

Hilbert $B(H)$ -modules について

東京電機大・理工 垣原 祐一郎

§1. Introduction.

ベクトル値内積をもつ空間とその応用について述べる。 H を Hilbert space, $B(H)$ を H 上の bounded linear operators の全体, $T(H)$ を H 上の trace-class operators の全体とする。我々が考察する空間は Hilbert $B(H)$ -module と呼ぶものである。これは left $B(H)$ -module で $T(H)$ -valued inner product (Gramian と呼ぶ) をもち, Gramian から導入された norm に関して完備なものである。

Hilbert $B(H)$ -module の基本的な性質について述べる。その多くは Hilbert space と類似していることが示される (§2)。

§3 では, 群上の $T(H)$ -valued function について考察する。通常の numerical function の場合と同様に positive definiteness を定義し, unitary representation との関係や Bochner type の定理などについて述べる。

§4 では, Hilbert space-valued \mathbb{F} Hilbert-Schmidt class operator-valued stationary process の拡張としての Hilbert $B(H)$ -module-valued stationary process について述べる。有名な2つの定理 - Wold と Cramér の分解 - を定式化する。

§2. Hilbert $B(H)$ -modules.

B を algebra, X を left B -module とするとき, B の X の上への action を $B \times X \ni (a, x) \rightarrow a \cdot x \in X$ と書くことにする。 $a \in B(H)$ の norm は $\|a\|_\infty$, adjoint は a^* , $B(H)$ の unit は 1 と書くことにする。また, $T(H)$ の trace および trace-norm はそれぞれ $\text{Tr}(\cdot)$, $\tau(\cdot)$ と書く。

2.1. Definition. X を left $B(H)$ -module とするとき, X が pre-Hilbert $B(H)$ -module であるとは, 適当な mapping $[\cdot, \cdot]: X \times X \rightarrow T(H)$ が存在して次の (1) ~ (4) を満たすことである: $\forall x, y, z \in X, \forall a \in B(H)$ に対して

$$(1) [x+y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$(2) [a \cdot x, y] = a[x, y]$$

$$(3) [x, y] = [y, x]^*$$

$$(4) [x, x] \geq 0; [x, x] = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$[\cdot, \cdot]$ は Gramian と呼ばれる。□

Hilbert $B(H)$ -module の最初の idea は Terasaki [17] に見られる。 C^* -algebra 上の module については Kaplansky [5], Paschke [11], Rieffel [13] に詳しい。これから述べることは主として Kakihara-Terasaki [3], Kakihara [4] による。また, Hilbert $B(H)$ -module の一般的な取り扱いについては Ozawa [10] に見られる。

2.2. Remark. X が pre-Hilbert $B(H)$ -module であるならば X は pre-Hilbert space になる。 $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (複素数体) に対して scalar product, inner product, norm をそれぞれ次の式で定義する:

$$\alpha x = (\alpha 1) \cdot x, \quad (x, y)_X = \text{Tr}([x, y])$$

$$\|x\|_X = \tau([x, x])^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

Paschke [11] と同様にして, 次の Lemma を得る。

2.3. Lemma. X が pre-Hilbert $B(H)$ -module ならば, $\forall x, y \in X$, $\forall a \in B(H)$ に対して 次の (1) ~ (4) が成立する:

$$(1) \quad (a \cdot x, y)_X = (x, a^* \cdot y)_X$$

$$(2) \quad \|a \cdot x\|_X \leq \|a\|_\infty \cdot \|x\|_X$$

$$(3) \quad [y, x][x, y] \leq \|x\|_X^2 [y, y]$$

$$(4) \quad \tau([x, y]) \leq \|x\|_X \cdot \|y\|_X. \quad \square$$

2.4. Definition. pre-Hilbert $B(H)$ -module X が norm $\|\cdot\|_X$ に関して完備であるとき, X を Hilbert $B(H)$ -module と呼ぶ。 \square

2.5. Remark. X が pre-Hilbert $B(H)$ -module のとき \tilde{X} を $\|\cdot\|_X$ に関する X の completion とすると, \tilde{X} は Hilbert $B(H)$ -module となり, $B(H)$ の X 上での action および X 上の Gramian はそれぞれ \tilde{X} 上へ一意的に拡張されること Lemma 2.3 からわかる (c.f. [11]).

