

Invariant subspace problem に関連する operator algebra について

東北大学 教養部 御園生 善高

東北大学医療短大 洲之内長一郎

1 序文 ヒルベルト空間 H 上の有界作用素の作る代数を $\mathcal{B}(H)$ で表わす. $A \in \mathcal{B}(H)$ とし, $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を A で不変な H の部分空間とすれば

$$\mathcal{M} \wedge \mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}, \quad \mathcal{M} \vee \mathcal{N} = \text{span}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$$

はまた A で不変である. したがって, A で不変な部分空間の集合は operations " $\vee$ ", " $\wedge$ " により束となる. これを $\text{Lat } A$ で表わす. $\mathcal{B}(H)$ の部分集合 $\mathcal{A}$ に対して, $\bigwedge_{A \in \mathcal{A}} \text{Lat } A$ を $\text{Lat } \mathcal{A}$ で表わす. A と可換な任意の $B \in \mathcal{B}(H)$ に対して, $\mathcal{M} \in \text{Lat } B$ を満たす H の部分空間 $\mathcal{M}$ を A の hyperinvariant な部分空間という. $\mathcal{M}$ が A で hyperinvariant ならば A で不変なことは明らかである. 以上 A と可換な $\mathcal{B}(H)$ の元全体を $\mathcal{A}$ とすれば, $\mathcal{A}$ は恒等作用素 I を含む弱閉な部分代数で

A は non-trivial hyperinvariant な部分空間をもたない

$$\Leftrightarrow \text{Lat } \mathcal{A} = \{ \{0\}, H \}$$

である.

定義 $\text{Lat } \alpha = \{ \theta \in H \mid \theta \text{ is invariant under } \alpha \}$ であるような恒等作用素を含む $B(H)$ の弱閉な部分代数を *transitive* であるという.

上記のことに着目して, Kadison [6] は, つぎの問題を提唱した:

Transitive algebra 問題 α が *transitive* ならば $\alpha = B(H)$ か?

$A (\neq \lambda I)$ が *non-trivial* な *hyperinvariant* な部分空間をもたないならば, A と可換な $B(H)$ の元全体は, $B(H)$ と異なる *transitive algebra* である. したがって, *transitive algebra* 問題が肯定的であれば, すべての $A (\neq \lambda I)$ は *non-trivial* な *hyperinvariant* な部分空間 (したがって不変部分空間) をもつことになる.

Transitive algebra に関する種々の結果は Radjavi, Rosenthal [12] に詳しい. この小論の目的は, *transitive algebra* に関する Arveson の定理を拡張することと, *transitive algebra* 問題を一般化した *reductive algebra* 問題に関する最近の結果を紹介することにある.

2. グラフ変換 ヒルベルト空間 H の n -copies の直和を $H^{(n)}$ で表わし, H 上の作用素 T の n -copies の直和を $T^{(n)}$ で表わす.

定義 2.1 $H^{(n)}$ の部分空間 M に対して

$$M = \{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

を満たす、共通の定義域 $\mathcal{D}$ をもつ H 上の必ずしも有界でない作用素 $T_1, \dots, T_{n-1}$ が存在するとき、 M を $H^{(n)}$ のグラフ部分空間という。また、ある n に対して、上のような作用素をグラフ変換という。

$H^{(n)}$ の部分空間 M がグラフ部分空間であるとき

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \in M, x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \cdots = x_n = 0$$

で、逆もなりたつ。 T を H 上の閉作用素とするとき $\{x \oplus Tx \mid x \in \mathcal{D}(T)\}$ は $H^{(2)}$ のグラフ部分空間で、したがって T はグラフ変換である。

定理 2.2 $\{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$

を $H^{(n+1)}$ のグラフ部分空間とするとき

$$T_i x = n V_i S x \quad (x \in \mathcal{D}; i = 1, 2, \dots, n)$$

を満たす H 上の正値作用素 S および $V_i \in \mathcal{B}(H)$ が存在して

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_1 & \cdots & V_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n & V_n & \cdots & V_n \end{bmatrix}$$

