alpha|}\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha a_1\,\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a_2$.

注意　$\sigma_1(a_1, a_2) = \{a_1, a_2\}$ (Poisson bracket) で σ_k はその extension である.

今 $\exp\varphi$ が $S^0_{1/2,1/2}$ に属するとして $(\frac{\partial}{\partial t} + p)\circ \exp\varphi$ を展開すると次を得る.

$$\sim \frac{\partial}{\partial t}\exp\varphi + \sum_{k=0}^{\infty}(2i)^{-k}(k!)^{-1}\sigma_k(p, \exp\varphi)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\exp\varphi + \sum_{k=0}^{2}(2i)^{-k}(k!)^{-1}\sigma_k(p_m, \exp\varphi)$$

$$+ p_{m-1}\exp\varphi + S^{m-1-1/2}_{1/2, 1/2}$$

$$= g\exp\varphi$$

$g\exp\varphi \in S^{m-1-\varepsilon}_{1/2,1/2}$ $(\varepsilon > 0)$ となる様に φ を求める. 実際 φ はこれを満たしている. 特に φ_1 は $\Sigma \cap \{t=0\}$ の近傍で次の方程式を近似的に満たしている.

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \displaystyle\sum_{k=0}^{2}(2i)^{-k}(k!)^{-1}\sigma_k(p_m, \exp\varphi_1)\exp(-\varphi_1) + p_{m-1} = 0 \\ \varphi_1\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

φ_1 の求め方は(10)の微分した方程式を考え, φ, $d\varphi$, $d^2\varphi$ をそれぞれ独立な関数として近似的に解く. 2回微分すると, $X = iJ d^2\varphi$ の近似式

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} + A - \dfrac{1}{4}AX^2 = 0 \\ X|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

を得る．これの解は　$X = -2\tanh(At/2)$ である．

φ_1 が求まれば，次の形の Transport equation (11) を近似的に順次といて，$f = 1 + f_1 + f_2 + \cdots$　を求める．

$$\text{(11)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{2} (2i)^{-\nu}(\nu!)^{-1}\{\sigma_\nu(p_m, f\exp\varphi_1) - \sigma_\nu(p_m, \exp\varphi_1)f\} \\ \times \exp(-\varphi_1) = h \\ f|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

この様にして φ，f_j は決まるが，φ の中に現われる $\tanh(At/2)$，$F(At/2)$ 等の well defined なることや　$f_j \exp\varphi$ が $S^{-\varepsilon j}_{1/2,1/2}$ に属することを示すのには，詳しい議論が必要である．

parametrix が求まれば，$E_N(t) = \sum_{j=0}^{N} f_j \exp\varphi$，$G_N(t) = \left(\dfrac{d}{dt} + P\right) E_N(t)$　とおくと，基本解 $E(t)$ は

$$E(t) + \int_0^t E(t-s)G_N(s)ds = E_N(t,s)$$

なる Ps-D-Op の Volterra 型積分方程式を満たす。これを解くと $E(t)$ が Ps-D-Op であることがわかる．

文　献

[1] R. Beals : Characterization of pseudodifferential operators and applications. Duke Math. J., 44, 45-57 (1977).

[2] B. Helffer : Quelques examples d'operateurs pseudo-differentiels localement resolubles. Lecture note in Math., 660 . Springer.

[3] L. Hörmander : A class of hypoelliptic pseudodifferential operators with double characteristics. Math. Ann., 217, 165-188 (1975).

[4] C. Iwasaki : The fundamental solution for pseudo-differential operators of parabolic type, Osaka J. Math., 14, 569-592 (1977).

[5] C. Iwasaki & N. Iwasaki : Parametrix for a degenerate parabolic equations Proc. Japan Acad., 55, 237-240 (1979).

[6] A. Melin ; Lower bounds for pseudo-differential operators. Ark. Mat., 9, 117-140 (1971).

[7] A. Menikoff & J. Sjöstrand ; On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators. Math. Ann., 235, 55-85 (1978).