数理解析研究所講究録
376巻 1980年 39-59

Fuchs双曲型方程式とその周辺.

上智大 理工　田原秀敏

超平面に沿って確定特異点を持つ偏微分方程式であって、且つ、適当な意味で双曲型性の条件を満たすものを、"Fuchs双曲型方程式"と呼ぶ。これは、1975年頃から筆者によって導入され研究され始めた理論であるが(文献(1)(2)(3)(4)(5)参照)、最近それが初期面で退化する様な非特性弱双曲型方程式のC^∞初期値問題の研究に極めて有力な方法を提供する事が理解されてきた。そこで、本稿では、この弱双曲型方程式のC^∞初期値問題への応用という面に焦点を合わせて話を進めてゆきたいと思う。まず第1節で、弱双曲型方程式のC^∞初期値問題が筆者のFuchs双曲型方程式の研究とどの様に関係してくるのかについて、いささか大風呂敷を広げつつ解説してみたい。次に第2節で、Fuchs双曲型方程式の立場から研究する事により、弱双曲型方程式のC^∞初期値問題に対してどういう成果が揚げられたかについてちゃんと定式化して述べる。結果を

先に言えば、初期面のみで退化する弱双曲型方程式のC^∞初期値問題については筆者の方法によってそのカラクリはほぼ完全に解明されたと言ってよいと思う。紙枚が残れば、第3節で、講演では述べなかったFuchs双曲型方程式に固有の問題について幾つか結果を紹介してみたい。

1° 発想の源は何処にあるのか？

初期面で多重度の変化する弱双曲型方程式の初期値問題の研究において、次の作用素がそのモデルとして暫々登場する：

$$P=\partial_t^2-t^{2k}\partial_x^2+a(t,x)\partial_x+b(t,x)\partial_t+c(t,x)。$$

この作用素に関して次の事実は良く知られている。つまり、Pに対する初期値問題がC^∞適切である為の必要十分条件は、『適当な$\tilde{a}(t,x)\in C^\infty$によって$a(t,x)=t^{k-1}\tilde{a}(t,x)$と表わされる』ことである。この条件は多くの人達によって各人各様に解釈されているが、筆者の立場つまりFuchs型の立場から解釈すれば次の様に理解される：『或る単一特性的な双曲型作用素$\tilde{P}(t,x,\partial_t,\partial_x)$が存在して$t^2P(t,x,\partial_t,\partial_x)=\tilde{P}(t,x,t\partial_t,t^{k+1}\partial_x)$と書ける』。実際$t^2P=t^2\partial_t^2-(t^{k+1}\partial_x)^2+\tilde{a}(t^{k+1}\partial_x)+tb\cdot t\partial_t+t^2c$　であるから、$t^2\partial_t^2=t\partial_t(t\partial_t-1)$に注意して$\tilde{P}=\partial_t(\partial_t-1)-\partial_x^2+\tilde{a}\partial_x+tb\partial_t+t^2c$と置けば良い。つまり、『$t^2$を掛けてFuchs型の形に直した

時に低階がうまく揃ってくれればよろしい』というわけである。上の作用素の高階版として次の作用素も最近よく扱かわれている：

$$P = \partial_t^m + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{|\alpha|=j} a_{j\alpha}(t,x)\, t^{kj} \partial_x^\alpha\right) \partial_t^{m-j} \quad \cdots\cdots(\text{主部})$$
$$+ \sum_{j=1}^m \left(\sum_{|\alpha|<j} b_{j\alpha}(t,x)\, \partial_x^\alpha\right) \partial_t^{m-j} \quad \cdots\cdots(\text{低階})\text{。}$$

但し $\lambda^m + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{|\alpha|=j} a_{j\alpha}(t,x)\, \xi^\alpha\right) \lambda^{m-j} = 0$ の根は実数で互いに相異なるものとする。この時、P に対する初期値問題が C^∞ 適切である為の必要十分条件は『$(k+1)|\alpha| > j$ ならば適当な $c_{j\alpha}(t,x) \in C^\infty$ によって $b_{j\alpha}(t,x) = t^{(k+1)|\alpha|-j} c_{j\alpha}(t,x)$ と表わされる』ことである。この場合もゴチャゴチャ計算すれば次の陳述と同値になる『或る単一特性的な双曲型作用素 $\tilde{P}(t,x,\partial_t,\partial_x)$ が存在して低階も含めて $t^m P(t,x,\partial_t,\partial_x) = \tilde{P}(t,x,t\partial_t,t^{k+1}\partial_x)$ と表わされる』。つまり、この場合も『t^m を掛けて Fuchs 型の形に直した時に低階がうまく揃ってくれればよろしい』というわけである。大概において、上の様に作用素が初期面で高々有限次の退化しか持たない場合には『その初期値問題が C^∞ 適切である為の必要十分条件は、t^m を掛けて Fuchs 型の形に直した時に低階がうまく揃ってくれる事である』というクライテリオンは正しいはずである。十分条件なり必要条件なりの分かっている例について計算してみれば、その信憑性は容易に理解されるであろう。