2.6. Examples. (1) Hilbert space H は Hilbert $B(H)$ -module である。 $B(H)$ の action は $a \cdot \phi = a\phi$, $a \in B(H)$, $\phi \in H$, H 上の Gramian は $[\phi_1, \phi_2] = \phi_1 \otimes \bar{\phi}_2$, $\phi_1, \phi_2 \in H$ (Schatten [16] の tensor product) で定義される。 Ozawa [10] は, H 上の Gramian が定数倍を除いて一意的に上の形であることを示した。

(2) Hilbert-Schmidt class $HS(H)$ も Hilbert $B(H)$ -module である。 $B(H)$ の action は $a \cdot a_1 = aa_1$, $a \in B(H)$, $a_1 \in HS(H)$, Gramian は $[a_1, a_2] = a_1 a_2^*$, $a_1, a_2 \in HS(H)$ で定義される。

(3) $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ を probability measure space, $L^2(\Omega; H)$ を Ω 上で定義された random variables で square-integrable なものの全体とする。 $x, y \in L^2(\Omega; H)$, $a \in B(H)$ に対して, action と Gramian は次式で定義される (c.f. [18]):

$$(a \cdot x)(\omega) = ax(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

$$[x, y] = \int_{\Omega} x(\omega) \otimes \overline{y(\omega)} \mu(d\omega). \quad \square$$

Hilbert $B(H)$ -module の characterization として、次の定理がある (c.f. [4])。

2.7. Theorem. X は left $B(H)$ -module で Hilbert space (inner product を $(\cdot, \cdot)_X$ とする) であるとする。もし、 $\forall x \in X$ に対して $p_x(a) = (a \cdot x, x)_X$, $a \in B(H)$ が $B(H)$ 上の normal positive linear functional であれば、 X は Hilbert $B(H)$ -module になる。

(Outline of the proof) $\forall x \in X$ に対して $\Lambda_x(a) = a \cdot x$, $a \in B(H)$ とすると、 Λ_x は $B(H)$ から X への bounded linear operator になることがわかる。 $\Lambda_x^* : X \rightarrow B(H)^*$ であるから $[x, y] = \Lambda_x^*(y)$, $x, y \in X$ と定義すると、簡単な計算によって $p_x(a) = \langle [x, x], a^* \rangle$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $B(H)$ と $B(H)^*$ の pair) が $\forall a \in B(H)$ で成立し、 p_x が normal ことから $[x, x] \in T(H)$ が出る。以下 $[\cdot, \cdot]$ が Gramian であることを確かめる。□

2.8. Definition. X を Hilbert $B(H)$ -module, Y を X の subset とする。

(1) Y が X の Hilbert $B(H)$ -submodule であるとは、 Y が X の left $B(H)$ -submodule で、 $\|\cdot\|_X$ に関して closed であることをいう。

(2) $\mathcal{G}(Y)$ によって Y から generate された X の Hilbert

(3) Y の Gramian orthogonal complement Y^\perp は

$$Y^\perp = \{x \in X; [x, y] = 0, \forall y \in Y\}$$

で定義される。□

Kaplansky [5] は, commutative AW^* -module に対して orthogonal decomposition theorem を証明したが, Hilbert $B(H)$ -module でも同様のことが証明される (c.f. [3])。□

2.9. Theorem. X を Hilbert $B(H)$ -module, Y を X の Hilbert $B(H)$ -submodule とする。 Y の Gramian orthogonal complement Y^\perp は X の Hilbert $B(H)$ -submodule になり, 通常の Hilbert space としての orthogonal complement Y^\perp と一致する。したがって $Y = Y \oplus Y^\perp$ の orthogonal decomposition が成立する。