は $H^{(n)}$ 上の部分的等距離作用素である。

証明 $\overline{\mathcal{D}} \neq H$ の場合は

$$T_i x = 0 \quad \text{for } x \in \mathcal{D}^\perp \quad (i = 1, \dots, n)$$

とすることにより、 $\overline{\mathcal{D}} = H$ として一般性を失わない。

$T(x \oplus \dots \oplus x) = T_1 x \oplus \dots \oplus T_n x$, $\mathcal{D}_1 = \{x \oplus \dots \oplus x \mid x \in \mathcal{D}\}$
 とすれば, T は $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}_1$ を定義域とする $H^{(n)}$ 上の閉作用素
 である. いま

$$\tilde{T} = T \text{ on } \mathcal{D}_1, \quad \tilde{T} = 0 \text{ on } \mathcal{D}_1^\perp$$

とすれば, $\tilde{T}$ は稠密な定義域をもつ $H^{(n)}$ 上の閉作用素である.
 $z_1 \oplus \dots \oplus z_n \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*)$ とし

$$\tilde{T}^*(z_1 \oplus \dots \oplus z_n) = y_1 \oplus \dots \oplus y_n$$

とすれば

$$-(y_1 \oplus \dots \oplus y_n) \oplus (z_1 \oplus z_2 \oplus \dots \oplus z_n)$$

は $\tilde{T}$ のグラフ $\mathcal{G}(\tilde{T})$ と直交する. いま $u_1 \oplus u_2 \oplus \dots \oplus u_n \in \mathcal{D}_1^\perp$ と
 すれば, $\tilde{T}$ の定義から

$$(u_1 \oplus \dots \oplus u_n) \oplus (0 \oplus \dots \oplus 0) \in \mathcal{G}(\tilde{T})$$

である. ゆえに, $-(y_1 \oplus \dots \oplus y_n)$ は $\mathcal{D}_1^\perp$ と直交する. すな
 わち $y_1 \oplus \dots \oplus y_n \in \overline{\mathcal{D}_1}$ となる. したがって

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n$$

以上から

$$\tilde{T}^* \tilde{T}(x \oplus \dots \oplus x) = y \oplus \dots \oplus y, \quad x \oplus \dots \oplus x \in \mathcal{D}(\tilde{T}^* \tilde{T}) \subset \mathcal{D}_1$$

と表わせる. ゆえに

$$S_1 x = y$$

とすれば

$$\tilde{T}^* \tilde{T} = S_1^{(n)}$$

で, S_i は H 上の稠密な定義域をもつ正値作用素である. $S_i^{1/2} = S$ とおけば

$$|\tilde{T}| = S^{(n)}$$

である. $\tilde{T}$ の極分解を

$$\tilde{T} = V |\tilde{T}|$$

とすれば, V は $H^{(n)}$ 上の部分的等距離作用素である. その行列表現を $V = (V_{ij})$ とすれば, 任意の $x \in \mathcal{D}$ に対して

$$\begin{aligned} T(x \oplus \cdots \oplus x) &= \tilde{T}(x \oplus \cdots \oplus x) \\ &= V S^{(n)}(x \oplus \cdots \oplus x) \\ &= \sum_{j=1}^n V_{ij} S x \oplus \cdots \oplus \sum_{j=1}^n V_{nj} S x \end{aligned}$$

ゆえに

$$T_i x = \sum_{j=1}^n V_{ij} S x, \quad x \in \mathcal{D} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

V は $\{\text{range } |\tilde{T}|\}^{\text{closure}}$ から $\{\text{range } \tilde{T}\}^{\text{closure}}$ への部分的等距離作用素であるから, $V^* V$ は $\{\text{range } |\tilde{T}|\}^{\text{closure}}$ への射影作用素である. 任意の $y \in H$ に対して

$$y \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \overset{(j)}{\oplus} -y \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \in H^{(n)}$$

は $\text{range } \tilde{T}$ と直交するから

$$(V_{ii} - V_{ij}) y = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

j は任意であるから

$$V_{i1} = V_{i2} = \cdots = V_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$V_{i1} = \cdots = V_{in} = V_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ とすることにより定理が

示された.

V^*V が射影作用素であることから, 容易につぎの系がえられる.

系 2.3 定理において $n \sum_{i=1}^n V_i^* V_i$ は射影作用素である.

定義 2.4 ヒルベルト空間 H_1 からヒルベルト空間 H への作用素 T に対して, ヒルベルト空間 H_2 および H_1 から H_2 への閉作用素 S_1 , H_2 から H への閉作用素 S_2 が存在して, $T = S_2 S_1$ と表わせるとき, T を H_1 から H への半閉作用素という.

一般にグラフ変換が半閉であることは, 定義から容易にわかるが, 定理からグラフ変換は特殊な半閉作用素であることがわかる. 半閉作用素については [3], [7] を参照されたい.