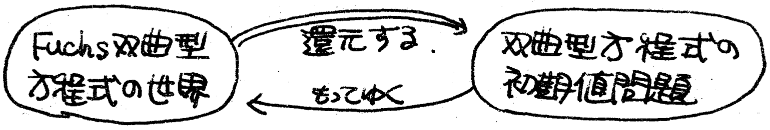
とまれ、上の説明から次の事が理解されたと思う。つまり『初期面で退化している弱双曲型方程式の初期値問題は t について Fuchs 型なる方程式と極めて密接に繋がっている』のであり、更に極言すれば『かかる作用素については非特性の形そのものよりも t^k を掛けて退化させた Fuchs 型の形の方がより自然な姿である』と。実際この様な視点を持って論文を読んでみると Oleinik にしても Menikoff にしてもその議論の最も本質的な部分において Fuchs 型の方程式を扱かっているのがよく分かる。ただ彼等は初めの形が非特性である為か、何やら Fuchs 型なる事を陽に出さないで非特性の形に押し込めようとしている為に相当無理をしている嫌いがある。そもそも、初めの2つの例にしても Fuchs 型の立場から解釈した方が遥に簡単明瞭なのだし、どうせ議論の途中で Fuchs 型の方程式を扱かうのならば、『初めから Fuchs 型の方程式を出発点にして議論をした方が遥に自然ではないか！』と考えるのは、そう不自然な発想ではあるまい。

この発想こそ、筆者が弱双曲型方程式を研究する上での指導理念となるものである。つまり、上の例で見た $\tilde{P}(t,x,t\partial_t,t^{k+1}\partial_x)$ の様に、

(1) t に関して Fuchs 型になっていて、しかも

(2) 適当な意味で双曲型性の条件を満たす

ものを、"Fuchs双曲型方程式(Fuchsian hyperbolic equation)" と名づけて、そういう方程式についてのC^∞枠内での一般論を展開した上で改めて弱双曲型方程式のC^∞初期値問題を見直してみようというわけである。シンボリックに図示すれば、



という事になる。Fuchs双曲型方程式の話は第3節で少しコメントすることにして、次節で、かかる立場から攻撃する事により双曲型方程式の初期値問題に対してどれだけの貢献を成し得たかについて述べる。

2° 双曲型方程式の初期値問題.

初めに本節で述べる条件の意味を分り易くする為に頭の中に思い浮かべている作用素の例を幾つか掲げておく。低階部分については後述することにして主部の形のみ掲げる。

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \partial_t^2 - t^{2k}\partial_x^2 \\ P_2 &= \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - t\partial_{x_2}^2 - t^2\partial_{x_3}^2 \\ P_3 &= \partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}\partial_{x_j} - t\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \end{aligned}\right\} \text{(I) 有限次の退化}$$

$$\left.\begin{aligned} P_4 &= \partial_t^2 - e^{-\frac{2}{t}}\partial_x^2 \\ P_5 &= \partial_t^2 - e^{-\frac{2}{t}}\partial_{x_1}^2 - e^{-\frac{4}{t}}\partial_{x_2}^2 \end{aligned}\right\} \text{(II) 無限次の退化.}$$

定理(I) 任意の $u_0(x),\cdots,u_{m-1}(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と任意の $f(tx)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ に対して次の初期値問題の解 $u(tx)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ が一意的に存在する：$P(tx\partial_t\partial_x)u(tx)=f(tx)$, $\partial_t^i u(tx)|_{t=0}=u_i(x)$ $(0\le i\le m-1)$。更に解は有限伝播速度を持つ。$(t^0x^0)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ に対して $D(t^0x^0)=\{(tx)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n;\ |x-x^0|<\lambda_{max}(t^0-t)\}$ (但し $\lambda_{max}=\max\{|\lambda_j(tx\xi)|;\ (tx)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n,\ |\xi|=1\ \&\ 1\le j\le m\}$) とおく時、領域 $D(t^0x^0)$ は点 (t^0x^0) の依存領域となる。

