

二重特性根を持つ一階双曲型方程式系の
解の特異性の伝播について

阪大 理学部 一, 瀬 弥

§0. 序 . 本稿では, 次の双曲型作用素系についての初期
値問題を考察する .

$$(0.1) \quad \mathbb{L} = D_t + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (t, x, t_x) + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} (t, x, t_x)$$

$$\text{on } [0, T] \times \mathbb{R}^n \quad (D_t = -\sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial t}).$$

ここで, 実数値関数 $\lambda_j(t, x, \xi)$ ($j=1, 2$) は通常の擬微分作
用素のクラス $B^{\infty}([0, T]; S^1)$ に属し, 特に

$$(0.2) \quad \lambda_j(t, x, \delta \xi) = \delta \lambda_j(t, x, \xi) \quad (|\xi| \geq M, \delta \geq 1)$$

なるものとする . $b_{jke}(t, x, \xi)$ は $B^{\infty}([0, T]; S^0)$ に属す .

$G(x) = {}^t(g_1(x), g_2(x))$ ($g_j(x) \in H^{-\infty} = \bigcup H_s$) に対して, 初期
値問題

$$(0.3) \quad \begin{cases} \mathbb{L} U(t, x) = 0 & \text{on } [0, T], \\ U(0, x) = G(x) \end{cases}$$

を考える。但し, $U(t, x) = {}^t(u_1(t, x), u_2(t, x))$ 。

本稿の目的は, 特性根 $-\lambda_j(t, x, \tau)$ ($j=1, 2$) に関する条件

$$(*) \quad \begin{cases} \{\tau + \lambda_i, \{\tau + \lambda_j, \tau + \lambda_k\}\}(t, x, \tau) \equiv 0 \\ \text{on } [0, T] \times \mathbb{R}_{x, \tau}^{2n} \quad (i, j, k = 1, 2) \end{cases}$$

のもとで, 解の特異性の伝播の様子を解析することである。

なお, C^1 級関数 $f(t, x; \tau, \zeta)$, $g(t, x; \tau, \zeta)$ に対して, $\{f, g\}(t, x; \tau, \zeta)$ はポアソングラケットをあらわす。

最近, 熊ヶ郷-谷口-戸崎 [4], 熊ヶ郷-谷口 [5] は, 一般の主部対角形の双曲型作用素系について, 解の特異性の伝播を調べた ([5] の定理 3.4)。このとき, 解の特異性の伝播は無数の“位相関数の多重積”を用いてあらわされる。本稿では, 条件 (*) のもとでは特異性の伝播は 5 種類の位相関数 $\phi_1, \phi_2, \phi_1 \# \phi_2, \phi_2 \# \phi_1, \phi_1 \# \phi_2 \# \phi_1$ を用いてあらわされることを示す。特性根が包合的, すなわち,

$$(0.4) \quad \begin{cases} \{\tau + \lambda_1, \tau + \lambda_2\} = 0 \\ \text{on } \Sigma = \{(t, x, \tau); \lambda_1 = \lambda_2\} \end{cases}$$

の場合 [1], [2], [6], [7], [8], [9], [10] 等の結果があるが, 我々の扱うものは一般には包合的ではないことに注意する。例えば, $\lambda_1 = t\zeta, \lambda_2 = -t\zeta$ は条件 (*) をみたすが

, (0.4)は満たさない.

§1. 準備. §0の $\lambda_j(t, x, \bar{z})$ ($j=1, 2$) に対し, $\phi_j(t, \delta; x, \bar{z})$ もアイコナル方程式

$$(1.1) \quad \partial_t \phi_j + \lambda_j(t, x, \nabla_x \phi_j) = 0, \quad \phi_j|_{t=\delta} = x \cdot \bar{z}$$

の解とする. その時, “位相関数の多重積” $\bar{\pi} = \bar{\pi}_{j_1, \dots,$

$$j_{\nu+1}(t_0, \dots, t_{\nu+1}; x, \bar{z}) = \phi_{j_1}(t_0, t_1) \# \dots \# \phi_{j_{\nu+1}}(t_\nu, t_{\nu+1})$$

($j_k = 1, 2$, $0 \leq t_{\nu+1} \leq \dots \leq t_0 \leq T_0$, “ $T_0 > 0$ は, ν に独立な定数”)を[4]に従って次で定義する.