(Outline of the proof) Y^\perp が left $B(H)$ -module であることは容易に確かめられる。 Y^\perp が norm-closed であることは, Lemma 2.3(4) よりわかる。 $Y^\perp = Y^\perp$ については, $Y^\perp \subset Y^\perp$ は明らか。 $Y^\perp \subset Y^\perp$ は, $x \in Y^\perp, y \in Y$ として, $\forall a \in B(H)$ に対して $\text{Tr}(a[x, y]) = 0$ を示し, $T(H)^* = B(H)$ を用いる。□

次に Hilbert $B(H)$ -module X の functional に対しての Riesz type theorem を述べる。 Kaplansky [5] も同様の結果を得ている。

2.10. Definition. X を Hilbert $B(H)$ -module とする。 f が X 上の functional であるとは、 f が X から $T(H)$ への module homomorphism であることをいふ。つまり、 $\forall x, y \in X, \forall a \in B(H)$ に対して $f(x+y) = f(x) + f(y), f(a \cdot x) = a f(x)$ を満たすことである。 X 上の functional f が bounded であるとは、 $\exists k > 0$ に対して $\tau(f(x)) \leq k \|x\|_X, \forall x \in X$ が成立することである。上の不等式を満たす k の下限が f の norm $\|f\|_X$ である。□

2.11. Theorem. f が Hilbert $B(H)$ -module X 上の bounded functional であれば、一意に $y \in X$ が存在して

$$f(x) = [x, y], \quad y \in X$$

および $\|f\|_X = \|y\|_X$ を満たす。

(Outline of the proof) $\rho(x) = \text{Tr}(f(x))$ とおいて通常の Hilbert space の Riesz theorem を用い $\rho(x) = (x, y)_X, \exists y \in X$ 。あと $\text{Tr}(a[x, y]) = \text{Tr}(a f(x)), \forall a \in B(H)$ を示し $f(x) = [x, y]$ を得る。□

§3. A Bochner type theorem.

この § では、群上の $T(H)$ -valued function について考察する。

3.1. Definition. G を topological group とし、 $\rho \in G$ 上の $T(H)$ -valued function とする。

(1) p が positive-definite であるとは, $\forall \{a_1, \dots, a_n\} \subset B(H)$, $\forall \{t_1, \dots, t_n\} \subset G$ に対して $\sum_{i,j} a_i p(t_i t_j^{-1}) a_j^* \geq 0$ が成立することをいう。

(2) p が weakly continuous であるとは, $\forall a \in B(H)$ に対して $\text{Tr}(ap(\cdot))$ が continuous であることをいう。

次の定理は Ozawa [10] による。

3.2. Theorem. G を locally compact group, p を G 上の $T(H)$ -valued positive-definite function とする。このとき適当な Hilbert $B(H)$ -module X , $x_0 \in X$, G の X 上への unitary representation $t \rightarrow U_t$ が存在して

$$p(t) = [U_t x_0, x_0], \quad t \in G$$

が成立する。もし, p が weakly continuous であれば, $t \rightarrow U_t$ も weakly continuous になる。□

3.3. Remark. Hilbert $B(H)$ -module X 上の bounded linear operator U が $[Ux, Uy] = [x, y]$, $\forall x, y \in X$ を満たすとき Gramian unitary であると呼ぶことにする。Gramian unitary operator は, 通常の unitary operator になる。上の定理で, $U_t, t \in G$ は Gramian unitary にとれることがわかる。このとき $t \rightarrow U_t$ を Gramian unitary representation と呼ぶことにする。□

locally compact abelian group 上の $T(H)$ -valued

weakly continuous positive-definite function に対する Bochner type theorem を定式化するために我々はいくつかの準備を必要とする。