以下本節では定理(I)の様に解の存在と一意性及び伝播速度の有限性が成り立つ時に"初期値問題は C^∞ 適切である"ということにする。天下り的に与えた条件の意味を例によって説明しよう。$P_1=\partial_t^2-t^{2k}\partial_x^2$ に対しては $Q(t\xi)=t^{2k}\xi^2$ とおく。すると $\log Q=2k\log t+\log\xi^2$ であるから $|\partial_t\log Q|=|2k/t|=O(1/t)$ $(t\to+0)$ となり、この2次形式 $Q(t\xi)$ に対して(A-1)(A-2)が満たされる事を見るのは易しい。(A-3)で低階の条件を計算してみれば $P_1=\partial_t^2-t^{2k}\partial_x^2+t^{k-1}a(tx)\partial_x+b(tx)\partial_t+c(tx)$ ($a(tx), b(tx), c(tx)\in\mathcal{B}^\infty(\Omega)$) ならば(A-3)も満たされる事が分かる。$P_2, P_3$ に対しては各々 $Q_2=\xi_1^2+t\xi_2^2+t^2\xi_3^2$, $Q_3=\sum_{i,j=1}^n\xi_i\xi_j+t\sum_{i=1}^n\xi_i^2$ とおけば(A-1)(A-2)は満たされる。$P_2=\partial_t^2-\partial_{x_1}^2-t\partial_{x_2}^2-t^2\partial_{x_3}^2+$(任意の低階)，$P_3=\partial_t^2-\sum_{i,j=1}^n\partial_{x_i}\partial_{x_j}-t\sum_{i=1}^n\partial_{x_i}^2+$(任意の低階)に対して(A-3)を見るのは易しい。大雑把に言えば、(A-1)(A-2)は主部が

高々有限次の退化である事を意味し(A-3)は t^m を掛けてFuchs型の形に直した時に主部の退化の程度に応じて低階がうまく揃ってくれる事を意味した条件に他ならない。

Case(II) 無限次の退化の場合： 次に P_4 P_5 の様な場合について考えてみよう。Case(I)のアナロジーから $P_4=\partial_t^2-e^{-\frac{2}{t}}\times\partial_x^2$ の場合には2次形式 $Q(t,\xi)$ を $Q=e^{-\frac{2}{t}}\xi^2$ と置いて条件付ければ良いのではないかと容易に想像される。この時 $\log Q=-2/t+\log\xi^2$ だから $|\partial_t\log Q|=2/t^2=O(1/t^2)\ (t\to+0)$ となる。つまり $t=0$ での特異性は $1/t^2$ のオーダーとなる。そこでこの特異性のオーダーに着目して $t=0$ での特異性が一般の $1/t^\sigma$ ($\sigma\geq 1$) のオーダーをもつ場合に合致する様にCase(I)の条件を書き直してみる。形式的に(A-1)(A-2)(A-3)の中の t を t^σ ($\sigma\geq 1$) に書き換えると次の様になる。

$(A\text{-}1)_\sigma$ (分離性) 或る2次形式 $Q(t,\xi)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t)\xi_i\xi_j$ と正定数 $C>0$ が存在して $|\lambda_i(t,x,\xi)-\lambda_j(t,x,\xi)|\geq C\sqrt{Q(t,\xi)}$ ($1\leq i\neq j\leq m$) が成り立つ。但し2次形式 $Q(t,\xi)$ は (i)(ii) 及び

$(\mathrm{iii})_\sigma$ 或る $\sigma\geq 1$ が存在して $\max_{|\xi|=1}|\partial_t\log Q(t,\xi)|=O(1/t^\sigma)\ (t\to+0)$

なる3条件(i)(ii)$(\mathrm{iii})_\sigma$を満たすものとする。

$(A\text{-}2)_\sigma$ (主部の評価) 任意の β に対して或る $C_\beta>0$ が存在して

$$|\partial_x^\beta \sum_{|\alpha|=j} a_{j\alpha}(tx)\xi^\alpha| \leqq C_\beta Q(t\xi)^{j/2}、$$

$$|\partial_t\partial_x^\beta \sum_{|\alpha|=j} a_{j\alpha}(tx)\xi^\alpha| \leqq \frac{C_\beta Q(t\xi)^{j/2}}{t^\sigma}$$

なる評価を満たす。

$(A\text{-}3)_\sigma$（低階の評価）任意のβに対して或る$C_\beta>0$が存在して

$$|\partial_x^\beta \sum_{|\alpha|<j} a_{j\alpha}(tx)(\sqrt{-1}\xi)^\alpha| \leqq \frac{C_\beta(1+t^{2\sigma}Q(t\xi))^{(j-1)/2}}{t^{\sigma j}}$$