$$(1.2) \quad \bar{\pi}(t_0, \dots, t_{\nu+1}; x^0, \bar{z}^{\nu+1}) = \sum_{k=1}^{\nu} \{ \phi_{j_k}(t_{k-1}, t_k; X_V^{k-1}, \bar{z}_V^k) - X_V^k \cdot \bar{z}_V^k \} + \phi_{j_{\nu+1}}(t_\nu, t_{\nu+1}; X_V^\nu, \bar{z}^{\nu+1}),$$

但し, $X_V^0 = x^0$ で, $\{X_V^k, \bar{z}_V^k\}_{k=1}^{\nu}(t_0, \dots, t_{\nu+1}; x^0, \bar{z}^{\nu+1})$ は

$$(1.3) \quad \begin{cases} x^k = \nabla_{\bar{z}} \phi_{j_k}(t_{k-1}, t_k; x^{k-1}, \bar{z}^k), \\ \bar{z}^k = \nabla_x \phi_{j_{k+1}}(t_k, t_{k+1}; x^k, \bar{z}^{k+1}), \quad k=1, \dots, \nu \end{cases}$$

の解とする(詳しくは, [4]の定理1.8をみよ). 特に

断りのない限り, 上述の正定数 T_0 を以下用いる. 次に,

$J = (j_1, \dots, j_{\nu+1})$ ($j_k = 1, 2$), (γ, η) と点列 $\{t_0, \dots, t_{\nu+1}\}$

($T_0 \geq t_0 \geq \dots \geq t_{\nu+1} \geq 0$) に対して, $(Q_J, P_J)(\sigma) = (Q_J, P_J)$

$(\sigma; t_0, \dots, t_{\nu+1}; \gamma, \eta)$ ($t_{\nu+1} \leq \sigma \leq t_0$)は, 初期条件 $(Q_J,$

$P_J)(t_{\nu+1}) = (\gamma, \eta)$ をみたし, $t_k < \sigma < t_{k-1}$ ($k=1, \dots, \nu+1$)

なる σ について, 方程式

$$(1.4) \quad \begin{cases} \frac{dQ_J}{d\sigma}(\sigma) = \nabla_{\sigma} \lambda_{jk}(\sigma, Q_J, P_J), \\ \frac{dP_J}{d\sigma}(\sigma) = -\nabla_x \lambda_{jk}(\sigma, Q_J, P_J) \end{cases}$$

もみたす σ の連続関数として定義される。この $(Q_J, P_J)(\sigma)$ と (1.2) の互について、次の命題を得る。

命題 1.1. (y, ν) を R^{2n} の任意の点とし、 x を

$$(1.5) \quad \gamma = \nabla_{\sigma} \mathbb{I}_{j_1, \dots, j_{\nu+1}}(t_0, \dots, t_{\nu+1}; x, \nu)$$

もみたす点とする。そのとき、(1.4) の $(Q_J, P_J)(\sigma; t_0, \dots, t_{\nu+1}; y, \nu)$ ($J = (j_1, \dots, j_{\nu+1})$) と (1.3) の解 $\{x_{\nu}^k, \Xi_{\nu}^k\}_{k=1}^{\nu}$ について、

$$(Q_J, P_J)(t_{\ell}; t_0, \dots, t_{\nu+1}; y, \nu)$$

$$= (X_{\nu}^{\ell}, \Xi_{\nu}^{\ell})(t_0, \dots, t_{\nu+1}; x, \nu) \quad (\ell = 0, \dots, \nu+1)$$

$$(X_{\nu}^0 = x, \Xi_{\nu}^0 = \nabla_x \mathbb{I}_{j_1, \dots, j_{\nu+1}}(t_0, \dots, t_{\nu+1}; x, \nu),$$

$$X_{\nu}^{\nu+1} = y, \Xi_{\nu}^{\nu+1} = \nu)$$

が成立する。

証明は、略す。

§ 2. 位相関数の多重積の縮約. 先づ, 本稿で基本となる補題を述べる.