しばらくの間 (Ω, \mathcal{B}) を abstract measurable space とする。 F を \mathcal{B} 上の $T(H)^+$ -valued countably additive (c.a.) measure とする。ここで countable additivity は trace-norm の意味で考える。我々は Ω 上の $B(H)$ -valued function の $T(H)$ -valued measure F についての integral を定義する。まず $L_0(\Omega; B(H))$ を Ω 上の $B(H)$ -valued simple functions の全体とする。つまり $\Phi = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, $a_i \in B(H)$, $A_i \in \mathcal{B}$ ($1 \leq i \leq n$) なる形の function の集まりである (1_A , $A \in \mathcal{B}$ は, A の characteristic function を表わす)。 Ω 上の complex-valued function Φ は, $\Phi(\omega) = \Phi(\omega)1$, $\omega \in \Omega$ とみなすことによって $B(H)$ -valued function になる。 $\Phi = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} \in L_0(\Omega; B(H))$ に対して Φ の norm および F についての integral を

$$\|\Phi\| = \sup_{\omega \in \Omega} \|\Phi(\omega)\|$$

$$\int_{\Omega} \Phi(\omega) F(d\omega) = \sum_{i=1}^n a_i F(A_i)$$

で定義する。 $\mu(A) = \tau(F(A))$, $A \in \mathcal{B}$ とおくと μ は \mathcal{B} 上の finite nonnegative measure になる。簡単な計算により

$\forall \Phi \in L_0(\Omega; B(H))$ に対して

$$\tau\left(\int_{\Omega} \Phi(\omega) F(d\omega)\right) \leq \|\Phi\| \mu(\Omega)$$

が成立する。 $L_0(\Omega; B(H))$ の $\|\cdot\|$ についての completion を $L(\Omega; B(H))$ と書くことにすると、上の不等式によって F についての integral は $L(\Omega; B(H))$ の要素に対し拡張され、上の不等式もそのまま成立する。さらに $\forall a \in B(H), \forall \Phi \in L(\Omega; B(H))$ に対して $\int_{\Omega} a \Phi(\omega) F(d\omega) = a \int_{\Omega} \Phi(\omega) F(d\omega)$ が成立する。

次に Ω を locally compact space, \mathcal{B} を Ω の Borel field, X を Hilbert $B(H)$ -module とする。 X 上の projection P で $[Px, y] = [x, Py], \forall x, y \in X$ を満たすものを Gramian projection と呼ぶことにする。 P が X のある Hilbert $B(H)$ -submodule への projection であることが Gramian projection になるための必要十分条件である。 \mathcal{B} 上で定義され X 上の Gramian projection に値をとる measure $P(\cdot)$ で、 $(P(\cdot)x, x)_X$ が $\forall x \in X$ で regular になるものを spectral measure と呼ぶ。この $P(\cdot)$ についての integral について述べることにする。まず $L_0(\Omega; B(H))$ の要素に対して定義し、次に $L(\Omega; B(H))$ にまで拡張する。 simple function $\Phi = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ に対して

$$\int_{\Omega} \Phi(\omega) P(d\omega) = \sum_{i=1}^n \pi(a_i) P(A_i)$$

と定義する。ここで $\pi(a) (a \in B(H))$ は、 $\pi(a)x = a \cdot x, x \in X$ と

定義された X 上の operator である。また、右辺は strong operator topology で考える。容易に、 $\forall \Phi \in L_0(\Omega; B(H))$ に対して

$$\left\| \int_{\Omega} \Phi(\omega) P(d\omega) \right\|_X \leq \|\Phi\|$$

が成立することが確かめられる。したがって P についての integral は $L(\Omega; B(H))$ の零素にまで拡張され、上の不等式もそのまま成立する。

$x \in X$ に対して $\xi_x(\cdot) = P(\cdot)x$ と定義すると、 ξ_x は \mathcal{B} 上の X -valued c.a. orthogonally scattered (o.s.) measure になる。つまり、 $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \phi$ であれば

$$[\xi_x(A), \xi_x(B)] = 0$$

を満たす。 $x, y \in X$ に対して $M_{x,y}(\cdot) = [P(\cdot)x, y]$ と定義すると、 $M_{x,y}$ は \mathcal{B} 上の $T(H)$ -valued c.a. measure になる。 $M_{x,y}$ についての integral も同様に定義される。まず $\forall A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\tau(M_{x,y}(A)) \leq \|P(A)\|_X \cdot \|x\|_X \cdot \|y\|_X$$