なる評価を満たす。

記述を簡単にする為に上の$(A\text{-}1)_\sigma$ $(A\text{-}2)_\sigma$ $(A\text{-}3)_\sigma$の条件を満たす時"Pはクラスσである"と言う事にする。すると定理(I)は"クラス1ならば初期値問題はC^∞適切である"という事になる。そこで一般に"クラスσで$\sigma>1$の場合もC^∞適切か？"という事が問題になるのだが実は$\sigma>1$の時には一般には正しくない。実際R_1 R_2を$R_1=\partial_t^2-t^4\partial_x^2+\partial_x+\partial_t+1$，$R_2=\partial_t^2-e^{\frac{2}{t}}\partial_x^2+\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}\partial_x+\partial_t+1$と置く時$R_1$ R_2は共にクラス2である。1°での解説よりR_1は決してC^∞適切とはならない。一方R_2の方は古い論文（例えば文献のNercesjanの論文）を見ればC^∞適切となる事は容易に想像がつく。R_2の方は2次形式$Q=e^{\frac{2}{t}}\xi^2$の形からクラス2である事は一目瞭然であるがR_1がクラス2であるというのは一見奇妙である。実際2次形式$Q=t^4\xi^2$の形のみから見ればクラス1なのであって$(A\text{-}1)_\sigma$ $(A\text{-}2)_\sigma$の条件のみならば$\sigma\geqq1$で満足される。低階の条件$(A\text{-}3)_\sigma$から止むを得ずクラス2までσの値を引き上げざるを得なくなっているので

ある。この様にクラスの計算をしてみて奇妙に感じられる場合は駄目になる。主部も低階も総てがピタッとクラス２になる場合のみC^{∞}適切になる。この〃ピタッ〃という所を条件付けて書けば次の様になる。

定理(II)　Pがクラスσで$\sigma>1$とする。もしもPが次の(*)の条件を満たせばPに対する初期値問題はC^{∞}適切となる。

(*) $|\alpha|>0$の時適当な $s_{j\alpha}>0$ と $\tilde{a}_{j\alpha}(t,x)\in\mathcal{B}^{\infty}(\Omega)$ とによって

$a_{j\alpha}(t,x)=\exp(-s_{j\alpha}/t^{\sigma-1})\cdot\tilde{a}_{j\alpha}(t,x)$ と表わされる。

初めの例のP_4 P_5について低階も含めた形で十分条件を書けば次の様になる。$P_4=\partial_t^2-e^{-\frac{2}{t}}\partial_x^2+\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}a(t,x)\partial_x+b(t,x)\partial_t+c(t,x)$, $P_5=\partial_t^2-e^{-\frac{2}{t}}\partial_{x_1}^2-e^{-\frac{4}{t}}\partial_{x_2}^2+\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}a_1(t,x)\partial_{x_1}+\frac{1}{t^2}e^{-\frac{2}{t}}a_2(t,x)\partial_{x_2}+b(t,x)\partial_t+c(t,x)$　（但し $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$, $a_1(t,x)$, $a_2(t,x)\in\mathcal{B}^{\infty}(\Omega)$））。実際２次形式を各々 $Q_4=e^{-\frac{2}{t}}\xi^2$, $Q_5=e^{-\frac{2}{t}}\xi_1^2+e^{-\frac{4}{t}}\xi_2^2$ と置けばよい。条件を評価式の形で書いているので $a(t,x)$, $a_1(t,x)$, $a_2(t,x)\in\mathcal{B}^{\infty}(\Omega)$ の所は $t=0$ で少々特異性を許しても良い事は明らかであろう。

Case(III)　有限次と無限次の混合した場合：　次に例に掲げた$P_6=\partial_t^2-t^{2k}\partial_{x_1}^2-e^{-\frac{2}{t}}\partial_{x_2}^2$ の様に有限次の退化と無限次の退化の混じり合った場合について考えてみよう。P_6に対しては、

2次形式 $Q(t\xi)$ を $Q=t^{2k}\xi_1^2+e^{-\frac{2}{t}}\xi_2^2$ と置けば特性根の分離性の条件(A-1)は形式的には満たされる。クラスの計算をしてみると $\max_{|\xi|=1}|\partial_t \log Q(t\xi)| = O(1/t^2)\ (t\to+0)$ であるから全体としてクラス2である。しかし $\xi_2=0$ と置いて $Q(t\xi_1 0)=t^{2k}\xi_1^2$ の部分のみに注目すればクラス1、$\xi_1=0$ と置いて $Q(t 0 \xi_2)=e^{-\frac{2}{t}}\xi_2^2$ の部分のみに注目すれば混じり気なしのクラス2となる。この様な場合は、x_1変数に関してはクラス1，x_2変数に関してはクラス2，そして全体としてクラス2，と、それぞれ変数を分割して捕えその各々に対して(I)(II)で得られた条件を仮定して考えるというのが，まあ最も自然な発想であろう。これを数学的に定式化すれば次の様になる。