補題 2. 1. §1で定義された $(Q_J, P_J)(\sigma; t_0, \dots, t_{\nu+1}; \tau)$ ($J = (j_0, \dots, j_{\nu+1})$, $j_k = 1, 2$, $T_0 \geq t_0 \geq \dots \geq t_{\nu+1} \geq 0$) に対して, $v(\sigma)$ を

$$v(\sigma) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\sigma, Q_J(\sigma), P_J(\sigma))$$

で定義する. このとき, λ_1 と λ_2 が §0で述べた条件(*)を満足するならば, $v(\sigma)$ は σ についての一次関数となる.

証明. $\sigma \in (t_k, t_{k-1})$ なる σ について

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\sigma}(\sigma) &= -\{\tau + \lambda_2, \tau + \lambda_{j_k}\}(\sigma, Q_J(\sigma), P_J(\sigma)) \\ &\quad + \{\tau + \lambda_1, \tau + \lambda_{j_k}\}(\sigma, Q_J(\sigma), P_J(\sigma)) \end{aligned}$$

が成立する. よって, $j_k = 1$ でも $j_k = 2$ でも

$$\frac{dv}{d\sigma}(\sigma) = \{\tau + \lambda_1, \tau + \lambda_2\}(\sigma, Q_J(\sigma), P_J(\sigma)).$$

$v(\sigma)$ は $C^1([t_{\nu+1}, t_0])$ に属する. 次に, 条件(*)より

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{d\sigma^2}(\sigma) &= -\{\{\tau + \lambda_1, \tau + \lambda_2\}, \tau + \lambda_{j_k}\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (t_k < \sigma < t_{k-1})$$

が成立する. よって補題を得る. 証明終り.

定理 2.2. 条件(*)を仮定する。そのとき, $\{t, t_1, t_2, \lambda\}$ ($T_0 \geq t > t_1 > t_2 > \lambda \geq 0$) に対して,

$$(2.1) \quad \begin{cases} \varphi_1 = t - \frac{(t_1 - t_2)(t_2 - \lambda)}{t - t_1 + t_2 - \lambda}, \\ \varphi_2 = t_1 - t_2 + \lambda - \frac{(t_1 - t_2)(t_2 - \lambda)}{t - t_1 + t_2 - \lambda} \end{cases}$$

とおけば,

$$(2.2) \quad \mathbb{F}_{1,2,1}(t, \varphi_1, \varphi_2, \lambda; \alpha, \beta) = \mathbb{F}_{2,1,2}(t, t_1, t_2, \lambda; \alpha, \beta)$$

が成立する。

証明の方針. (2.1)の関数 φ_j ($j=1, 2$) を, (2.2) をみたす関数として決定する。今, (2.2) をみたす φ_j が存在したとする。但し, この φ_j は α と β には独立と仮定しておく。[4]の定理 2.3 より,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{F}_{2,1,2}(t, t_1, t_2, \lambda) + \lambda_2(t, \alpha, \nabla_x \mathbb{F}_{2,1,2}) = 0, \\ \mathbb{F}_{2,1,2}|_{t=t_1} = \mathbb{F}_{1,2}(t_1, t_2, \lambda). \end{cases}$$

よって, $\Delta = (t, \varphi_1, \varphi_2, \lambda; \alpha, \beta)$ とおけば, (2.2) より $\mathbb{F}_{1,2,1}(\Delta)$ は

$$(2.3) \quad \begin{cases} \partial_t (\mathbb{F}_{1,2,1}(\Delta)) + \lambda_2(t, \alpha, \nabla_x \mathbb{F}_{1,2,1}(\Delta)) = 0, \\ \mathbb{F}_{1,2,1}(\Delta)|_{t=t_1} = \mathbb{F}_{1,2}(t_1, t_2, \lambda) \end{cases}$$

をみたす。(2.3)式を[4]の定理 2.3 及び本稿の補題 2.1 を用いて書き換えることにより, φ_j が

$$(2.4) \quad \begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = t - t_1 + t_2 - 1, \\ \varphi_1^2 - \varphi_2^2 = t^2 - t_1^2 + t_2^2 - 1 \end{cases}$$

を満足するならば, (2.3) によって (2.2) が成立することがわかる. これを φ_j について解いて (2.1) を得る.