3 Transitive algebra $\mathcal{O}$ をヒルベルト空間 H 上の *transitive algebra* とし

$$M = \{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathcal{O}\}$$

が $\mathcal{O}^{(n)} = \{A^{(n)} \mid A \in \mathcal{O}\}$ で不変な $H^{(n)}$ のグラフ部分空間であるとき, M を $\mathcal{O}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間という. $\mathcal{O}$ が *transitive* であるから, $\mathcal{O} \neq \{0\}$ ならば $\overline{\mathcal{O}} = H$ である. (以下 $\mathcal{O} \neq \{0\}$ の場合を考える.) また, ある n に対して, $\mathcal{O}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間を構成する作用素を, 単に $\mathcal{O}$ のグラフ変換という. したがって, $\mathcal{O}$ のグラフ変換は稠密な定義域をもつ $\mathcal{O}$ と可換な作用

素である。

Arveson [1] は *transitive algebra* 問題に関連して、重要な幾つかの結果を与えた。例えば、“*maximal abelian self-adjoint algebra* を含む *transitive algebra* は $B(H)$ である”という結果は特記されるべきであろう。これらの結果を導くために、つぎの定理を与えている。

定理 3. 1 (Arveson) $\mathcal{A}$ を H 上の *transitive algebra* とする。 $\mathcal{A}$ の任意のグラフ変換が恒等作用素のスカラー倍ならば、 $\mathcal{A} = B(H)$ である。

この形で Arveson の結果を述べ替えたのは Radjavi - Rosenthal [11] である。定理 3. 1 の条件 “ $\mathcal{A}$ の任意のグラフ変換が恒等作用素のスカラー倍” を “ $\mathcal{A}$ と可換な任意の閉作用素が恒等作用素のスカラー倍” で置き換えられたいか、という問題が提唱されているが未解決である。その部分的解答を与えよう。

定理 3. 2 $\mathcal{A}$ を H 上の *transitive algebra* で、 $\mathcal{A}$ と可換な稠密な定義域をもつ任意の閉作用素が恒等作用素 I のスカラー倍であるとする。さらに $\mathcal{A}$ の任意の不変グラフ部分空間

$$\{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

に対して、 $\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$ が $H^{(n)}$ で稠密でなければ、

$\mathcal{A} = B(H)$ である。ここに n は任意である。

証明 帰納法により示そう. $\{x \oplus T_1 x \mid x \in \mathcal{O}\}$ を $\mathcal{O}^{(2)}$ の任意の不変グラフ部分空間とすれば, T_1 は $\mathcal{O}$ と可換な稠密な定義域をもつ閉作用素であるから, T_1 は I のスカラー倍である.

任意の $k (\leq n)$ および $\mathcal{O}^{(k)}$ の任意の不変グラフ部分空間

$$\{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{k-1} x \mid x \in \mathcal{O}\}$$

に対して, $T_i (i = 1, \dots, k-1)$ が I のスカラー倍であると仮定する. このとき

$$\mathcal{M} = \{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{O}\}$$

が $\mathcal{O}^{(n+1)}$ の不変グラフ部分空間であるとき, $T_i (i = 1, \dots, n)$ が I のスカラー倍であることを示そう. 仮定から

$$\mathcal{M}_1 = \{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{O}\}^{\text{closure}} \neq H^{(n)}$$

で, $\mathcal{M}_1 \in \text{Lat } \mathcal{O}^{(n)}$ である. $\mathcal{M}_1$ がグラフ部分空間でないとする.

$$0 \oplus y_2 \oplus \cdots \oplus y_n \in \mathcal{M}_1$$

のような non-zero な $\mathcal{M}_1$ の元が存在する. このような $\mathcal{M}_1$ の元の集合を $\mathcal{M}_2$ とすれば, $\mathcal{M}_2 \in \text{Lat } \mathcal{O}^{(n)}$ である.

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{M}_1 \ominus \mathcal{M}_2$$

とする. $\mathcal{M}_2$ が $0 \oplus 0 \oplus y_3 \oplus \cdots \oplus y_n$ のような non-zero な元を含むとき, このような $\mathcal{M}_2$ の元全体を $\mathcal{M}_3$ とすれば, $\mathcal{M}_3 \in \text{Lat } \mathcal{O}^{(n)}$ で

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{M}_2 \ominus \mathcal{M}_3$$

とする.