$1\leqq n_1<n_2<\cdots<n_\ell=n$ とし変数 $x=(x_1 x_2\cdots x_n)$ を次の様にブロック分割する： $x=(x^{(1)}x^{(2)}\cdots x^{(\ell)})$, $x^{(1)}=(x_1\cdots x_{n_1})$, $x^{(2)}=(x_{n_1+1},\cdots x_{n_2})$, $\cdots$, $x^{(\ell)}=(x_{n_{\ell-1}+1},\cdots,x_{n_\ell})$。対応して $P^{(1)}(t x\,\partial_t\,\partial_{x^{(1)}})=P(t x\,\partial_t\,\partial_{x_1}\cdots\partial_{x_{n_1}}0\cdots0)$，$P^{(2)}(t x\,\partial_t\,\partial_{x^{(1)}}\partial_{x^{(2)}})=P(t x\,\partial_t\,\partial_{x_1}\cdots\partial_{x_{n_2}}0\cdots0)$ $\cdots$，$P^{(\ell)}(t x\,\partial_t\,\partial_{x^{(1)}}\cdots\partial_{x^{(\ell)}})=P(t x\,\partial_t\,\partial_{x_1}\cdots\partial_{x_n})$ とおく。

定理(III)　$1\leqq\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_\ell=\sigma$ が存在して P が次の(*)，(**)を満たすとする。この時 P に対する初期値問題は C^∞ 適切である。但し(*)(**)は次の通りである：

(*) $1\leqq i\leqq\ell$ に対して $P^{(i)}(t x\,\partial_t\,\partial_{x^{(1)}}\cdots\partial_{x^{(i)}})$ は $(t x^{(1)}\cdots x^{(i)})$ 変数の

作用素としてクラス σ_i である（他はパラメーターと見做す）。

(＊＊) $a_{j\alpha}(tx)$ の α をブロック分けすると $\alpha=(\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(k)},0\cdots0)$ $|\alpha^{(k)}|\neq 0$ となる k がある。この k に対してもしも $\sigma_k>1$ ならば適当な $s_{j\alpha}>0$ と $\tilde{a}_{j\alpha}(tx)\in\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ とによって $a_{j\alpha}(tx)=\exp(-s_{j\alpha}/t^{\sigma_k-1})\cdot\tilde{a}_{j\alpha}(tx)$ と表わされる。

要するにクラスの等しい変数をひとまとめにしてブロック分割しそのブロックをクラスの小さい方から順に並べて各ブロック毎に(I)(II)で得られた条件を仮定すれば C^∞ 適切になるというわけである。従って例の P_6 P_7 への適用の仕方については説明を要しまい。各変数毎に(I)(II)の条件を付ければよいのである。位階の十分条件を書いておくと次の通りである：

$P_6=\partial_t^2-t^{2k}\partial_{x_1}^2-e^{-\frac{2}{t}}\partial_{x_2}^2+t^{k-1}a_1(tx)\partial_{x_1}+\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}a_2(tx)\partial_{x_2}+b(tx)\partial_t+c(tx)$，$P_7=\partial_t^2-\partial_{x_1}^2-e^{-\frac{2}{t}}\partial_{x_2}^2-e^{-\frac{4}{t^2}}\partial_{x_3}^2+a_1(tx)\partial_{x_1}+\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}a_2(tx)\partial_{x_2}+\frac{1}{t^3}e^{-\frac{2}{t^2}}a_3(tx)\partial_{x_3}+b(tx)\partial_t+c(tx)$　（但し $a_i(tx)$, $b(tx)$, $c(tx)$ $\in\mathcal{B}^\infty(\Omega)$）。無限次の退化の部分では $a_i(tx)$ は $t=0$ で少々特異性を持っていても構わない。

Case (IV) 一般化：　以上(I)(II)(III)と述べてきたが、この枠組に収まらないものは幾らでも存在する。実際、$t^{(-\log t)}$，$\exp(-e^{\frac{1}{t}})$，$\exp[\exp(e^{\frac{1}{t}})]$　等々、無限次の退化を持つ C^∞ 関数で

奇妙なものは幾らでも多く存在するからである。そこで、こういう類いのものを一般的に処理するにはどうすれば良いかという事が問題になるのだが、結論を先に言えば、要するに $\max_{|\xi|=1}|\partial_t \log Q(t,\xi)| = O(1/t),\ O(1/t^\sigma)\ (t\to+0)$ の特異性のオーダーを次の様に一般の関数 $\sigma(t)$ で与えてしまえば良いということである： $\max_{|\xi|=1}|\partial_t \log Q(t,\xi)| = O(1/\sigma(t))\ (t\to+0)$ 。