注意. $R_x \times R_3$ 上の関数 $\varphi_1 = \zeta_1$, $\varphi_2 = \alpha_1 \zeta_2 + \zeta_3$ は, 条件(*) を満足する. このとき位相関数の多重積を実際に計算すると,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{1,2,1}(t, t_1, t_2, 1; \alpha, \zeta) &= \{ \alpha_1 - (t - t_1 + t_2 - 1) \} \zeta_1 \\ &+ \{ \alpha_2 - (t_1 - t_2) \alpha_1 + (t - t_1)(t_1 - t_2) \} \zeta_2 + \{ \alpha_3 - \\ &\quad (t_1 - t_2) \} \zeta_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{2,1,2}(t, t_1, t_2, 1; \alpha, \zeta) &= \{ \alpha_1 - (t_1 - t_2) \} \zeta_1 + \{ \alpha_2 - \\ &\quad (t - t_1 + t_2 - 1) \alpha_1 + (t_1 - t_2)(t_2 - 1) \} \zeta_2 + \{ \alpha_3 - \\ &\quad (t - t_1 + t_2 - 1) \} \zeta_3. \end{aligned}$$

上の $\bar{\pi}_{1,2,1}$, $\bar{\pi}_{2,1,2}$ について, 特に $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$ 更に $\alpha_1 = \zeta_1 = \zeta_3 = 0$ とおけば, 任意の α と ζ ($\zeta \neq 0$) について (2.2) を満足する関数 φ_j は, (2.1) の関数に限ることがわかる.

系 2.3. 条件(*) を仮定する. このとき, 任意の ν (≥ 2), $\mathcal{J} = (j_1, \dots, j_{\nu+1})$ ($j_k = 1, 2, j_k \neq j_{k+1}$) と

$\{t_0, \dots, t_{\nu+1}\}$ ($T_0 \geq t_0 > \dots > t_{\nu+1} \geq 0$) に対して,
 α と β に独立な数 t'_1, t'_2 ($t_0 > t'_1 > t'_2 > t_{\nu+1}$) が存在し
 て,

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & \mathbb{P}_{j_1, \dots, j_{\nu+1}}(t_0, \dots, t_{\nu+1}; \alpha, \beta) \\ &= \mathbb{P}_{1, 2, 1}(t_0, t'_1, t'_2, t_{\nu+1}; \alpha, \beta) \end{aligned}$$

が成立し, 又 任意の点 (y, η) に対して

$$(2.6) \quad \begin{aligned} & (Q_{j_1, \dots, j_{\nu+1}}, \mathbb{P}_{j_1, \dots, j_{\nu+1}})(t_0; t_0, \dots, t_{\nu+1}; y, \eta) \\ &= (Q_{1, 2, 1}, \mathbb{P}_{1, 2, 1})(t_0; t_0, t'_1, t'_2, t_{\nu+1}; y, \eta) \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. 定理 2.2 と [4] の定理 2.3 から, 帰納的に (2.5) を得る. 次に (2.5) 式と命題 1.1 より, (2.6) を得る. 証明終り.

§ 3. 結果. [5] に従って概念 ' ε -station set' を導入する. $\mathcal{J} = (j_1, \dots, j_{\nu+1})$, 点 (y, η) と ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) に対して, 点列 $\{t_1, \dots, t_\nu\}$ ($T_0 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_\nu \geq 0$) が ε -station set $\Lambda_{\varepsilon, \mathcal{J}}(t; y, \eta)$ に属するとは, $(\alpha^k, \beta^k) = (Q_{\mathcal{J}}, \mathbb{P}_{\mathcal{J}})(t_k; t, t_1, \dots, t_\nu, 0; y, \eta)$ とおくと

$$(3.1) \quad |\lambda_{j_k}(t_k, \alpha^k, \beta^k) - \lambda_{j_{k+1}}(t_k, \alpha^k, \beta^k)| \leq \varepsilon \langle \beta^k \rangle$$

($k = 1, \dots, \nu$)

が成立するときを言い、これを用いて

$$(3.2) \quad \Lambda_{\varepsilon}^{\mathbb{J}}(t; y, v) = \{ (Q_{\mathbb{J}}, P_{\mathbb{J}})(t; t, t_1, \dots, t_{\nu}, 0; y, v); \\ \{ t_1, \dots, t_{\nu} \} \in \Lambda_{\varepsilon, \mathbb{J}}(t; y, v) \}$$