この操作をくり返して, $m_4, m_5, \dots, m_m; K_4, K_5, \dots$

K_{m-1} を定め

$$m_m = \{0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus y_m \oplus \dots \oplus y_n\}$$

は non-zero な $0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus y_{m+1} \oplus \dots \oplus y_n$ を含まない

とする. このとき

$$m_i = K_i \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_{m-1} \oplus m_m$$

$$K_i = m_i \ominus m_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

で, $m_i \in \text{Lat } \mathcal{O}^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) である.

$$m'_i = \{y_i \oplus \dots \oplus y_n \mid 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus y_i \oplus \dots \oplus y_n \in m_i\}$$

($i = 1, 2, \dots, m$) とすれば, $m'_m \in \text{Lat } \mathcal{O}^{(n-i+1)}$ である. $m <$

n であることを示そう. $m = n$ とすれば, $m'_m \in \text{Lat } \mathcal{O}$ であ

るから, $m'_m = H$ である. ゆえに

$$\begin{aligned} m'_{m-1} &= (0 \oplus H) \oplus (0 \oplus H^\perp) \\ &= (0 \oplus H) \oplus (H \oplus 0) = H^{(2)} \end{aligned}$$

同様にして $m'_{m-2} = H^{(3)}, \dots, m'_1 = H^{(n)}$ となり仮定に反する.

したがって $m < n$ である.

m'_m は $\mathcal{O}^{(n-m+1)}$ の不変グラフ部分空間であるから, 帰納法の仮定から, $y_m \oplus y_{m+1} \oplus \dots \oplus y_n \in m'_m$ ならば

$$y_{m+1} = \lambda_{m,m+1} y_m, \dots, y_n = \lambda_{m,n} y_m$$

と表わせる. したがって, $m_m \in \text{Lat } \mathcal{O}^{*(n)}$ である. ゆえに

$\mathcal{K}_{m-1} = \mathcal{M}_{m-1} \oplus \mathcal{M}_m \in \text{Lat } \mathcal{O}^{(n)}$ である.

$$\mathcal{K}'_{m-1} = \{ y_{m-1} \oplus \cdots \oplus y_n \mid 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus y_{m-1} \oplus \cdots \oplus y_n \in \mathcal{K}_{m-1} \}$$

とすれば, $\mathcal{K}'_{m-1}$ は $\mathcal{O}^{(n-m+2)}$ の不変グラフ部分空間である. ゆえに

$$y_m = \lambda_{m-1m} y_{m-1}, \dots, y_n = \lambda_{m-1n} y_{m-1}$$

と表わせる. 同様にして

$$\mathcal{K}_i = \{ 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus y_i \oplus \lambda_{i+1i} y_i \oplus \cdots \oplus \lambda_{ni} y_i \mid y_i \in H \}$$

と表わせる. ゆえに

$$\begin{aligned} & T_1 x \oplus T_2 x \oplus \cdots \oplus T_n x \\ &= y_1 \oplus \lambda_{12} y_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_{1n} y_1 \\ &+ 0 \oplus y_2 \oplus \lambda_{23} y_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_{2n} y_2 \\ &+ \cdots \cdots \\ &+ 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus y_m \oplus \lambda_{mm+1} y_m \oplus \cdots \oplus \lambda_{mn} y_m \end{aligned}$$

である. ゆえに, $\{ T_1 x_k \oplus \cdots \oplus T_m x_k \} \ (k=1, 2, \dots)$ が収束すれば, $\{ T_{m+1} x_k \oplus \cdots \oplus T_n x_k \}$ も収束する. したがって

$$\{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_m x \mid x \in \mathcal{O} \}$$

は $\mathcal{O}^{(m+1)}$ の不変グラフ部分空間となり, $T_i \ (i=1, 2, \dots, m)$ は I のスカラー倍となる. したがって

$$\{ x \oplus T_2 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{O} \}$$

も $\mathcal{O}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間となり, $T_i \ (i=m+1, \dots, n)$ も I のスカラー倍である.