ここで t^σ (or $1/t^\sigma$) を一般の関数 $\sigma(t)$ (or $1/\sigma(t)$) で置き換える事によりどういう影響が生じるか、どういう変更が必要になるかということについて少し考えてみよう。(イ) (I)⇒(II)の過程で(A-1)(A-2)(A-3)の中の t を総て t^σ で置き換える事によって $(A\text{-}1)_\sigma (A\text{-}2)_\sigma (A\text{-}3)_\sigma$ という条件を得た。従って全く同様にして $(A\text{-}1)_\sigma (A\text{-}2)_\sigma (A\text{-}3)_\sigma$ の中の t^σ を $\sigma(t)$ で置き換える事によって $(A\text{-}1)_{\sigma(t)}, (A\text{-}2)_{\sigma(t)}, (A\text{-}3)_{\sigma(t)}$ という条件を得る。この変更により"クラス σ"という所は"クラス $\sigma(t)$"と言い換える必要が出てくる。(ロ) 定理(III)の(*)の条件はどういう変更を受けるだろうか。"$\sigma>1$"という陳述は"$t^\sigma=o(t)\ (t\to+0)$"という事に他ならず、これは係数が無限次の退化をもつ事を意味する。従って"$\sigma>1$"は"$\sigma(t)=o(t)\ (t\to+0)$"と変更するのが妥当な所であろう。(ハ) また(*)の中では"$\exp(-s/t^{\sigma-1})$"という関数が重要な働きをしているが、$\sigma(t)$ の場合これに対応する関数は何であろうか。筆者は $\exp(-s/t^{\sigma-1})$ という関数を次の常微分方

程式：$t^{\sigma}\frac{d\Delta}{dt}=\frac{s}{\sigma-1}\Delta$ $(0<t\leqq T)$ の解として捕えることにした。こう理解すれば $\sigma(t)$ の場合は $\sigma(t)\frac{d\Delta}{dt}=\frac{s}{\sigma-1}\Delta$ $(0<t\leqq T)$ の解 $\Delta=\Delta(t;s,\sigma(t))$ を考えれば良いことになる。従って "$\exp(-s/t^{\sigma-1})$ で割り算できる" という陳述は "$\Delta(t;s,\sigma(t))$ で割り算できる" と変更すればよいことになる。(ニ) 残る所は(III)の中の "$\sigma_1<\sigma_2$" という陳述であるがこれは "$t^{\sigma_2}=o(t^{\sigma_1})$ $(t\to 0)$" と同値である事を考えれば "$\sigma_2(t)=o(\sigma_1(t))$ $(t\to 0)$" とすればよい。結局形式的には次の様な翻訳表を得た事になる。

"t^{σ}"	$\rightsquigarrow$	"$\sigma(t)$"
"クラス σ"	$\rightsquigarrow$	"クラス $\sigma(t)$"
"$\sigma>1$"	$\rightsquigarrow$	"$\sigma(t)=o(t)$ $(t\to 0)$"
"$\exp(-s/t^{\sigma-1})$ で割れる"	$\rightsquigarrow$	"$\Delta(t;s,\sigma(t))$ で割れる"
"$\sigma_1<\sigma_2$"	$\rightsquigarrow$	"$\sigma_2(t)=o(\sigma_1(t))$ $(t\to 0)$"

この形式的な翻訳で総てうまく行くのか？というのが問題となるわけだが，結論を先に言えば，実際総てうまくゆくのである。上の翻訳表に実質的な裏づけを与えるのは次の2つの基本補題である。

補題(その1) $\sigma(t)$ が次の(i)(ii)(iii)を満たしているとする：(i) $t>0$ では $\sigma(t)>0$ かつ $\sigma(0)=0$，(ii) $\sigma(t)\in C^1([0,T])\cap C^{\infty}((0,T])$，(iii) $\sigma(t)^m\in C^m([0,T])$ $m=1,2,3,\cdots$。 この時次の(1)(2)の命題は同値である：

(1) $\sigma(t)=o(t)$ $(t\to+0)$,

(2) $\Delta(t;s,\sigma(t))\in C^\infty([0,T])$ で $t=0$ で無限次の接触をもつ。

補題(その2) $\sigma_1(t),\sigma_2(t)$ が上の(i)(ii)(iii)を満たしているとする。この時もしも $\sigma_2(t)=o(\sigma_1(t))$ $(t\to+0)$ ならば次が成り立つ:

$$\frac{\Delta_2(t;s_2,\sigma_2(t))}{\Delta_1(t;s_1,\sigma_1(t))}\in C^\infty([0,T]) \quad (\forall s_1,s_2>0)。$$