が成立することに注意する。simple function $\Phi = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ に対して

$$\int_{\Omega} \Phi(\omega) M_{x,y}(d\omega) = \sum_{i=1}^n a_i [P(A_i)x, y]$$

と定義すると、次の不等式が成立する:

$$\tau\left(\int_{\Omega} \Phi(\omega) M_{x,y}(d\omega)\right) \leq \|\Phi\| \cdot \|x\|_X \cdot \|y\|_X.$$

したがって integral を $L(\Omega; B(H))$ の要素まで拡張でき、上の不等式もそのまま成立する。さらに $\forall \Phi \in L(\Omega; B(H))$ について次の等式が成立する:

$$\int_{\Omega} \Phi(\omega) M_{x,y}(\omega) d\omega = \left[\left(\int_{\Omega} \Phi(\omega) P(d\omega) \right) x, y \right].$$

以上の準備の下で Bochner type theorem を証明することができる。

3.4. Theorem. G を locally compact abelian group, \hat{G} をその dual group とする。 $\chi \in \hat{G}$ の $t \in G$ における値は $\langle t, \chi \rangle$ と書くことにする。 ρ が G 上の $T(H)$ -valued weakly continuous positive-definite function であるならば, \hat{G} 上の $T(H)^+$ -valued c.a. measure F が存在して

$$\rho(t) = \int_{\hat{G}} \overline{\langle t, \chi \rangle} F(d\chi), \quad t \in G$$

を満たす。逆に上式で定義される ρ は, G 上の $T(H)$ -valued weakly continuous positive-definite function である。

(Outline of the proof) 前半は, Theorem 3.2 および Remark 3.3 により, ある Hilbert $B(H)$ -module X , $x_0 \in X$ および G の Gramian unitary representation $t \rightarrow U_t$ が存在して

$$\rho(t) = [U_t x_0, x_0], \quad t \in G$$

を満たす。簡単な計算により, 通常の Stone の定理を用いて \hat{G} の spectral measure $P(\cdot)$ が存在して

$$U_t = \int_{\hat{G}} \overline{\langle t, x \rangle} P(dx), \quad t \in G$$

となる。そこで \hat{G} の Borel set A に対して

$$F(A) = [P(A)x_0, x_0]$$

とおくと, F は \hat{G} の Borel field 上の $T(H)^+$ -valued c.a. measure になり定理の条件を満たすことが確かめられる。後半は容易である。□

§4. Hilbert $B(H)$ -module-valued stationary processes.

Hilbert space に値をとる univariate process $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ についての理論は Kolmogorov [7] にみられる。multivariate process については Wiener-Masani [19] の代表的な研究がある。infinite-variate case, $L^2(\Omega; H)$ -valued, $HS(H)$ -valued process については Kallianpur-Mandrekar [6], Mandrekar-Salehi [8,9], Payen [12], Rosenberg [14] などがある。我々は、これらを統一的に取り扱うことを目的として Hilbert $B(H)$ -module に値をとる process について考察する (c.f. Kakihara [4], Ozawa [10])。

以下, X, G をそれぞれ固定した Hilbert $B(H)$ -module, locally compact abelian group とする。

4.1. Definition. G から X への写像 $t \rightarrow x_t$ があるとす。 $\{x_t\}_{t \in G}$ が G 上の X -valued stationary process (sp) であ

るとは、次の (1), (2) が満たされることである:

(1) $[x_s, x_t]$ が st^{-1} だけに依存する。これを $\Gamma(st^{-1})$ とおく。

(2) Γ は weakly continuous である。

Γ は process $\{x_t\}_{t \in G}$ の covariance function と呼ばれる。□

4.2 Remark. $\{x_t\}_{t \in G}$ を G 上の X -valued sp, Γ をその covariance function とする。

(1) Γ は completely positive になる。つまり, $\forall \{t_1, \dots, t_n\} \subset G, \forall \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subset H$ に対して

$$\sum_{i,j} (\Gamma(t_i t_j^{-1}) \phi_j, \phi_i) \geq 0.$$

(2) Γ は $T(H)$ -valued positive-definite function になる (c.f. Definition 3.1)。□

4.3 Definition. $\{x_t\}_{t \in G}$ を G 上の X -valued sp とする。

(1) $\{x_t\}_{t \in G}$ の time domain は

$$h(\tilde{x}) = \mathcal{G}\{x_t : t \in G\}$$

で定義される。また V を G の subset としてとき, $\{x_t\}_{t \in G}$ の V に関する observation space は

$$h(\tilde{x} : V) = \mathcal{G}\{x_t ; t \in V\}$$

で定義される。

(2) $s \in G$ に対して $U_s x_t = x_{st}, t \in G$ で定義される

$\mathfrak{h}(\tilde{x})$ 上の operator U_s を $\{\alpha_t\}_{t \in G}$ の shift operator と呼ぶ。 U_s は Gramian unitary で $s \rightarrow U_s$ が weakly continuous になるから \hat{G} 上の spectral measure $P(\cdot)$ が存在して $U_s = \int_{\hat{G}} \overline{\langle s, \chi \rangle} P(d\chi)$ となる。

(3) Γ を $\{\alpha_t\}_{t \in G}$ の covariance function とすると, Theorem 3.4 により \hat{G} 上の $T(H)^+$ -valued c.a. measure $F_{\tilde{x}}$ が存在して

$$\Gamma(s) = [\alpha_s, \alpha_e] = \int_{\hat{G}} \overline{\langle s, \chi \rangle} F_{\tilde{x}}(d\chi), \quad s \in G$$

となる。 $F_{\tilde{x}}$ は $\{\alpha_t\}_{t \in G}$ の spectral distribution と呼ばれる。 \square

Wold の分解定理を定式化するために次の定義が必要である。

4.4. Definition. \mathcal{J} を G の nonempty subsets の作る family で translation invariant なものとする。つまり $t \in G, \forall \mathcal{V} \in \mathcal{J}$ ならば $t\mathcal{V} \in \mathcal{J}$ を満たすとする。

(1) G 上の X -valued sp $\{\alpha_t\}_{t \in G}$ が \mathcal{J} -regular であるとは,

$$\bigcap_{\mathcal{V} \in \mathcal{J}} \mathfrak{h}(\tilde{x} : \mathcal{V}) = \{0\}$$

が成立することである。また \mathcal{J} -singular であるとは

$$\mathfrak{h}(\tilde{x} : \mathcal{V}) = \mathfrak{h}(\tilde{x})$$

が $\forall \mathcal{V} \in \mathcal{J}$ で成立することである。

(2) $\{x_t\}_{t \in G}, \{y_t\}_{t \in G}$ を G 上の X -valued sp's とするとき, $\{y_t\}_{t \in G}$ が $\{x_t\}_{t \in G}$ に \mathcal{I} -subordinate であるとは, $[x_s, y_t]$ が st^{-1} だけに依存し,

$$\mathfrak{h}(\tilde{y}: \mathcal{V}) \subset \mathfrak{h}(\tilde{x}: \mathcal{V}), \quad \forall \mathcal{V} \in \mathcal{I}$$

および $\mathfrak{h}(\tilde{y}) \subset \mathfrak{h}(\tilde{x})$ が成立することである。□

以上の準備の下で Wold decomposition は次のようになる。(c.f. [4.6.15])。

4.5. Theorem. $\{x_t\}_{t \in G}$ を G 上の X -valued sp, \mathcal{I} を G の nonempty subsets の family で translation invariant であるとする。このとき $\{x_t\}_{t \in G}$ の一意な分解 $x_t = y_t + w_t$, $t \in G$ が存在して次を満たす:

- (1) $\{y_t\}_{t \in G}, \{w_t\}_{t \in G}$ は G 上の X -valued sp's である。
- (2) $[y_s, w_t] = 0, \quad \forall s, t \in G$.
- (3) $\{y_t\}_{t \in G}, \{w_t\}_{t \in G}$ は $\{x_t\}_{t \in G}$ に \mathcal{I} -subordinate である。
- (4) $\{y_t\}_{t \in G}$ は \mathcal{I} -regular である。
- (5) $\{w_t\}_{t \in G}$ は \mathcal{I} -singular である。

(Outline of the proof) $\mathfrak{h}(\tilde{x}: \mathcal{I}) = \bigcap_{\mathcal{V} \in \mathcal{I}} \mathfrak{h}(\tilde{x}: \mathcal{V})$ とおくと, これは $\mathfrak{h}(\tilde{x})$ の Hilbert $B(H)$ -submodule になっている。そこで P を $\mathfrak{h}(\tilde{x})$ から $\mathfrak{h}(\tilde{x}: \mathcal{I})$ の上への Gramian projection として

$$w_t = P x_t, \quad y_t = x_t - w_t, \quad t \in \Gamma$$

とおき, $\{y_t\}_{t \in \Gamma}, \{w_t\}_{t \in \Gamma}$ が (1) ~ (5) を満たすことを確かめる。□

4.6. Definition. $\{x_t\}_{t \in \Gamma}$ を Γ 上の X -valued sp, $F_{\tilde{x}}$ をその spectral distribution とする (c.f. Definition 4.3)。また $d\chi$ を \hat{G} の Haar measure とする。

(1) $F_{\tilde{x}}$ が $d\chi$ に関して absolutely continuous ($F_{\tilde{x}} \ll d\chi$) であるとは, $\forall \phi, \psi \in H$ に対して

$$(F_{\tilde{x}}(\cdot)\phi, \psi) \ll d\chi$$

となることである。

(2) $F_{\tilde{x}}$ が $d\chi$ に関して singular ($F_{\tilde{x}} \perp d\chi$) であるとは, $\forall \phi, \psi \in H$ に対して

$$(F_{\tilde{x}}(\cdot)\phi, \psi) \perp d\chi$$

となることである。□

4.7. Lemma. $\{x_t\}_{t \in \Gamma}$ を Γ 上の X -valued sp, $P(\cdot)$ を shift operators U_s ($s \in \Gamma$) から導かれた \hat{G} 上の spectral measure, $d\chi$ を \hat{G} の Haar measure とする。また,

$$\mathcal{M}_a = \{y \in \mathfrak{h}(\tilde{x}) ; (P(\cdot)y, y)_X \ll d\chi\}$$

$$\mathcal{M}_s = \{z \in \mathfrak{h}(\tilde{x}) ; (P(\cdot)z, z)_X \perp d\chi\}$$

とおく。もし, \hat{G} が σ -compact であれば, $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_s$ は $\mathfrak{h}(\tilde{x})$ の Hilbert $B(H)$ -submodules になり, 共に U_s -invariant

$(s \in G)$ で, $\mathcal{H}(\tilde{x}) = \mathcal{M}_a \oplus \mathcal{M}_s$ が成立する。

(Outline of the proof) Halmos [2] によると, $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_s$ は Hilbert space $\mathcal{H}(\tilde{x})$ の closed subspaces で $\mathcal{H}(\tilde{x}) = \mathcal{M}_a \oplus \mathcal{M}_s$ を満足する。 $P(\cdot)U_s = U_s P(\cdot), s \in G$ であるから $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_s$ は U_s -invariant である。 $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_s$ が left $B(H)$ -modules になっていることも容易に確かめられる。 \square

Cramér の decomposition は次のようになる (c.f. [1, 4, 6, 15])。

4.8. Theorem. $\{x_t\}_{t \in G}$ を G 上の X -valued sp, $F_{\tilde{x}}$ をその spectral distribution, dX を \hat{G} の Haar measure とする。もし, \hat{G} が σ -compact であれば, $\{x_t\}_{t \in G}$ の一意な分解 $x_t = y_t + z_t, t \in G$ が存在して, 次を満たす:

(1) $\{y_t\}_{t \in G}, \{z_t\}_{t \in G}$ は G 上の X -valued sp's である。

(2) $F_{\tilde{y}}, F_{\tilde{z}}$ をそれぞれ $\{y_t\}_{t \in G}, \{z_t\}_{t \in G}$ の spectral distributions とすると

$$F_{\tilde{x}} = F_{\tilde{y}} + F_{\tilde{z}}$$

$$F_{\tilde{y}} \ll dX, \quad F_{\tilde{z}} \perp dX$$

が成立する。

(Outline of the proof) $P(\cdot)$ を $\{\alpha_t\}_{t \in \Gamma}$ に associate された \hat{G} 上の spectral measure として, $\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_s$ を Lemma 4.7 のように定義する。 Q を $\mathcal{H}(\tilde{\alpha})$ から \mathcal{M}_α の上への Gramian projection とし,

$$y_t = Q\alpha_t, \quad z_t = \alpha_t - y_t, \quad t \in \Gamma$$

とおく。この $\{y_t\}_{t \in \Gamma}, \{z_t\}_{t \in \Gamma}$ が (1), (2) を満たすことを確かめればよい。

Acknowledgements. この稿を書くにあたり 東京工大の梅垣寿春教授には、多くの有益な助言をいただいたことを感謝いたします。

References.

- [1] H. Cramér, On the theory of stationary random processes, *Ann. Math.* 41(1940), 215-230.
- [2] P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea, New York, 1951.
- [3] Y. Kakihara and T. Terasaki, Hilbert $B(H)$ -modules with applications I, *Res. Rep. Inst. Inf. Sci. Tech., Tokyo Denki Univ.* 5 (1979), 23-32.

- [4] Y. Kakihara, Hilbert $B(H)$ -modules with applications II, *in preparation*.
- [5] I. Kaplansky, Modules over operator algebras, *Amer. J. Math.* 75(1953), 839-853.
- [6] G. Kallianpur and V. Mandrekar, Spectral theory of stationary \mathcal{H} -valued processes, *J. Multivar. Anal.* 1 (1971), 1-16.
- [7] A.N. Kolmogorov, Stationary sequences in Hilbert space, *Bull. Math. Univ. Moscow* 2 (1941), 1-40.
- [8] V. Mandrekar and H. Salehi, The square-integrability of operator-valued functions with respect to a non-negative operator-valued measure and the Kolmogorov isomorphism theorem, *J. Math. Mech.* 20 (1970), 545-563.
- [9] _____, Subordination of infinite-dimensional stationary stochastic processes, *Ann. Inst. Henri Poincaré sec. B.* 6 (1970), 115-130.
- [10] M. Ozawa, Hilbert $B(H)$ -modules and stationary processes, to appear in *Kōdai Math. J.*
- [11] W.L. Paschke, Inner product modules over B^*

- algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 182 (1973), 443-468.
- [12] R. Payen, Fonctions aleatoires du second ordre a valeurs dans un espace de Hilbert, *Ann. Inst. Henri Poincaré sec. B.* 3 (1967), 323-396.
- [13] M. A. Rieffel, Induced representations of C^* -algebras, *Adv. Math.* 13 (1974), 175-257.
- [14] M. Rosenberg, Infinite-variate wide sense Markov processes and functional analysis for bounded operator-forming vectors, *J. Multivar. Anal.* 8 (1978), 295-316.
- [15] H. Salehi and J. K. Scheidt, Interpolation of q -variate weakly stationary stochastic processes over a locally compact abelian group, *J. Multivar. Anal.* 2 (1972), 307-331.
- [16] R. Schatten, *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*, Springer, Berlin, 1960.
- [17] T. Terasaki, Prediction theory of Hilbert space valued stationary processes over locally compact abelian groups, unpublished.
- [18] H. Umegaki and A. T. Bharucha-Reid, Banach space-valued random variables and tensor products of

Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 31(1970),
49-67.

- [19] N. Wiener and P. Masani, The prediction theory
of multivariate stochastic processes, I, *Acta Math.*
98(1957), 111-150.