以上から、 $\mathcal{O}$ の任意のグラフ変換が I のスカラー倍となる。
したがって、定理 3. 1 から定理が示された。

定理 3. 3 $\mathcal{M} = \{x \oplus T_1 x \oplus \dots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{O}\}$ を $H^{(n+1)}$ の
部分空間とし、 $\mathcal{M}_1 = \{T_1 x \oplus \dots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{O}\}$ とする。 $\mathcal{M}_1$ が
 $H^{(n)}$ で稠密であるための必要十分条件は、定理 2. 2 にあ
る。

$$n V_i V_j^* = \delta_{ij} I \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

が成立することである。さらに、transitive algebra $\mathcal{O}$ に対し
て、 $\mathcal{M}$ が $\mathcal{O}^{(n+1)}$ の不変グラフ部分空間ならば

$$n \sum_{i=1}^n V_i^* V_i = I$$

である。

証明 $\tilde{V} = V S^{(n)}$ で、 V は $\mathcal{M}_1$ の閉包を range とする $H^{(n)}$
の部分的等距離作用素であるから、 $\mathcal{M}_1$ が $H^{(n)}$ で稠密であるた
めの必要十分条件は

$$V V^* = \begin{bmatrix} V_1 & \dots & V_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n & \dots & V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* & \dots & V_n^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^* & \dots & V_n^* \end{bmatrix}$$

が $H^{(n)}$ の恒等作用素となることである。すなわち

$$n V_i V_j^* = \delta_{ij} I \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

定理の後半を示そう。 $n V_i V_i^* = I$ であるから、 $\sqrt{n} V_i$ は H 上
の部分的等距離作用素で

$$P_i = n V_i^* V_i$$

は射影作用素である。また

$$P_i P_j = n^2 V_i^* V_i V_j^* V_j = 0 \quad (i \neq j)$$

であるから、 $P_1, \dots, P_n$ は互いに直交する。 $\sum_{i=1}^n P_i \neq I$ とすれば

$$V_i x = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

となる 0 と異なる $x \in H$ が存在する。このような x に対して

$$V(x \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0) = 0 \oplus \dots \oplus 0$$

である。一方、 $\tilde{T}^* = |\tilde{T}| V$ であるから、 $x \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*)$ で

$$\tilde{T}^*(x \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0) = 0 \oplus \dots \oplus 0$$

$\tilde{T}$ は $\mathcal{O}^{(n)}$ と可換な閉作用素であるから、 $\tilde{T}^*$ は $\mathcal{O}^{*(n)}$ と可換で

$$\mathcal{M} = \{x \in H \mid \tilde{T}^*(x \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0) = 0 \oplus \dots \oplus 0\}$$

とすれば、 $\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}^*$ で不変な H の部分空間である。 $\mathcal{O}$ が *transitive* であるから $\mathcal{O}^*$ も *transitive* である。したがって、 $\mathcal{M} = H$ 。すなわち、任意の $x \in H$ に対して

$$x \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*), \quad \tilde{T}^*(x \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0) = 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0$$

同様にして、任意の $x \in H$ に対して

$$\tilde{T}^*(0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus x \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0) = 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0$$

したがって

$$\tilde{T}^* = 0$$

ゆえに、 $\tilde{T} = 0$ となり、 $\{T_1 x \oplus \dots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$ が $H^{(n)}$ で稠

定であることに反する. ゆえに $\sum_{i=1}^n p_i = I$

4 Reductive algebra 恒等作用素を含む $B(H)$ の弱閉な代数 $\mathcal{A}$ が

$$M \in \text{Lat } \mathcal{A} \Rightarrow M \in \text{Lat } \mathcal{A}^*$$

を満たすとき, $\mathcal{A}$ を *reductive* であるという. ここに $\mathcal{A}^* = \{A^* \mid A \in \mathcal{A}\}$ である. $\mathcal{A}$ が *transitive* ならば容易にわかるように, $\mathcal{A}$ は *reductive* である. *Transitive algebra* 問題は一般化されて

Reductive algebra 問題: $\mathcal{A}$ が *reductive* ならば, $\mathcal{A}$ は von Neumann algebra となる.

この問題に関する諸結果は [12] に詳しい. ここでは [12] で述べられている Hoover [5] の結果を述べておく. $\mathcal{A} \in B(H)$ の部分集合とすると, $\mathcal{A}$ より生成される von Neumann algebra を $R(\mathcal{A})$ で表わすことにする. Hoover の結果は形を変えて, 次のように述べることができる.

定理 4. 1 (Hoover) $\mathcal{A}$ が *reductive* で $R(\mathcal{A})'$ が properly infinite な von Neumann algebra ならば, $\mathcal{A}$ は von Neumann algebra である.

Hoover はさらに, von Neumann algebra $R(\mathcal{A})'$ に条件をつけ

ることにより, いくつかの結果を与えている. そのとき, 中心的な役をするのがつぎの補題である.