とおく。方程式 (0.3) の初期値 $g_j(x)$ ($j=1, 2$) の波面集合 $WF(G)$ に対して

$$(3.3) \quad \tilde{\Gamma}_t = \{ \delta \Lambda_0^{\mathbb{J}}(t; y, v); (y, v) \in WF(G), \delta > 0, \\ |v| \geq M_0, \mathbb{J} = (1), (2), (1, 2), (2, 1), (1, 2, 1) \}$$

とおく (M_0 は, (0.2) の M より定まる十分大きな数)。

このとき, 次の主要結果を得る。

定理 3.1. 条件 (*) を仮定するならば, (0.3) の解 $U(t, x)$ の時刻 t での波面集合 $WF(U(t))$ について,

$$(3.4) \quad WF(U(t)) \subset \tilde{\Gamma}_t \quad (0 \leq t \leq T_0)$$

が十分小さい $T_0 > 0$ に対して成立する。

証明の方針. 集合 \tilde{E}_{ε} を (3.3) 式中の M_0 を用いて

$$(3.5) \quad \tilde{E}_{\varepsilon} = \{ \delta \Lambda_{\varepsilon}^{\mathbb{J}}(t; y, v); (y, v) \in WF_{\varepsilon}(G), \mathbb{J} = (j_1, \dots, \\ j_{\nu+1}), j_k = 1, 2, \nu = 0, 1, \dots, \delta > 0, |v| \geq M_0 \} \\ (WF_{\varepsilon}(G) = \{ (y, v); \text{dis} \{ (y, |v|^{-1}v), WF(G) \} < \varepsilon \})$$

とおく。熊ヶ郷-谷口 [5] の定理 3.4 は,

(3.6) $WF(U(t)) \subset \bigcap_{0 < \varepsilon \leq 1} P_{t, \varepsilon} \quad (0 \leq t \leq T_0)$
 を示している。このことから、定理 3.1 を証明するには、

(3.7) $\bigcap_{0 < \varepsilon \leq 1} P_{t, \varepsilon} = \tilde{P}_t$
 なることを示せばよい。 $\bigcap_{0 < \varepsilon \leq 1} P_{t, \varepsilon} \supset \tilde{P}_t$ なることは両辺の集合の定義より明らかであるから、 $\bigcap_{0 < \varepsilon \leq 1} P_{t, \varepsilon} \subset \tilde{P}_t$ を示せばよい。以後の証明中、補題 2.1 を本質的に用いることを注意して、後は省略する。

例。条件 (*) を満足する $n = 3$ のときの例を以下にあげる。

1. $\lambda_k = t \sum_{j=1}^3 a_j^k \zeta_j \quad (k = 1, 2, a_j^k \text{ は実定数}).$
2. $\lambda_1 = \zeta_1, \quad \lambda_2 = x_1 \zeta_2 + \zeta_3.$
3. $\lambda_1 = x_2 \zeta_1 + \zeta_3, \quad \lambda_2 = -x_3 \zeta_1 + \zeta_2.$
4. $\lambda_1 = x_1 \zeta_1, \quad \lambda_2 = t \zeta_2.$

文献 (本稿中引用したもののみ)。

- [1] S. Alinhac : Comm. Partial Differential

- Equations, 3(10) (1978), 877-905.
- [2] M. Hata : 大阪大学修士論文 (1977).
- [3] W. Ichinose : to appear .
- [4] H. Kumano-go, K. Taniguchi and Y. Tozaki :
Comm. Partial Differential Equations,
3(4) (1978), 349-380.
- [5] H. Kumano-go and K. Taniguchi : Funkcial.
Ekvac., 22 (1979).
- [6] D. Ludwig and B. Granoff : J. Math. Anal.
Appl., 21 (1968), 556-574.
- [7] Y. Morimoto : Comm. Partial Differential
Equations, 4(6) (1979), 609-643.
- [8] J. C. Nolasco : C. R. Acad. Sci. Paris Sér.
A, 288 (1979), 129-132.
- [9] K. Taniguchi : to appear.
- [10] G. A. Uhlmann : Comm. Partial Differential
Equations, 2(7) (1977), 713-779.