上の(ロ)(ハ)(ニ)の解説と補題(その1)(その2)の内容を読み比べれば、その意味する所はよく理解していただけるであろう。従って結局次の定理を得ることになる。

定理(IV) P が上の翻訳表に従って(III)の条件を書き換えて得られた条件を満たすとする。この時、P に対する初期値問題は C^∞ 適切である。

例えば $\sigma(t)=t/-\log t$ と置けば $\Delta(t)=t^{(-\log t)}$ が出てくるし、$\sigma(t)=t^2e^{-\frac{1}{t}}$ と置けば $\Delta(t)=\exp(-e^{\frac{1}{t}})$ が出てくるという具合にして適用すればよい。一般に、$P=\partial_t^2-\Delta(t)^2\partial_x^2+a(t,x)\partial_x+b(t,x)\partial_t+c(t,x)$ $(\Delta(t)=\Delta(t;s,\sigma(t))$, $a(t,x),b(t,x),c(t,x)\in\mathcal{B}^\infty(\Omega))$ なる形の作用素の場合には、$a(t,x)$ が適当な $\tilde{a}(t,x)\in\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ によって $a(t,x)=(\frac{\Delta\sigma}{t})(t)\cdot\tilde{a}(t,x)$ と表わされるならば定理(IV)が適用できて C^∞ 適切となる。従ってこれを各変数毎に適用すれば P_8 P_9 の低階の十分条件として次の形を得る: $P_8=\partial_t^2-t^{2k}\partial_{x_1}^2-\exp(-2e^{\frac{1}{t}})\partial_{x_2}^2+$

$t^{k-1}a_1(t,x)\partial_{x_1}+\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}\cdot\exp(-e^{\frac{1}{t}})\cdot a_2(t,x)\partial_{x_2}+b(t,x)\partial_t+c(t,x))$, $P_9=\partial_t^2-\partial_{x_1}^2-t^{2(-\log t)}\partial_{x_2}^2+a_1(t,x)\partial_{x_1}+\frac{\log t}{t}\cdot t^{(-\log t)}a_2(t,x)\partial_{x_2}+b(t,x)\partial_t+c(t,x)$

（但し $a_1(t,x), a_2(t,x), b(t,x), c(t,x)\in\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ ）。

以上Case(Ⅰ)からCase(Ⅳ)まで順次少しづつ複雑にして解説してきた。もちろんCase(Ⅳ)を更に複雑にする事も可能だし、或いは他の人達による手法（とはいっても筆者は余りそれに詳しくはないのだが・・・例えばOhya, Nishitani氏達の論文を参照されたい）と筆者の手法とを組み合わせて条件を設定する事も可能であろう。しかし、まあ、Case(Ⅳ)までで大体初期面で退化した双曲型方程式のC^∞適切性については完全に解明されたと言って言い過ぎではなかろうと思う。実際、変数のブロック分割と関数$\sigma_i(t)$の選び方を適当にとる事により普通考えられるものは総て吸収できるのだから。なお、本節の話の証明は総て文献(9)(10)(11)に書いてある。但し、そこでは総てFuchs双曲型方程式の形で書かれている為に本節ほどその条件は単純ではない。それについては次節で少しコメントしておきたい。

3° Fuchs双曲型方程式のこと、

$(t,x)=(t,x_1\cdots x_n)\in[0,T]\times R^n=\Omega$ とし、P を Ω 上で定義された次の形を持つ偏微分作用素とする：

$$P=t^k\partial_t^m+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{|\alpha|\leq j}a_{j\alpha}(t,x)\,\partial_x^\alpha\Big)\,t^{\max(k-j,0)}\,\partial_t^{m-j}\ 。$$

但し k は $0\leqq k\leqq m$ なる整数とし又 " $|\alpha|>0$ & $1\leqq j\leqq k$ なる (α,j) に対しては $a_{j\alpha}(0,x)\equiv 0$ " が成り立つものとする。この様な作用素 P を " t に関し Weight $(m-k)$ の Fuchs 型作用素 " と呼ぶ。ここで $k=0$ と置けば第2節の非特性の作用素になる。（筆者は文献 (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(11) で採用した表現法の方がよりその本質がよく現われるものと思うのだが第2節との関連から敢えて上の表現を採用した。） P に対する決定多項式は

$$C(\lambda,x)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)+a_{1,(0\cdots0)}(0,x)\,\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2)$$
$$+\cdots+a_{k,(0\cdots0)}(0,x)\,\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)$$

によって定義され $C(\lambda,x)=0$ の根：$\lambda=0,1,\cdots,m-k-1,\rho_1(x),\cdots,\rho_k(x)$ は P の特性指数と呼ばれる。

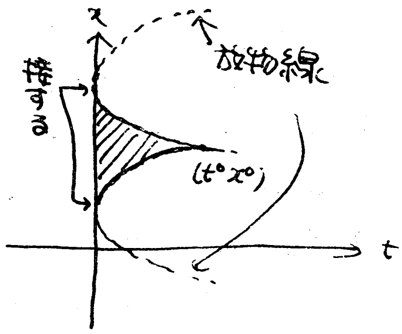
定理　P に対して更に双曲型性の条件とか特性指数に対する条件とか第2節に相当する条件とかをゴチャゴチャ仮定すれば次が成り立つ。つまり、任意の $u_0(x),\cdots,u_{m-k-1}(x)\in C^\infty(R^n)$ と任意の $f(t,x)\in C^\infty([0,T]\times R^n)$ に対して次の初期値問題の解 $u(t,x)\in C^\infty([0,T]\times R^n)$ が一意的に存在する：$P(t,x,\partial_t,\partial_x)\,u(t,x)=$