補題 4. 2 $\mathcal{O}$ が *reductive* なら $(\mathcal{O} = \mathcal{R}(\mathcal{O}))'$ の中心は $\mathcal{O}$ に含まれる.

この簡単な証明については [8] を参照されたい. Azoff [2] は $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ の中心が $\mathcal{O}$ に含まれる条件について考察している.

有界作用素の値域となっている manifold を単に作用素値域ということにする. 作用素値域については [4] を参照されたい. 恒等作用素を含む弱閉代数 $\mathcal{O}$ の不変部分空間による考察を拡張して, $\mathcal{O}$ で不変な作用素値域による考察が最近なされるようになった. $\mathcal{O}$ の各作用素で不変な作用素値域の作る束を $\text{Lat}_{V_2} \mathcal{O}$ で表わす. Voiculescu [13] はつぎの結果を与えた.

定理 4. 3 (Voiculescu) $\mathcal{O}$ を恒等作用素を含む $\mathcal{B}(H)$ の弱閉代数とすると, $\text{Lat}_{V_2} \mathcal{O}^{(1)} = \text{Lat}_{V_2} \mathcal{R}(\mathcal{O})^{(1)}$ なら $\mathcal{O} = \mathcal{R}(\mathcal{O})$ である.

恒等作用素を含む $\mathcal{B}(H)$ の弱閉代数 $\mathcal{O}$ が

$$M \in \text{Lat}_{V_2} \mathcal{O} \Rightarrow M \in \text{Lat}_{V_2} \mathcal{O}^*$$

であるとき, $\mathcal{O}$ を *strongly reductive* であるといい,

$$M \in \text{Lat}_{V_2} \mathcal{O} \Rightarrow M \in \text{Lat}_{V_2} \mathcal{R}(\mathcal{O})$$

を満たすとき, $\mathcal{O}$ を *parareductive* であるという.

$$\text{parareductive} \Rightarrow \text{strong reductive} \Rightarrow \text{reductive}$$

であることは明らかである.

Voiculescu の結果は $\mathcal{A}^{(1)}$ が parareductive ならば $\mathcal{A} = R(\mathcal{A})$ ということである. 類似の結果として, Peligrad [9] による下記の定理を紹介しておく.

定理 4. 4 (Peligrad) $\mathcal{A}^{(2)}$ が strongly reductive ならば $\mathcal{A} = R(\mathcal{A})$ である.

Parareductive algebra に関しての問題が完全に解決されて, 下記の定理がなりたつ.

定理 4. 5 (Azoff, Peligrad) $\mathcal{A}$ が parareductive ならば $\mathcal{A} = R(\mathcal{A})$ である.

この定理は, 最初 Azoff [2] により, ヒルベルト空間が可分の場合になりたつことが示され, Peligrad [10] により一般の場合に拡張された.

文 献

- [1] W.B.Arveson; A density theorem for operator algebras, Duke Math.J., 34(1967), 653-643.
- [2] E.A.Azoff, Invariant linear manifolds and the selfadjointness of operator algebras, Amer.J.Math., 99(1977), 121-138.
- [3] S.R.Caradus, Semiclosed operators, Pacific J.Math., 44(1973), 75-79.
- [4] P.A.Fillmore and J.P.Williams, On operator ranges, Advances in Math.,

7(1971), 254-281.

[5] T.B.Hoover, Operator algebras with reducing invariant subspaces,
Pacific J.Math., 44(1973), 173-180.

[6] R.V.Kadison, On the orthogonalization of operator representations,
Amer.J.Math., 78(1955), 600-621.

[7] W.E.Kaufman, Semiclosed operators in Hilbert space, Proc.Amer.
Math.Soc., 70(1979), 67-73.

[8] 御園生善尚 *Reductive algebra* について, 数理解析研究所講義録 254(1975)

[9] C. Peligrad, Invariant subspaces of von Neumann algebras, Acta Sci.
Math.(Szeged), 37(1975), 275-279.

[10] _____, Invariant subspaces of von Neumann algebras II, Proc.
Amer. Math. Soc., 73(1979), 346-350.

[11] H.Radjavi and P.Rosenthal, On invariant subspaces and reflexive
algebras, Amer.J.Math., 91(1969), 683-692.

[12] _____, invariant subspaces, Springer-Verlag, New
York, 1973.

[13] D. Voiculescu, Sur les sous-espaces parafermes invariants
d'une algebre de von Neumann, Bull. Sci. Math., (2)96(1972),
161-168.