$f(t,x)$，$\partial_t^i u(t,x)|_{t=0} = u_i(x)$　($0 \le i \le m-k-1$)。更に解の依存領域は有界である。

系　上の定理で $k=0$ と置けば第2節の結果を得る。

上の系で分かる様に"ゴチャゴチャ仮定すれば"という所に要するに第2節で述べた様な類いの条件を仮定するわけである。双曲型性の条件など正確な事は文献(10)(11)を見て頂きたい。退化の程度が高々有限次であって且つ解の伝播速度が有限になる場合については文献(7)(8)に報告してある。しかし次の例に見られる様にFuchs双曲型方程式の場合には依存領域は有界だが伝播速度は必ずしも有限とはならない様なものも数多く出てくる。

例：$P = t\partial_t^2 - \partial_x^2 + $（低階）。
この場合の依存領域は左図の様になり伝播速度は $t=0$ で瞬間的に無限大になる。



なお、係数が解析的な場合には複素領域での議論とか確定特異点を持つ解の構成とか佐藤超函数の枠内の話とか興味深い結果が数多くある。それらの話も紹介すれば"Fuchs双曲型

方程式とその周辺"がより一層広く理解して頂けると思うのだが紙数も多くなったのでそれらは文献(1)(2)(3)(4)(5)に譲ることにしてこれで本稿を終えることにする。なお、解析的係数で複素領域の議論については Hasegawa, Baouendi-Goulaouic, Froim 氏達の先駆的な仕事がある事を付記しておく。

文献について.

解析的係数をもつFuchs双曲型方程式の話題については筆者の

(1) Fuchs双曲型方程式, 数理解析研究所講究録 248, "超函数と線型微分方程式IV", P.P. 19–59 (1975)。

(2) Fuchs双曲型方程式の超函数解の構造, 数理解析研究所講究録 266, "代数解析学の諸問題" pp. 142–175 (1976).

(3) Fuchs型偏微分方程式における Frobenius の方法, 数理解析研究所講究録, 281 "微分方程式と超函数" pp. 176–191 (1976).

(4) The structure of local solutions of partial differential equations of the Fuchsian type, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 12 (Supplement), 465–468 (1977).

(5) Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, Japan. J. Math., 5-2, 245–347 (1979).

等を参照されたい。論文(5)は少し長いが(1)~(4)の総てについて体系的に記述してある。(5)で筆者が少しやり残した所について大阿久俊則氏が

(6) Ôaku, T., Micro-local Cauchy problems and local boundary value problems, Proc. Japan Acad., 55, 136–140 (1979).

で幾つか論じられた。合わせて参照して頂きたい.

一方C^∞係数のFuchs双曲型方程式の話題については筆者の

(7) Cauchy problems for Fuchsian hyperbolic partial differential equations, Proc. Japan Acad., 54, 92-96 (1978).

(8) Fuchs双曲型方程式の初期値問題について，数理解析研究所講究録 341，"超函数と線型微分方程式 VI" pp 164-172 (1978).

(9) Singular hyperbolic systems, I. Existence, uniqueness and differentiability, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 26-2, 213-238 (1979),

(10) Singular hyperbolic systems, II. Pseudo-differential operators with a parameter and their applications to singular hyperbolic systems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 26-3 (1980)

(11) Singular hyperbolic systems, III. On the Cauchy problems for Fuchsian hyperbolic partial differential equations, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA.

等を参照されたい。また Fuchs双曲型方程式の初期値問題のパラメトリックスの構成については 臥生等氏によって一部成功がおさめられている。

その他 本文中で引用した人達の論文は次のとおりである。

1. Oleinik, O.A., Comm. Pure Appl. Math., 23, 569-589 (1970),

2. Menikoff, A., Amer. J. Math., 97, 548-558 (1975),

3. Nercesjan, A.B., Dokl. Akad. Nauk SSSR, 166, 1288-1291 (1966),

4. Ohya, Y., Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Vol.IV; 4 757-805 (1977),

5. Nishitani, T., Comm. in P.E.D., 3, 319-333 (1978),

6. Hasegawa, Y., J. Math. Kyoto Univ., 13, 579-593 (1973),

7. Baouendi-Goulaouic, Comm. Pure Appl. Math., 26 455-475 (1973).

8. Froim, V. Kh., Differentsial'nye Uravneniya 9-3, 533-541 (1973).